

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

ΤΟΥ ΣΥΡΑΚΟΥΣΙΟΥ, ΤΑ ΜΕΧΡΙ

νῦν σωζόμενα, ἅπαντα.

ARCHIMEDIS SYRACVSANI

PHILOSOPHI AC GEOMETRAE EX-cellentiſſimi Opera, quæ quidem extant, omnia, multis iam ſeculis deſiderata, atque à quàm paucisſimis hactenus uiſa, nuncque primùm & Græcè & Latinè in lucem edita.

Quorum Catalogum uerſa pagina reperies.

Adiecta quoque ſunt

EVTOCII ASCALONITAE

IN EOSDEM ARCHIMEDIS LIbros Commentaria, item Græcè & Latinè, nunquam antea excuſa.

Cum Cæſ. Maieſt. gratia & priuilegio ad quinquennium.

BASILEAE,

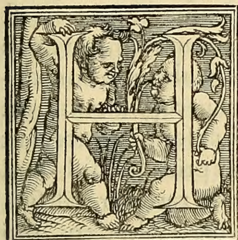
Ioannes Heruagius excudi fecit.

An. MDXLIIII.

ARCHIMEDIS OPERVM HOC LIBRO CONTENTOrum Catalogus.

Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου	βιβ. β΄.	De sphæra & cylindro libri	II.
Κύκλου μέτρησις	α΄.	Circuli dimensio	I.
Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων	α΄.	De conoidibus & sphæroidibus	I.
Περὶ ἑλίκων	α΄.	De lineis spiralibus	I.
Επιπέδων ἰσορροπικῶν, ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων	β΄.	Planorum æqueponderantium inuenta, uel centra grauitatis planorũ.	II.
Ψαμμίτης	α΄.	De harenæ numero	I.
Τετραγωνισμὸς παραβολῆς	α΄.	Quadratura parabolæ	I.
ΕΥΤΟΚΙΟΥ ἀσκαλωνίτου ὑπόμνημα εἰς τὸ πρῶτον καὶ δεύτερον τῶν ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου		EVTOCII Ascalonitæ Commentarius in primum & secundum Archimedis de sphæra & cylindro	
Εἰς τὴν τοῦ κύκλου μέτρησιν		In circuli dimensionem	
Εἰς τὸ α΄ καὶ β΄ τῶν ἰσορροπικῶν.		In primũ & secundũ æquepõderantiũ.	

AMPLISSIMO SENATORVM ORDINI REIPVBLICAE NORIMBERGENsis, *Dominis suis incomparabiliter obseruandis, Thomas Gechauff, cognomento Venatorius, se ipsum commendat.*



HOMINEM ab ipsomet Opifice rerum, imperium in ipsam terram, adeoq; in ipsas passim uniuersas creaturas accepisse: concessa etiam, quae homini, pro modulo sui status satis esset, cognitione rerum, Moses in ipso statim libri Geneseos uestibulo, scriptum reliquit. Homo autem simul atq; mandatum Opificis minus, quàm par erat, sancte colere coepisset, prębuissetq; iam aures aduersario lucis, protinus & accepto in rerum creaturas imperio exuitur, & summae felicitatis, ad quam utiq; formatus fuerat, fruitione priuatur: adeò ut iam non tantum longissimè à uera felicitate exularet, sed etiam in ipsa rerum cognitione equidem miserè caecutiret. Et meritò quidem. Qui enim supremae contemptor est maiestatis, suprema quur non plecteretur poena? Atqui ne penitus ab ea, ad quam semel fabricatus fuerat homo, excideret felicitate: praeterquam quod Deus omnipotens bonitatis suae uerbum, ut carnem indueret, misit, cuius deinde morte, labes illa contractae impuritatis ablueretur: rursus etiam hominem, ad praeclarissimarum rerum cognitionem, ceu per gradus quosdam artium ascendere uoluit, ut iam constanter nobis polliceri possimus, habere quãdam cum uirtute ipsa coniunctionem honestas artes omnes. Et si enim hodie inuentam ueritatem, sola sibi iure uendicat Theologia: inuentam una secure possidet pietas Christiana: nõ tamen & alias liberales disciplinas cõtemnere debemus, ob eam duntaxat causam, quòd per ipsas adhuc quaeritur Veritas: sed potius & ipsae in consuetudinem humanae uitae admittendae, ne quae usu adhuc rerum carent ingenia iuuentutis nostrae, penitus syluescant, dum perpetuò cultura bonarum artium destituuntur. Quod enim praestat cibus hominibus ut uiuant, id praestant honestae disciplinae, ut bene uiuant. Alimenta corporibus si subduxeris, ipsa protinus uiuere desinent: & communi mortalium uitae honestas artes, mox ut subducere coeperis, ipsa uita nostra, quid nisi quàm proximè ad brutorum uitam accedere uidebitur? Quare mea quidem sententia, hoc iuuentuti sunt artes honestę uniuersae, quod himber est pratis arescẽtibus, quod riui hortis, quod agris cultus, & ipsis quod est uineis putatio. Cultura artium ut rebus humanis non parum adijcit splendoris & ornamẽti, ita contemptus earum & morum & uitae sinceritatem non infrequen-

ter eneruare uisus est. Literis literatis non exculta uita nostra, quid aliud quàm barbara quædam censenda est barbaries? Certe bonarum artium studijs, homini præsertim ad immortalitatem contendenti, nulla est possessio uel certior, uel securior: cum quod hæc una possessio, animũ ad solidæ uirtutis amorem inflammat: tum quod ea ab initio qui usi sunt, ut uerè inquit Sapiens, participarunt amicitiæ Dei. Vos uerò P.C. quàm rectissimè consultum esse optetis Reipub. literariæ, abunde testantur tot passim illa uestræ liberalitatis collata in studiosos subsidia. Et est alioqui apud uos in magno precio philosophiæ studium: tum præcipuè in maiore honore haberi à uobis eos autores, qui Mathemata conscripserunt, uel hoc nomine, quod Mathematicarũ rerum cognitionem, numerare soletis inter pulcherrimas atq; utilissimas philosophiæ partes: ut inde uobis non solum multam utilitatem percipiatis priuatim, sed apud exteros quoq; & doctos harum rerum, summam non rarò inire uisi sitis gratiam publicè. Habuit ordo uester Senatorius semper tales uiros, qui uel pulcherrimarum artiũ fuerint studiosi, uel saltem qui à rectis studijs non essent prorsus abhorrente animo. Quæ laus cum ipsam secum ferat honestatem, non potest non esse pulcherrima. De uobis, qui hodie gubernacula Reipub. tenetis, ut paucis absoluere, quod dicere uolo, non possum: ita à me dedicatum uobis Archimedem Siculum illum, Mathematicarum disciplinarum facile, iudicio doctorum omniũ, principem, benignè equidem accipere debetis. Hoc enim uno renato, uniuersa Mathesis renata uideri queat. Fuit hactenus in Mathematicis scriptionibus Archimedis nomine celebrius nihil. at qui uerè oculis suis tanti autoris monimenta uiderit, quem mihi conspiciendũ dabitis? Bilibaldus Pirckheymerus, quem uos, dum uiueret, inter doctos doctissimum nominari haud grauatim passi estis: ille inquam, ut erat uir excellentis ingenij, cum Rhoma græcè scriptum Archimedis nostri exemplar, opera amici cuiusdam, tandem post longam expectationem accepisset, non tantum quasi uilem aliquem in ædibus suis passus est habitare hospitem, sed illũ quotidianæ studiorum suorum consuetudini uoluit essem consortem. Quippe qui nõ ignoraret, hoc studiorum genus olim semper religiosissimè ab ipsis summis regnorum moderatoribus, illisq; sapientissimis, & cultum fuisse, & celebratum. Hinc Plato philosophorũ lumen, in libris

Lib. 7. de Legib. scribens, suo more præcipere audet, Geometriam (ut alia prætercam) discẽdam esse à liberis hominibus. Quem sequutus M. Fabius Quintilianus, hanc ipsam disciplinam futuro Oratori, non tam utilem quàm necessariam etiam esse putauit. Itaq; rem gratam facturum me ratus sum, si eum autorem uestris potissimum auspicijs in diem protruderem, qui unus adhuc ad Mathematicas perfectiones absoluendas deesse uidebatur. Cæterum, quæ animis uestris insita est modestia, nõ egrè laturi estis, si extremos huius editionis fructus, ad uniuersos bonorum stu-

rum studiorum cultores cupiam perueturos, laudem uerò ad uos unos commigraturam. Hac enim laude cum primis digni estis, quod primi ac penè soli sitis hodie in Germania (absit inuidia dicto) quorum patrocinio rectorum studiorum causa sustentatur, fouetur'q;. Quod exemplum utinam sequerentur etiam alij, quos habet Germania Principes plures, titulis alioqui non inhonestarum rerum inclytos & illustres. Certe ab eis res præclarè gestæ, ad posteros ut cum laude extendantur, sine literarum præclarissimarum adminiculo, rectè sperare non possunt. Sic enim usu comperimus, neq; nomen sibi quenquam parare posse, neq; locum laudis ullum apud posteros habiturum, qui hisce disciplinis animum suum parum bona fide studuit obfirmare. Quare contemptores artium præterquam quòd uitam inglorij transigunt, in ipsum etiã conditorẽ rerum ingrati esse conuincuntur. Sunt enim artes honestæ omnes, non sine numinis summi certa dispensatione ad homines allatæ: ut iam neq; uita dignus censeri debeat, qui contemptor est eorum bonorum, sine quibus nec ipse homo rectè ualere queat. Animus quo est corpori præstantior, hoc diligentiori studio curandus uenit. Curatur autem recta ratione potissimum, & uirtute, qua cum cognationem quandam habent omnes simul honestæ artes. Quas non enim (ut de alijs taceam) illa nobis contulit in uita utilitates, quæ à mensuratione terræ Geometria, Græco nomine est uocata? Quid illius disciplinæ studiosi, ad uitæ humanæ conseruationem, intentatum reliquerunt? Quid non ausi sunt in lucem producere illi? An non illorum inuenta sunt machinæ illæ bellicæ, arietes, telaq; & propugnacula, passimq; uniuersa alia quæ in numero, pondere & mẽsura creasse Deum ipsum fides Christiana recepit? Corporum cœlestiũ ordines, interualla, magnitudines, ad nostram notitiam, non'ne Geometræ attulerunt? Scripsit huiusmodi de rebus Archimedes Siculus ille multa iucunda, utilia & necessaria uitæ: in quibus sunt de Sphæra & cylindro libri duo, copiosè equidem & felicissimè scripti. De circuli commensuratione, nihil æquè doctũ tradiderunt ueteres, atq; apud hunc nostrum legere est autorem. Si enim circulus in Geometricis figuris est linea infinita, in qua nõ est terminus à quo, (ut uocant:) nec terminus item ad quem, nẽpe cuius principiũ & finis est in quolibet puncto: quis, quæso, ueterum ea de re Archimede nostro apertius uel scripsit, uel docuit? Quis terminos illos quatuor, quibus uniuersa Mathemata constant, pũctum, lineam, planiciem, & profundum, clarius oculis humanis unquam subiecit? De planis uero corporibus, solidisq;, de rotundis, conicis quoque, & his quæ more pyramidum assurgunt: item de linea, superficie, & corpore, quibus tribus rebus omnis continetur magnitudo: & quia omne corpus tribus constat interuallis, longitudine, latitudine, crassitudine: deniq; de quadrata figura, quæ in architectura principem locum, & iure sibi congruentem uendicat, cuiq; quasi proprium est, quod est cu-

bus ſolidus & ſtabilis, firmiter inſiſtens quaquauerſum ceciderit, quia longitudinem latitudinem & profunditatem habeat. Atq; de his omnibus, quis obſecro uel doctius, uel accuratius, uel diligentius noſtro hoc Archimede tradidit? Sunt hodie non pauci, qui hæc ſtudia magno cum honore ſequuntur, digniq; habentur, quibus uel ſtatuæ, ad immortalem ſtudiorum ſuorum memoriam erigantur. quales potiſſimum noſtra etiam ſecula uiderunt, Ioannem Stofflerum Sueuū, Ioannem Schœnerum Caroloſtadium amicum, & in Mathematis ſtudijs præceptorem unicè mihi dilectum: Bilibaldum quoq; Pyrkheymerum, uirum præclaris rebus obeundis conſultiſſimum: ac paulo ante hæc tempora humanis exutum curis, Simonē Grynæum, uirum ex æquo & doctum & pium, cuiq; hoc unum deerat, quòd in tanta diuinarū humanarūq; rerū cognitione minimè eſſet inflatus. Chriſtianum quoq; Herlinum, Argentinenſem Mathematicum, uirum longè doctiſſimum, hoc loco uel in primis ac iure celebrandum puto, quippe cui non ſolum bonarum artium ſtudioſi, ſed & ipſi Archimedis noſtri manes plurimū debent, quòd in hoſce libros, quo cùm emendatiores, tum elegantib. typis illuſtriores prodirent, ſtudium haud leue impendit. Philippus Melanchthon uero hodie purioris literaturæ, ac ſeuerioris philoſophiæ uindex, cum Ioachimo Camerario Franco, ac altero item ciue meo Ioachimo Rhetico, quid non ſalutaris operæ inſumit, ut quàm latiſſimè odorem ſuum diffundāt recta ſtudia? De affine noſtro Achille P. reconditarum artium ſtudioſo, in primis uero Aſtrologiæ ac Medicinæ ſuprà quàm dici queat perito, hoc parcius hic ſum dicturus, quo ſcio illum eſſe modeſtiorem, quàm ut laudes noſtras in ſe agnoſcere uelit ullas, cum ſit alioqui maximis laudibus dignus. Ioannem à Regiomonte olim ut extra communem mortalium aleam poſuit natura, ita mundus hic, in Mathematicis diſciplinis, maiorem an habuerit in aliquot retro ſæculis, dubitare auſis. Is Rhomæ agens, paulo poſt captā, ac crudeliſſime direptam à Turcis Conſtantinopolitanā ciuitatem: cum iam literatæ literæ, bonis auſpicijs, tanquā ex fuga & tempeſtate ſeruatæ, in Italiam eſſent illatæ: is, inquam ego, primæ uocationi ſuæ in Italiam ultro obſequens, ut ampliſſimam nominis ſuæ famam eſt conſequutus, ita ex Conſtantinopolitana clade ereptos Græcos libros & uidit plurimos, & deſcripſit non paucos articulis proprijs. Inter alia autem Archimedis libros, de ſphæra & cylindro, de circuli dimenſione, deq; alijs rebus non tam utilibus quàm neceſſarijs mortalium generi, ueluti palàm eſt legere in iſtis libris, quos Iacobus Cremonenſis uir ea tempeſtate duplici honore dignus, cum quòd Græcè doctus eſſet, tum quod linguarum commercio adiutus, hanc operam ſolus uideretur abſoluere poſſe, in gratiam Nicolai V. Rom. Pont. iam pridem latinos fecerat: oblatos ſibi ab amicis diligentiſſimè deſcripſit, adiectis non rarò in marginibus, Græcis (quod etiam Græcorum codicum facta fuiſſet ſi-

bi copia) si quæ uisa fuissent uel uersa duriusculè, uel non admodum intelligenter descripta. Altera deinde suscepta in Italiam profectio, ut nõ fuit felix, ita nihil bonorum autorũ ad nos reportare potuit. Hominem enim exuens (non sine datiueneni suspicione) ad nos, ciues suos, quid referret exanimis? Sed hæc missa. Cæterum de quibus diximus, omnes haud illibenter Archimedi nostro sunt concessuri. Etenim quæ scripsit ille, in eo eminentiæ posita sunt loco, ut qui palmam artis præripere ei contendere ausit, facile inuenias neminem. Claruit autem Archimedes Syracusis ciuitate Siciliæ, Mathematicus & Geometra inter primos nobilis: à quo metiendi moles quascunque & facilis & expedita inuenta est ratio. Quin etiam terræ globum huiusmodi inuenisse, memoriæ proditum est, ut dicere non dubitarit: Si alter foret terræ globus, se illum ad hunc suum pertracturum: uel hunc suum, ad illum alterum impulsurũ. Et uerè quidem. Nam ipse artis suæ fiducia, haud paruo tempore obsidionem M. Marcelli remoratus, & patriæ simul tutatus est muros. Placet etiam, in gratiã studiosorum, C. Plinij calculum hic subijcere, ita scribentis: Grande & Archimedi Geometricæ & machinalis scientiæ testi- *Lib. 7.*
monium, M. Marcelli contigit interdicto, cum Syracusæ caperentur, *cap. 37.*
ne uiolaretur unus, nisi fefellisset imperium militaris imprudentia. Et hæc quidem ad hunc modum dicta sint satis, dum illud quoque ceu auctarij uice adiecerim: Secretiorem esse causam & uim liberalium studiorum, quàm ut à prophanis ingenijs percipi queat. Nam illa ex studijs nostris proueniens cùm laus, tum fructus & gloria, ad unam illam summamque rerum omnium causam primam dirigenda ueniunt, cuius præuia bonitate fit ut interim dulces sint omnes illæ, in recta studia collocatæ curæ, labores, uigiliæ, dum mens nostra quàm fieri poterit perfectissimè ad cognitionem honestarum artium penetrare & possit & ualeat. Quibus uerò spreta sunt honesta illa studia nostra, illos neque Numinis curam, neque propriæ felicitatis rationem habere, iam ante meritò diximus. Nos autem qui æquiore iudicio quãm uulgus stolidum, expendimus omnia, finem nostrorum studiorum dicimus esse: primum ut Opificem rerũ, quàm fieri queat plenissimè cognoscamus: deinde ut donis illius eruditi, per hanc naturalium rerum cognitionem, animis quoque euadamus meliores ac puriores, dum ipsis tandem summis spiritibus reddamur quàm similimi, gratia & misericordia Dei & Seruatoris nostri: qui & uos & unà uobiscum Rempub. uestram tueatur perpetuò. Amen. Ex Vrbe uestra, ad Calend. Decembres. Anno MDXLIII.

ARCHIMEDES de seipso.

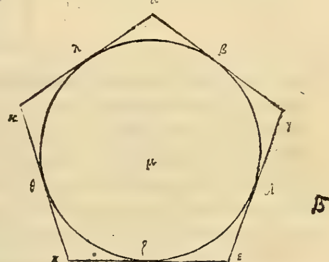
Ipse Syracusio surgens de sanguine ciuis,
Corripior patriæ dulcis amore meæ.
Clarus eram ingenio, Siculis cantatus in oris,
Clara simul per me Sicilis ora fuit.
Quin rerum domina ut patriam circundaret urbem,
Ars est Romanum nostra morata ducem.
Sed bene quæ uetuit uictor, male corripit arma
Miles, & è multis me tulit ausa manus.
Ni respexisset miseram Germania sortem,
Me simul atq; meas commiserata uices:
Abfuit inde parum mecum monumenta perirent,
Plurima, in extensos uiuere digna dies.
Quòd supero tenebras, cœlo fruiturus aperto
Posthac, Germanis debeo, non Siculis.

καλῶς ἔχειν μεταδιδόναι τοῖς οἰκείοις τῶν μαθημάτων, ἀποστέλλομέν σοι τὰς ἀποδείξεις ἀναγράψαντες, ὑπὲρ ὧν ἐξέσται τοῖς περὶ τὰ μαθήματα ἀναστρεφομένοις ἐπισκέψασθαι. ἔρρωσο.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ ΚΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ, ΒΙΒΛΙΟΝ Α.

ΡΑΦΟΝΤΑΙ πρῶτον τὰ ἀξιώματα, καὶ τὰ λαμβανόμενα εἰς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν. εἰσί τινες ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλαι γραμμαὶ πεπερασμέναι, αἳ τῶν τὰ πέρατα ἐπιζευγνυουσῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἤτοι ὅλαι ἐπὶ τὰ αὐτά εἰσιν, ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα. ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ κοίλην καλῶ τὴν τοιαύτην γραμμὴν, ἐν ᾗ ἐὰν δύο σημείων λαμβανομένων ὁποιωνοῦν, αἱ μεταξὺ τῶν σημείων εὐθεῖαι, ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσι τῆς γραμμῆς, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ' αὐτῆς, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμία. ὁμοίως δὴ καὶ ἐπιφάνειαί τινές εἰσι πεπερασμέναι. αὗται μὲν οὐκ ἐν ἐπιπέδῳ, τὰ δὲ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἐπιπέδῳ. τοῦ ἐπιπέδου ἐν ᾧ τὰ πέρατα ἔχουσιν, ἤτοι ὅλαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔσονται, ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα. ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ κοίλας καλῶ τὰς τοιαύτας ἐπιφανείας, ἐν αἷς ἂν δύο σημείων λαμβανομένων, αἱ μεταξὺ τῶν σημείων εὐθεῖαι, ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσι τῆς ἐπιφανείας, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ' αὐτῆς, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμία. τομέα δὲ στερεὸν καλῶ, ἐπειδὰν σφαῖραν κῶνος τέμνῃ, κορυφὴν ἔχων πρὸς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, τὸ ἐμπεριεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἐντὸς τοῦ κώνου. ῥόμβον δὲ καλῶ στερεὸν, ἐπειδὰν δύο κῶνοι τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντες, τὰς κορυφὰς ἔχωσιν ἐφ' ἑκάτερα τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως, ὅπως οἱ ἄξονες αὐτῶν ἐπ' εὐθείας ὦσι κείμενοι, τὸ ἐξ ἀμφοῖν τοῖν κώνοιν συγκείμενον στερεὸν σχῆμα. λαμβάνω δὲ ταῦτα, τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν. τῶν δὲ ἄλλων γραμμῶν ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ οὖσαι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσιν ἀνίσους εἶναι τὰς τοιαύτας. ἐπειδὰν ὦσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ ἤτοι ὅλη περιλαμβάνηται ἡ ἑτέρα αὐτῶν ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἐπιφανείας, καὶ τῆς εὐθείας τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐτῇ, ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνηται, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχῃ, καὶ ἐλάσσονα εἶναι τὴν περιλαμβανομένην. ὁμοίως καὶ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν, ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ τὰ πέρατα ἔχωσιν, ἐλάσσονα εἶναι τὴν ἐπίπεδον. τῶν δὲ ἄλλων ἐπιφανειῶν, καὶ τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν, ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ τὰ πέρατα ᾖ, ἀνίσας εἶναι τὰς τοιαύτας. ἐπειδὰν ὦσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ ἤτοι ὅλη περιλαμβάνηται ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἑτέρα ἐπιφάνεια, καὶ τῆς ἐπιπέδου τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐτῇ, ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνηται, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχῃ, καὶ ἐλάσσονα εἶναι τὴν περιλαμβανομένην. ἔτι δὲ τῶν ἀνίσων γραμμῶν, καὶ τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν, καὶ τῶν ἀνίσων στερεῶν, τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος ὑπερέχειν τοιούτῳ, ὃ συντιθέμενον αὐτὸ ἑαυτῷ δυνατόν ἐστιν ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος τῶν πρὸς ἄλληλα λεγομένων. τούτων δὲ ὑποκειμένων, ἐὰν εἰς κύκλον πολύγωνον ἐγγραφῇ, φανερὸν ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγραφέντος πολυγώνου ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. ἑκάστη γὰρ τῶν τοῦ πολυγώνου πλευρῶν ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, τῆς ὑπὸ τῆς αὐτῆς ἀποτεμνομένης.

ΕΑΝ περὶ κύκλον πολύγωνον περιγραφῇ, ἡ τοῦ περιγραφέντος πολυγώνου περίμετρος, μείζων ἐστὶ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου. περὶ γὰρ κύκλον πολύγωνον περιγεγράφθω τὸ ὑποκείμενον. λέγω, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου μείζων ἐστὶ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου. ἐπεὶ γὰρ συναμφότερος ἡ βαλ μείζων ἐστὶ τῆς βλ περιφερείας, διὰ τὸ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαν περιλαμβάνειν τὴν περιφέρειαν, ὁμοίως καὶ συναμφότερος μὲν ἡ δγ, γβ, τῆς δβ. συναμφότερος δὲ ἡ λκ, κθ, τῆς λθ. συναμφότερος δὲ ἡ ζηθ, τῆς ζθ. ἔτι δὲ συναμφότερος ἡ δε, εζ, τῆς δζ. ὅλη ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου μείζων ἐστὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου. α



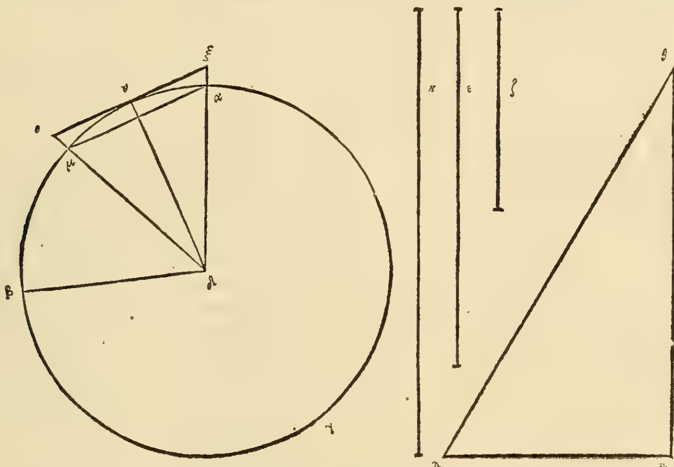
ΔΥο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων, δυνατόν ἐστιν εὑρεῖν δύο εὐθείας ἀνίσους, ὥστε τὴν μείζονα εὐθεῖαν πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἐλάσσονα, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. ἔστω δύο μεγέθη ἄνισα, τὰ αβ, δ β

καὶ ἔστω μεῖζον τὸ α̅β. λέγω, ὅτι δυνατόν ἐστι δύο εὐθείας ἀνίσας εὑρεῖν, τὸ εἰρημένον ἐπίταγμα ποιούσας. κείσθω διὰ τὸ δεύτερον τοῦ πρώτου τῶν Εὐκλείδου, τῷ δ̅ ἴσον τὸ β̅γ, καὶ κείσθω τις εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ζ̅η. τὸ δὴ γ̅α ἑαυτῷ ἐπισυντιθέμενον ὑπερέξει τοῦ δ̅. πεπολλαπλασιάσθω οὖν, καὶ ἔστω τὸ α̅θ. καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ α̅θ τοῦ α̅γ, τοσαπλάσιος ἔστω ἡ ζ̅η τῆς η̅ε. ἔστιν ἄρα ὡς θ̅α πρὸς α̅γ, οὕτως τὸ ζ̅η πρὸς η̅ε. καὶ ἀνάπαλίν ἐστιν ὡς ἡ ε̅η πρὸς η̅ζ, οὕτως τὸ α̅γ πρὸς α̅θ. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ α̅θ τοῦ δ̅, τουτέστι τοῦ γ̅β. τὸ ἄρα γ̅α πρὸς τὸ α̅θ λόγον ἐλάσσονα ἔχει, ἤπερ τὸ γ̅α πρὸς γ̅β. καὶ συνθέντι ἡ ε̅ζ ἄρα πρὸς ζ̅η ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ α̅β πρὸς β̅γ (διάλημμα) ἴσον δὲ τὸ β̅γ τῷ δ̅. ἡ ε̅ζ ἄρα πρὸς ζ̅η ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ α̅β πρὸς τὸ δ̅. εὑρημέναι εἰσὶν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, ποιοῦσαι τὸ (ἴσον) ἐπίταγμα. τουτέστι τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἐλάσσονα, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον.

γ̅ Δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων, καὶ κύκλου, δυνατόν ἐστιν εἰς τὸν κύκλον πολύγωνον ἐγγράψαι, καὶ ἄλλο περιγράψαι. ὅπως ἡ τοῦ περιγραφομένου πολυγώνου πλευρά, πρὸς τὴν τοῦ ἐγγραφομένου πολυγώνου πλευράν, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. ἔστω τὰ δοθέντα δύο μεγέθη τὰ α̅β. ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ ὑποκείμενος. λέγω οὖν, ὅτι δυνατόν ἐστι ποιεῖν τὸ ἐπίταγμα. εὑρήσθωσαν δὲ δύο εὐθεῖαι αἱ θ̅, κ̅λ, ὧν μείζων ἔστω ἡ θ̅. ὥστε τὴν θ̅ πρὸς τὴν κ̅λ, ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλαττον. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ λ̅ τῇ κ̅λ πρὸς ὀρθὰς ἡ λ̅μ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ̅ τῇ θ̅ ἴση κατήχθω ἡ κ̅μ. δυνατὸν γὰρ τοῦτο. καὶ ἤχθωσαν τοῦ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ γ̅ε, δ̅ζ. τέμνοντες οὖν τὴν ὑπὸ τῶν δ̅κ̅γ γωνίαν δίχα, καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα, καὶ ἀεὶ τοῦτο ποιοῦντες λείψομεν τινὰ γωνίαν ἐλάσσονα ἢ διπλασίαν τῆς ὑπὸ λ̅κ̅μ. λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ ὑπὸ ν̅κ̅γ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ν̅γ. ἡ ἄρα ν̅γ πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ ἰσοπλεύρου. ἐπείπερ ἡ ὑπὸ ν̅κ̅γ γωνία μετρεῖ τὴν ὑπὸ δ̅κ̅γ ὀρθὴν οὖσαν, καὶ ἡ ν̅γ ἄρα περιφέρεια μετρεῖ τὴν γ̅δ, τέταρτον οὖσαν κύκλου· ὥστε καὶ τὸν κύκλον μετρεῖ. πολυγώνου ἄρα ἐστὶ πλευρὰ ἰσοπλεύρου ἡ γ̅ν. φανερὸν γάρ ἐστι τοῦτο. καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ γ̅κ̅ν γωνία δίχα τῇ κ̅ξ εὐθείᾳ. καὶ ἀπὸ τοῦ ξ̅ ἐφαπτέσθω τοῦ κύκλου ἡ ο̅ξ̅π. καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ κ̅ν̅π, κ̅γ̅ο. ὥστε καὶ ἡ π̅ο πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον, καὶ ἰσοπλεύρου, φανερὸν ὅτι καὶ ὁμοίου τῷ ἐγγραφομένῳ, οὗ πλευρὰ ἡ ν̅γ. ἐπεὶ δὲ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ διπλασία ἡ ὑπὸ ν̅κ̅γ τῆς ὑπὸ λ̅κ̅μ, διπλασία δὲ τῆς ὑπὸ τ̅κ̅γ, ἐλάσσων ἐστὶν ἄρα ἡ ὑπὸ τ̅κ̅γ τῆς ὑπὸ λ̅κ̅μ. καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς λ̅ τ̅. ἡ ἄρα μ̅κ πρὸς λ̅κ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ̅κ πρὸς κ̅τ. ἴση δὲ ἡ γ̅κ τῇ κ̅ξ.

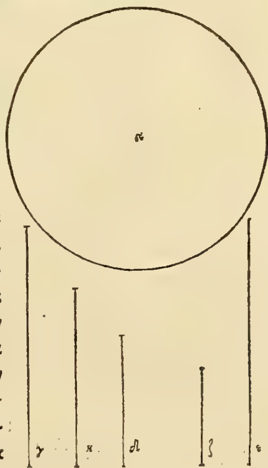
τῇ η ξ. ὥστε ἡ η ξ πρὸς η τ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τουτέστιν ἡ π ο πρὸς ν γ. ἤ ἡ μ η πρὸς η λ. ἔτι δὲ ἡ η μ πρός η λ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ α πρὸς τὸ β. καὶ ἔστι μὲν π ο πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου πολυγώνου, ἡ δὲ γ ν τοῦ ἐγγραφομένου· ὅπερ προέκειτο εὑρεῖν.

Πάλιν δύο μεγέθων ἀνίσων ὄντων, καὶ τομέως, δυνατόν ἐστι περὶ τὸν τομέα πολύγωνον περιγράψαι, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι. ὥστε τὴν τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰν, πρὸς τὴν ἐγγεγραμμένου πλευρὰν, ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. ἔστω γὰρ πάλιν δύο δ



μεγέθη ἄνισα τὰ ε ζ. ὧν μεῖζον ἔστω τὸ ε, κύκλος δέ τις ὁ α β γ, κέντρον ἔχων τὸ δ. καὶ πρὸς τὸ δ τομεὺς συνεστάτω ὁ α δ β. δεῖ δὴ περιγράψαι, καὶ ἐγγράψαι πολύγωνον περὶ τὸν α β δ τομέα, ἴσας ἔχον τὰς πλευρὰς χωρὶς τῶν β δ α, ὅπως γένηται τὸ ἐπίταγμα. εὑρήσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι αἱ η θ κ ἄνισοι, καὶ μείζων ἡ η. ὥστε τὴν η πρὸς τὴν θ κ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. δυνατὸν γὰρ τοῦτο. καὶ ἀπὸ τοῦ θ ὁμοίως ἀχθείσης πρὸς ὀρθὰς τῇ θ κ τῆς θ λ, προσβεβλήσθω τῇ η ἴση ἡ κ λ. δυνατὸν γάρ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ η τῆς θ κ, τεμνομένης δὴ τῆς ὑπὸ τῶν α δ β γωνίας δίχα, καὶ τῆς ἡμισείας δίχα, καὶ ἀεὶ τούτου γινομένου λειφθήσεταί τις γωνία, ἐλάσσων οὖσα ἢ διπλασία τῆς ὑπὸ λ η θ. λελείφθω οὖν ἡ ὑπὸ α δ μ. ἡ α μ οὖν γὰρ πολυγώνου πλευρὰ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον. καὶ ἐὰν τέμωμεν τὴν ὑπὸ α δ μ γωνίαν δίχα τῇ δ ν, καὶ ἀπὸ τοῦ ν, ἐπὶ ἀγάγωμεν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου τὴν ν ξ ο, αὕτη πλευρὰ ἔσται τοῦ πολυγώνου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον, ὁμοίου τῷ εἰρημένῳ. καὶ ὁμοίως τοῖς προειρημένοις ἡ ξ ο πρὸς τὴν α μ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ε μέγεθος πρὸς τὸ ζ.

Κύκλου δοθέντος καὶ δύο μεγέθων ἀνίσων, περιγράψαι περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι. ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. ἐκκείσθω κύκλος ὁ α, καὶ δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ε ζ. καὶ μεῖζον τὸ ε. δεῖ οὖν πολύγωνον ἐγγράψαι εἰς τὸν κύκλον. καὶ ἄλλο περιγράψαι, ἵνα γένηται τὸ ἐπιταχθέν. λαμβάνω γὰρ δύο εὐθείας ἀνίσους τὰς γ δ. ὧν μείζων ἔστω ἡ γ. ὥστε τὴν γ πρὸς τὴν δ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ ε πρὸς τὸ ζ. καὶ τῶν γ δ μέσης ἀνὰ λόγον ληφθείσης τῆς η, μείζων ἄρα καὶ ἡ γ τῆς η. περιγεγράφθω δὴ περὶ κύκλον πολύγωνον, καὶ ἄλλο ἐγγεγράφθω, ὥστε τὴν τοῦ περιγρα-



φέντος πολυγώνου πλευρὰν, πρὸς τὴν τοῦ ἐγγραφέντος, ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὴν γ̄ πρὸς τὴν η̄, καθὼς ἐμάθομεν. διὰ τοῦτο δὴ καὶ ὁ διπλάσιος λόγος τοῦ διπλασίου ἐλάσσων ἐστί. καὶ τοῦ μὲν τῆς πλευρᾶς πρὸς τὴν πλευρὰν, διπλάσιός ἐστιν ὁ τοῦ πολυγώνου πρὸς τὸ πολύγωνον· ὅμοια γάρ. τῆς δὲ γ̄ πρὸς τὴν η̄, ὁ τῆς γ̄ πρὸς τὴν δ̄. καὶ τὸ περιγραφὲν ἄρα πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ̄ πρὸς τὴν δ̄. πολλῷ ἄρα καὶ τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ε̄ πρὸς τὸ ζ̄. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων, καὶ τομέως, δυνατόν ἐστι περὶ τὸν τομέα πολύγωνον περιγράψαι, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι ὅμοιον αὐτῷ, ἵνα τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. φανερὸν δὲ καὶ τοῦτο, ὅτι ἐὰν δοθῇ κύκλος, ἢ τομεὺς, καὶ χωρίον τι, δυνατόν ἐστιν ἐγγράφοντα εἰς τὸν κύκλον, ἢ τὸν τομέα πολύγωνα ἰσόπλευρα. καὶ ἔτι ἀεὶ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα, λείπειν τινὰ τμήματα τοῦ κύκλου ἢ τομέως, ἅπερ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ προκειμένου χωρίου. ταῦτα γὰρ ἐν τῇ στοιχειώσει παραδέδοται.

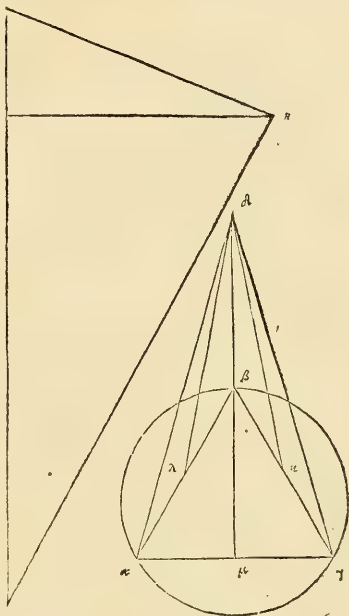
ε Δεικτέον δὲ, ὅτι καὶ κύκλου δοθέντος, ἢ τομέως καὶ χωρίου, δυνατόν ἐστι περιγράψαι πολύγωνον περὶ τὸν κύκλον, ἢ τομέα, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τῆς περιγραφῆς τμήματα ἐλάσσονα εἶναι τοῦ δοθέντος χωρίου. ἔστω γὰρ ἐπὶ κύκλου δείξαντα, μεταγαγεῖν τὸν ὅμοιον λόγον καὶ ἐπὶ τοῦ τομέως. δεδόσθω κύκλος ὁ ᾱ, καὶ χωρίον τι τὸ β̄, δυνατὸν δὴ περιγράψαι περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον, ὥστε τὰ ἀπολειφθέντα τμήματα μεταξὺ τοῦ κύκλου καὶ τοῦ πολυγώνου ἐλάσσονα εἶναι τοῦ β̄ χωρίου. καὶ γὰρ ὄντων δύο μεγεθῶν ἀνίσων, μείζονος μὲν συναμφοτέρου τοῦ χωρίου καὶ τοῦ κύκλου, ἐλάσσονος δὲ τοῦ κύκλου, περιγεγράφθω περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον, καὶ ἄλλο ἐγγεγράφθω, ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ εἰρημένον μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. τοῦτο δὴ τὸ περιγραφόμενον πολύγωνόν ἐστιν οὗ τὰ περιλείμματα ἔσται, ἐλάσσονα τοῦ προτεθέντος χωρίου τοῦ β̄. εἰ γὰρ τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ συναμφότερον, ὅ τε κύκλος καὶ τὸ β̄ χωρίον πρὸς αὐτὸν τὸν κύκλον· τοῦ δὲ ἐγγραφομένου μείζων ὁ κύκλος, πολλῷ μᾶλλον τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ συναμφότερον, ὅ τε κύκλος καὶ τὸ β̄ χωρίον πρὸς αὐτὸν τὸν κύκλον. καὶ διελόντι ἄρα τὰ ἀπολείμματα τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ β̄ χωρίον πρὸς τὸν κύκλον. ἐλάσσονα ἄρα τὰ ἀπολείμματα τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου τοῦ β̄ χωρίου, ἢ οὕτως. ἐπεὶ τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ συναμφότερον, ὅ τε κύκλος καὶ τὸ β̄ χωρίον πρὸς τὸν κύκλον. διὰ τοῦτο δὴ ἔλασσον ἔσται τὸ περιγραφὲν συναμφοτέρου. ὥστε καὶ ἄλλα τὰ περιλείμματα ἐλάσσονα ἔσται τοῦ χωρίου τοῦ β̄. ὁμοίως δὲ καὶ τοῦ τομέως.

ζ Ἐὰν ἐν ἰσοσκελεῖ κώνῳ πυραμὶς ἐγγραφῇ, ἰσόπλευρον ἔχουσα βάσιν, ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς χωρὶς τῆς βάσεως, ἴση ἐστὶ τριγώνῳ, βάσιν μὲν ἔχοντι ἴσην τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως. ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ μίαν πλευρὰν τῆς βάσεως κάθετον ἀγομένην. ἔστω κῶνος ἰσοσκελὴς, οὗ βάσις ὁ α β̄ γ κύκλος, καὶ εἰς αὐτὸν ἐγγεγράφθω πυραμὶς ἰσόπλευρον ἔχουσα τρίγωνον τὸ α β̄ γ. λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ τριγώνῳ. ἐπεὶ γὰρ ἰσοσκελὴς ὁ κῶνος, καὶ ἰσόπλευρος ἡ βάσις τῆς πυραμίδος, τὰ ὕψη τῶν περιεχόντων τριγώνων τὴν πυραμίδα, ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. καὶ βάσιν μὲν ἔχει τὰ τρίγωνα, τὰς ᾱ β, β̄ γ, γ̄ α. ὕψος δὲ, τὸ εἰρημένον. ὥστε τὰ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην ταῖς ᾱ β, β̄ γ, γ̄ α. ὕψος δὲ τὴν εἰρημένην εὐθεῖαν, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος, χωρὶς τοῦ α β̄ γ τριγώνου.

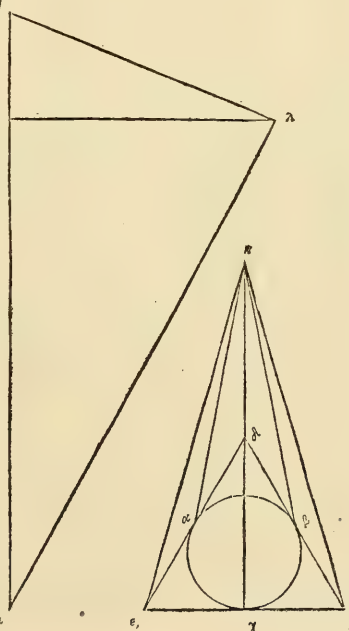
ΣΑΦΕΣΤΕΡΟΝ ΑΛΛΩΣ Η ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστω κῶνος ἰσοσκελὴς, οὗ βάσις μὲν ὁ α β̄ γ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ

δ σημεῖον. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν κῶνον πυραμίς, βάσιν μὲν ἔχουσα ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ αβγ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δα, δγ, δβ. λέγω ὅτι τὰ αδβ, αδγ, βδγ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τριγώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ περιμέτρῳ τοῦ αβγ τριγώνου. ἡ δὲ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος, ἴση τῇ καθέτῳ τῇ ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὴν βγ ἀγομένην. ἤχθωσαν γὰρ κάθετοι αἱ δκ, δλ, δμ. αὗται ἄρα ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ κείσθω τρίγωνον τὸ εζη, ἔχον τὴν μὲν εζ βάσιν τῇ περιμέτρῳ τοῦ αβγ τριγώνου ἴσην. τὴν δὲ ηθ κάθετον τῇ δλ ἴσην. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν βγ, δλ διπλάσιόν ἐστι τοῦ δβγ τριγώνου· ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν αβ, δκ διπλάσιον τοῦ αβδ τριγώνου. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν αγ, δμ διπλάσιον τοῦ αδγ τριγώνου, τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ αδγ τριγώνου· τουτέστι τῆς εζ, καὶ τῆς δλ, τουτέστι τῆς ηθ, διπλάσιον τῶν αδβ, βδγ, αδγ τριγώνων. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ εζ, ηθ διπλάσιον τοῦ εζη τριγώνου, ἴσον ἄρα τὸ εζη τρίγωνον τοῖς αδβ, βδγ, αδγ τριγώνοις.



Ἐὰν περὶ κῶνον ἰσοσκελῆ πυραμὶς περιγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως, ἴση ἐστὶ τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως, ὕψος δὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου. ἔστω κῶνος οὗ βάσις ὁ αβγ κύκλος, καὶ πυραμὶς περιγεγράφθω ὥστε τὴν βάσιν αὐτῆς, τουτέστι τὸ δεζ πολύγωνον περιγεγραμμένον περὶ τὸν αβγ κύκλον εἶναι. λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ τριγώνῳ. ἐπεὶ γὰρ ὁ ἄξων τοῦ κώνου ὀρθός ἐστι πρὸς τὴν βάσιν, τουτέστι πρὸς τὸν αβγ κύκλον, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι κάθετοί εἰσιν ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας. ἔσονται ἄρα καὶ αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύμεναι κάθετοι ἐπὶ τὰς δε, ζε, ζδ, αἱ ηα, ηβ, ηγ. ἄρα αἱ εἰρημέναι κάθετοι ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις· πλευραὶ γάρ εἰσι τοῦ κώνου. κείσθω δὴ τὸ τρίγωνον τὸ θκλ, ἴσην ἔχον τὴν μὲν θκ τῇ περιμέτρῳ τοῦ δεζ τριγώνου. τὴν δὲ λμ κάθετον ἴσην τῇ ηα. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὑπὸ δε, αη διπλάσιόν ἐστι τοῦ εδη τριγώνου. τὸ δὲ ὑπὸ δζ, ηβ διπλάσιόν ἐστι τοῦ δζη τριγώνου, τὸ δὲ ὑπὸ εζ, γη διπλάσιόν ἐστι τοῦ εηζ τριγώνου, ἔστιν ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς θκ καὶ τῆς αη, τουτέστι τῆς μλ, διπλάσιον τῶν εδη, ζδη, εηζ τριγώνων. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν θκ, λμ, διπλάσιον τοῦ λκθ τριγώνου. διὰ τοῦτο δὴ ἴση ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως, τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι ἴσην τῇ περιμέτρῳ τοῦ δεζ, ὕψος δὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου.



θ Ἐὰν κώνου τινὸς ἰσοσκελοῦς εἰς τὸν κύκλον, ὅς ἐστι βάσις τοῦ κώνου, εὐθεῖα γραμμὴ ἐμπέσῃ, ἀπὸ δὲ τῶν περάτων αὐτῆς εὐθεῖαι γραμμαὶ ἀχθῶσιν ἐπὶ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου, τὸ περιληφθὲν τρίγωνον, ὑπό τε τῆς ἐμπεσούσης καὶ τῶν ἐπιζευχθεισῶν ἐπὶ τὴν κορυφὴν, ἔλασσον ἔσται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, τῆς μεταξὺ τῶν ἐπὶ τὴν κορυφὴν ἐπιζευχθεισῶν. ἔστω κώνου ἰσοσκελοῦς βάσις ὁ αβγ κύκλος. κορυφὴ δὲ τὸ δ. καὶ διήχθω τις εἰς αὐτὸν εὐθεῖα ἡ αγ. καὶ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὰ αγ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, δγ. λέγω ὅτι τὸ αδγ τρίγωνον ἔλασσόν ἐστι τῆς ἐπιφανείας τῆς κωνικῆς, τῆς μεταξὺ τῶν αδγ. τετμήσθω ἡ αβγ περιφέρεια δίχα κατὰ τὸ β. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ, γβ, δβ. ἔσται δὴ τὰ αβδ, βγδ, τρίγωνα μείζονα τοῦ αδγ τριγώνου, ᾧ δὴ ὑπερέχει τὰ εἰρημένα τρίγωνα τοῦ αδγ τριγώνου, ἔστω τὸ θ. τὸ δὴ θ ἤτοι τῶν αβ, βγ τμημάτων ἔλασσόν ἐστιν, ἢ οὔ. ἔστω μὴ ἔλασσον πρότερον. ἐπεὶ οὖν δύο εἰσὶν ἐπιφάνειαι, ἥ τε κωνικὴ ἡ μεταξὺ τῶν αδβ, μετὰ τοῦ αεβ τμήματος, καὶ ἡ τοῦ αδβ τριγώνου, τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαι τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου τοῦ αδβ, μείζων ἔσται ἡ περιλαμβάνουσα τῆς περιλαμβανομένης, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν αδβ μετὰ τοῦ αεβ τμήματος, τοῦ αβδ τριγώνου. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ μεταξὺ τοῦ δβγ τριγώνου, μετὰ τοῦ γζβ τμήματος, μείζων ἐστὶ τοῦ βδγ τριγώνου. ὅλη ἄρα ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια μετὰ τοῦ θ χωρίου ἐστὶ μείζων τῶν εἰρημένων τριγώνων. τὰ δὲ εἰρημένα τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε αδγ τριγώνῳ, καὶ τῷ θ χωρίῳ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ θ χωρίον. λοιπὴ ἄρα ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἡ μεταξὺ τῶν αδβ, μείζων ἐστὶ τοῦ αδγ τριγώνου. ἔστω δὴ τὸ θ ἔλασσον τῶν αβ, βγ τμημάτων. τέμνοντες δὴ τὰς αβ, βγ περιφερείας δίχα, καὶ τὰς ἡμισείας αὐτῶν δίχα, λείψομεν τμήματα ἐλάσσονα ὄντα τοῦ θ χωρίου. λελείφθω τὰ ἐπὶ τῶν αε, εβ, βζ, ζγ εὐθειῶν. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δε, δζ. πάλιν τοίνυν κατὰ τὰ αὐτά, ἡ μὲν ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἡ μεταξὺ τῶν αδε, μετὰ τοῦ ἐπὶ τῆς αε τμήματος, μείζων ἐστὶ τοῦ αδε τριγώνου. ἡ δὲ μεταξὺ τοῦ εδβ μετὰ τοῦ ἐπὶ τῆς εβ τμήματος, μείζων ἐστὶ τοῦ εδβ τριγώνου. ἡ ἄρα ἐπιφάνεια, ἡ μεταξὺ τῶν αδβ μετὰ τῶν αε, εβ τμημάτων, μείζων ἐστὶ τῶν αδε, εβδ τριγώνων. ἐπεὶ δὲ τὰ αεδ, δεβ τρίγωνα μείζονά ἐστι τοῦ αβδ τριγώνου, καθὼς δέδεικται, πολλῷ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου, ἡ μεταξὺ τῶν αδβ, μετὰ τῶν ἐπὶ τῶν αε, εβ τμημάτων, μείζων ἐστὶ τοῦ αδβ τριγώνου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν δβγ, μετὰ τῶν ἐπὶ τῶν βζ, ζγ, μείζων ἐστὶ τοῦ βδγ τριγώνου. ὅλη ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν αδγ, μετὰ τῶν εἰρημένων τμημάτων μείζων ἐστὶ τῶν αβδ, δβγ τριγώνων. ταῦτα δέ ἐστιν ἴσα τῷ αδγ τριγώνῳ, καὶ τῷ θ χωρίῳ, ὧν τὰ εἰρημένα τμήματα ἐλάσσονα τοῦ θ χωρίου. λοιπὴ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν αδγ, μείζων ἐστὶ τοῦ αδγ τριγώνου.

ι Ἐὰν ἐπιψαύουσαι ἀχθῶσι τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ κώνου ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι τῷ κύκλῳ, καὶ συμπίπτουσαι ἀλλήλαις, ἀπὸ δὲ τῶν ἁφῶν καὶ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου εὐθεῖαι ἀχθῶσι, τὰ περιεχόμενα τρίγωνα ὑπὸ τῶν ἐπιψαυουσῶν καὶ τῶν ἐπὶ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν μείζονά ἐστι τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας, τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ᾽ αὐτῶν. ἔστω κῶνος οὗ βάσις μὲν ὁ αβγ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ ε σημεῖον. καὶ τοῦ αβγ κύκλου ἐφαπτόμεναι ἤχθωσαν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, αἱ αδ, γδ, καὶ ἀπὸ τοῦ ε σημείου ὅ ἐστι κορυφὴ τοῦ κώνου ἐπὶ τὰ α, δ, γ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εα, εδ, εγ. λέγω δέ, ὅτι τὰ αδε, δεγ τρίγωνα μείζονα

μείζονά ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν α ε, γ ε εὐθειῶν, καὶ τῆς α β γ περιφερείας. ἤχθω γὰρ ἡ η β ζ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, καὶ παράλληλος οὖσα τῇ α γ, δίχα τμηθείσης τῆς α β γ περιφερείας κατὰ τὸ β. καὶ ἀπὸ τῶν η, ζ ἐπὶ τὸ ε ἐπεζεύχθωσαν αἱ η ε, ζ ε. καὶ ἐπεὶ μείζους εἰσὶν αἱ η δ, δ ζ τῆς η ζ, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ η α, ζ γ. ὅλαι ἄρα αἱ α δ, δ γ μείζους εἰσὶ τῶν α η, η ζ, ζ γ. καὶ ἐπεὶ αἱ α ε, ε β, ε γ πλευραί εἰσι τοῦ κώνου, ἴσαι εἰσί, διὰ τὸ ἰσοσκελῆ εἶναι τὸν κῶνον. ὁμοίως δὲ καὶ κάθετοί εἰσιν, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ λήμματι, τὰ δ' ἀπὸ τῶν καθέτων καὶ τῶν βάσεων τῶν α η ε, η ε ζ, ζ ε γ τριγώνων. εἰσὶ γὰρ αἱ μὲν α η, η ζ, ζ γ ἐλάσσους τῶν γ δ, δ α. τὰ δὲ ὕψη αὐτῶν ἴσα. φανερὸν γάρ, ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ὀρθοῦ κώνου ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν τῆς βάσεως ἐπιζευγνυμένη κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην. ᾧ δὴ μείζονά ἐστι τὰ α ε δ, δ γ ε τρίγωνα, τῶν α ε η, η ε ζ, ζ ε γ τριγώνων, ἔστω τὸ θ χωρίον. τὸ δὴ θ χωρίον, ἤτοι ἔλαττόν ἐστι τῶν περιλειμμάτων τῶν α η β, β ζ γ, ἢ οὐκ ἔλαττον. ἔστω πρότερον οὐκ ἔλαττον. ἐπεὶ οὖν εἰσὶν ἐπιφάνειαι σύνθετοι, ἥτε τῆς πυραμίδος τῆς ἐπὶ βάσεως τοῦ η α, γ ζ τραπεζίου, κορυφὴν ἔχουσα τὸ ε. καὶ ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἡ μεταξὺ τῶν α ε γ μετὰ τοῦ α β γ τμήματος. καὶ πέρας ἔχουσι, τὴν αὐτὴν περίμετρον τοῦ α ε γ τριγώνου, δῆλον ὡς ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τοῦ α ε γ τριγώνου, μείζων ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας μετὰ τοῦ τμήματος τοῦ α β γ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ α β γ τμῆμα. λοιπὰ ἄρα τὰ τρίγωνα τὰ α η ε, η ε ζ, ζ ε γ, μετὰ τῶν α η β, β ζ γ περιλειμμάτων, μείζονά ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν α ε, ε γ. τῶν δὲ α η β, β ζ γ περιλειμμάτων οὐκ ἔλασσόν ἐστι τὸ θ χωρίον, πολλῷ ἄρα τὰ α η ε, η ε ζ, ζ ε γ τρίγωνα μετὰ τοῦ θ, μείζονα ἔσται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν α ε, ε γ. ἀλλὰ τὰ α η ε, η ε ζ, ζ ε γ τρίγωνα μετὰ τοῦ θ, ἐστὶ τὰ α ε δ, δ ε γ τρίγωνα. τὰ ἄρα α ε δ, δ ε γ τρίγωνα, μείζονα ἔσται τῆς εἰρημένης κωνικῆς ἐπιφανείας. ἔστω δὴ τὸ θ ἔλασσον τῶν περιλειμμάτων, ἀεὶ δὴ περιγράφοντες πολύγωνα περὶ τὰ τμήματα. ὁμοίως δίχα τεμνομένων τῶν περιλειπομένων περιφερειῶν, καὶ ἀγομένων ἐφαπτομένων, λείψομεν τινὰ περιλήμματα, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ θ χωρίου. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ α μ κ, κ ν β, β ξ λ, λ ο γ ἐλάσσονα ὄντα τοῦ θ χωρίου, καὶ ἐπεζεύχθω ἐπὶ τὸ ε. πάλιν φανερόν, ὅτι τὰ α η ε, η ε ζ, ζ ε γ τρίγωνα, τῶν α ε μ, μ ε ν, ν ε ξ, ξ ε ο, ο ε γ τριγώνων ἔσται μείζονα. αἵ τε γὰρ βάσεις τῶν βάσεών εἰσι μείζους, τὸ δὲ ὕψος ἴσον. ἔτι δὲ πάλιν ὁμοίως μείζονα ἔχει ἐπιφάνειαν ἡ πυραμίς, ἡ βάσιν μὲν ἔχουσα τὸ α μ ν ξ ο γ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ ε, χωρὶς τοῦ α ε γ τριγώνου, τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν α ε γ, μετὰ τοῦ α β γ τμήματος. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ α β γ τμῆμα, λοιπὰ ἄρα τὰ α ε μ, μ ε ν, ν ε ξ, ξ ε ο, ο ε γ τρίγωνα, μετὰ τῶν α μ κ, κ ν β, β ξ λ, λ ο γ περιλειμμάτων μείζονα ἔσται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν α ε γ. ἀλλὰ τῶν μὲν εἰρημένων περιλειμμάτων μεῖζόν ἐστι τὸ θ χωρίον. τῶν δὲ α ε μ, μ ε ν, ν ε ξ, ξ ε ο, ο ε γ τριγώνων μείζονα ἐδείχθη τὰ α ε η, η ε ζ, ζ ε γ τρίγωνα. πολλῷ ἄρα τὰ δ ε η, η ε ζ, ζ ε γ τρίγωνα μετὰ τοῦ θ χωρίου, τουτέστι τὰ α δ ε, δ ε γ τρίγωνα, μείζονά ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, τῆς μεταξὺ τῶν α ε γ εὐθειῶν.

Ἐὰν ἐν ἐπιφανείᾳ ὀρθοῦ κυλίνδρου δύο εὐθεῖαι ὦσιν, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου, ἡ μεταξὺ ια
τῶν εὐθειῶν, μείζων ἐστὶ τοῦ παραλληλογράμμου, τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τῶν ἐν τῇ ἐπιφα-

νείᾳ

νείας τοῦ κυλίνδρου εὐθειῶν, καὶ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰ πέρατα αὐτῶν. ἔστω κύλινδρος ὀρθός, οὗ βάσις μὲν ὁ αβ κύκλος. ἀπεναντίον δὲ ὁ γδ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, βδ. λέγω ὅτι ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν αγ, βδ εὐθειῶν, μείζων ἐστὶ τοῦ αγ, βδ παραλληλογράμμου. τετμήσθω γὰρ ἑκατέρα τῶν αβ, γδ περιφερειῶν δίχα, κατὰ τὰ ε ζ σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αε, εβ, γζ, ζδ. καὶ ἐπεὶ αἱ αε, εβ τῆς αβ μείζους εἰσί, καὶ ἔστιν ἰσοϋψῆ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπ' αὐτῶν. μείζονα οὖν ἐστὶ τὰ παραλληλόγραμμα, ὧν αἱ βάσεις μὲν αἱ αε, εβ. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου, τοῦ αβ, γδ παραλληλογράμμου. τίνι ἄρα μείζων ἐστίν, ἔστω τῷ η χωρίῳ. τὸ δὲ η χωρίον ἤτοι ἔλασσον τῶν αε, εβ, γζ, ζδ ἐπιπέδων ἐστὶ τμημάτων. ἢ οὐκ ἔλασσον. ἔστω πρότερον μὴ ἔλασσον. καὶ ἐπεὶ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν αγ, βδ εὐθειῶν, καὶ τὰ αεβ, γζδ τμήματα πέρας ἔχει τὸ τοῦ αγ, βδ παραλληλογράμμου ἐπίπεδον. ἀλλὰ καὶ ἡ συγκειμένη ἐπιφάνεια, ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσις μὲν αἱ αε, εβ. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. καὶ τὰ αεβ, γζδ τρίγωνα πέρας ἔχει τὸ τοῦ αβγδ παραλληλογράμμου ἐπίπεδον. καὶ ἑτέρα τὴν ἑτέραν περιλαμβάνει, καὶ ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαί εἰσι. μείζων οὖν ἐστιν ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια, ὑπὸ τῶν αγ, βδ εὐθειῶν· καὶ τὰ αεβ, γζδ ἐπίπεδα τμήματα τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων. ὧν αἱ βάσεις μὲν αἱ αε, εβ. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῶν αεβ, γζδ τριγώνων. κοινὰ ἀφῃρήσθω τὰ αεβ, γζδ τρίγωνα. λοιπὴ οὖν ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν αγ, βδ εὐθειῶν. καὶ τὰ αε, εβ, γζ, ζδ, ἐπίπεδα τμήματα, μείζονά ἐστι τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων. ὧν βάσεις μὲν αἱ αε, εβ. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου. τὰ δὲ παραλληλόγραμμα ὧν βάσις μὲν αἱ αε, εβ. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ κυλίνδρῳ, ἴσα ἐστὶ τῷ αγβδ παραλληλογράμμῳ, καὶ τοῦ η χωρίῳ. λοιπὴ ἄρα ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν αγ, βδ εὐθειῶν, μείζων ἐστὶ τοῦ αγβδ παραλληλογράμμου. ἀλλὰ δὴ ἔστω ἔλασσον τὸ η χωρίον τῶν αε, εβ, γζ, ζδ ἐπιπέδων τμημάτων. καὶ τετμήσθω ἑκάστη τῶν αε, εβ, γζ, ζδ περιφερειῶν δίχα κατὰ τὰ θ, κ, λ, μ, σημεῖα· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αθ, θε, εκ, κβ, γλ, λζ, ζμ, μδ. τῶν δὲ αε, εβ, γζ, ζδ ἄρα ἐπιπέδων τμημάτων ἀφαιρεῖται οὐκ ἔλασσον ἢ τὸ ἥμισυ, τὰ αθε, εκβ, γλζ, ζμδ τρίγωνα. τούτου οὖν ἑξῆς γινομένου καταληφθήσεταί τινα τμήματα, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ η χωρίου. καταλελείφθω, καὶ ἔστω τὰ αθ, θε, εκ, κβ, γλ, λζ, ζμ, μδ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα, ὧν βάσις μὲν αἱ αθ, θε, εκ, κβ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζονα ἔσται τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ αε, εβ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν αγ, βδ εὐθειῶν, καὶ τὰ αεβ, γζδ ἐπίπεδα τμήματα, πέρας ἔχει τὸ τοῦ αγβδ παραλληλογράμμου ἐπίπεδον, ἀλλὰ καὶ ἡ συγκειμένη ἐπιφάνεια ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσις μὲν αἱ αθ, θε, εκ, κβ. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου. καὶ τῶν αθεκβ, γλζμδ, εὐθυγράμμων. κοινὰ ἀφῃρήσθω τὰ αθεκβ, γλζμδ εὐθύγραμμα. λοιπὴ ἄρα ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν αγ, βδ εὐθειῶν. καὶ τὰ αθ, θε, εκ, κβ, γλ, λζ, ζμ, μδ ἐπίπεδα τμήματα, μείζονά ἐστι τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων. ὧν βάσις μὲν αἱ αθ, θε, εκ, κβ. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. τὰ δὲ παραλληλόγραμμα, ὧν βάσις μὲν αἱ αθ, θε, εκ, κβ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζονά ἐστι τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσις μὲν αἱ αε, εβ. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. καὶ ἡ ἀποτεμνομένη ἄρα κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια, ὑπὸ τῶν αγ, βδ εὐθειῶν. καὶ τὰ αθ, θε, εκ, κβ, γλ, λζ, ζμ, μδ ἐπίπεδα τμήματα, μείζονά ἐστι τῶν παραλληλογράμμων. ὧν βάσις μὲν αἱ αε, εβ. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου. τὰ δὲ παραλληλόγραμμα ὧν βάσις μὲν αἱ αε, εβ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου, ἴσα ἐστὶ τῷ αγδβ παραλληλογράμμῳ, καὶ τῷ η χωρίῳ. καὶ ἡ ἀποτεμνομένη ἄρα κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια, ὑπὸ τῶν αγ, βδ εὐθειῶν. καὶ τὰ αθ, θε, εκ, κβ, γλ, λζ, ζμ, μδ ἐπίπεδα τμήματα, μείζονά ἐστι τοῦ αγβδ παραλληλογράμμου, καὶ τοῦ η χωρίου. ἀφαιρεθέντα δὲ τὰ αθ, θε, εκ, κβ, γλ, λζ, ζμ, μδ τμήματα τοῦ η χωρίου ἐλάσσονα.

λοιπὴ

λοιπὴ ἄρα ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν αγ, βδ εὐθειῶν, μείζων ἐστὶ τοῦ αγβδ παραλληλογράμμου.

Ἐὰν ἐν ἐπιφανείᾳ κυλίνδρου τινὸς ὀρθοῦ δύο εὐθεῖαι ὦσιν, ἀπὸ δὲ τῶν περάτων τῶν εὐθειῶν ἀχ- ιβ
θῶσιν τινὲς ἐπιψαύουσαι τῶν κύκλων, αἵ εἰσι βάσεις τοῦ κυλίνδρου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῶν οὖσαι, καὶ συμπίπτωσι, τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπό τε τῶν ἐπιψαυουσῶν καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου, μείζονα ἔσται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τῆς μεταξὺ τῶν εὐθειῶν τῶν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. ἔστω κυλίνδρου τινὸς ὀρθοῦ βάσις ὁ αβγ κύκλος, καὶ ἔστωσαν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ δύο εὐθεῖαι, ὧν πέρατα τὰ αγ. ἀπὸ δὲ τῶν αγ ἤχθωσαν ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι. καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ η. νοείσθωσαν δὲ καὶ ἐν τῇ ἑτέρᾳ βάσει τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τῶν περάτων ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ εὐθεῖαι ἠγμέναι ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου. δεικτέον ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν ἐπιψαυουσῶν, καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου, μείζονά ἐστι τῆς κατὰ τὴν αβγ περιφέρειαν ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. ἤχθω γὰρ ἡ εζ ἐπιψαύουσα, καὶ ἀπὸ τῶν εζ σημείων ἤχθωσαν τινὲς εὐθεῖαι παρὰ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου, ἕως τῆς ἐπιφανείας τῆς ἑτέρας βάσεως. τὰ δὴ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν αη, ηγ, καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου, μείζονά ἐστι τῶν παραλληλογράμμων τῶν περιεχομένων ὑπό τε τῶν αε, εζ, ζγ. καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου. ἐπεὶ γὰρ αἱ εη, ηζ, τῆς εζ μείζους εἰσί, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ αε, ζγ. ὅλαι ἄρα αἱ ηα, ηγ, μείζους εἰσὶ τῶν αε, εζ, ζγ. ᾧ δὴ μείζονά ἐστιν, ἔστω τὸ κ χωρίον. τοῦ δὴ κ χωρίου τὸ ἥμισυ ἤτοι μεῖζόν ἐστι τῶν σχημάτων τῶν περιεχομένων ὑπὸ τῶν αε, εζ, ζγ εὐθειῶν, καὶ τῶν αδβ, βθγ περιφερειῶν, ἢ οὔ. ἔστω πρότερον μεῖζον. τῆς δὲ ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς αε, εζ, ζγ. καὶ τοῦ αεζγ τραπεζίου, καὶ τοῦ κατεναντίον αὐτοῦ ἐν τῇ ἑτέρᾳ βάσει τοῦ κυλίνδρου, πέρας ἐστὶν ἡ περίμετρος τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ κατὰ τὴν αγ. ἔστι δὲ καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἐκ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, τῆς κατὰ τὴν αβγ περιφέρειαν. καὶ τῶν τμημάτων τοῦ τε αβγ καὶ τοῦ ἀπεναντίον αὐτοῦ, πέρας ἡ αὐτὴ περίμετρος. αἱ οὖν εἰρημέναι ἐπιφάνειαι τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαι τυγχάνουσιν, ὅπερ ἐστὶν ἐν ἐπιπέδῳ. καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι. καὶ τινὰ μὲν περιλαμβάνει ἡ ἑτέρα αὐτῶν, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχουσιν. ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ περιλαμβανομένη. ἀφαιρεθέντων οὖν κοινῶν τοῦ τε αβγ τμήματος, καὶ τοῦ ἀπεναντίον αὐτοῦ, ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου, ἡ κατὰ τὴν αβγ περιφέρειαν τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας, ἔκ τε τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς αε, εζ, ζγ. καὶ τῶν σχημάτων τῶν αεβ, βζγ. καὶ τῶν ἀπεναντίον αὐτῶν. αἱ δὲ τῶν εἰρημένων σχημάτων, ἐλάττους εἰσὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς αη, ηγ. μετὰ γὰρ τοῦ κ μείζονος ὄντος τῶν σχημάτων ἴσαι ἦσαν αὐτοῖς. δῆλον οὖν ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν αη, γη. καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου, μείζονά ἐστι τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τῆς κατὰ τὴν αβγ περιφέρειαν. εἰ δὲ μή ἐστι μεῖζον τὸ ἥμισυ τοῦ κ χωρίου τῶν εἰρημένων σχημάτων, ἀχθήσονται εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου σχήματος, ὥστε γενέσθαι τὰ περιλειπόμενα σχήματα ἐλάσσονα τοῦ ἡμίσεος τοῦ κ. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς ἔμπροσθεν δειχθήσεται. τούτων δὴ δεδειγμένων, φανερὸν ἐπὶ μὲν τῶν προειρημένων, ὅτι ἐὰν εἰς κῶνον ἰσοσκελῆ πυραμὶς ἐγγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἐλάσσων ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. ἕκαστον γὰρ τῶν περιεχόντων τὴν πυραμίδα τριγώνων ἐλάσσων ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, τῆς μεταξὺ τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν. ὥστε καὶ ὅλη ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, χωρὶς τῆς βάσεως. καὶ ὅτι ἐὰν περὶ κῶνον ἰσοσκελῆ πυραμὶς περιγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου χωρὶς τῆς βάσεως, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐκείνῳ. φανερὸν δὲ ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων, ὅτι τε ἐὰν εἰς κύλινδρον ὀρθὸν πρίσμα ἐγγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος, ἡ ἐκ τῶν παραλληλογράμμων συγκειμένη, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῆς βάσεως. ἔλασσον γὰρ ἕκαστον παραλληλόγραμμον τοῦ πρίσματος ἐστὶ τῆς καθ' αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας. καὶ ὅτι ἐὰν περὶ κύλινδρον ὀρθὸν πρίσμα περιγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος ἡ ἐκ τῶν

παραλληλογράμμων συγκειμένη, μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῆς βάσεως.

ιγ Παντὸς κυλίνδρου ὀρθοῦ ἡ ἐπιφάνεια χωρὶς τῆς βάσεως, ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου. ἔστω κυλίνδρου τινὸς ὀρθοῦ βάσις ὁ α κύκλος. καὶ ἔστω τῇ μὲν διαμέτρῳ τοῦ α κύκλου ἴση, ἡ γδ. τῇ δὲ πλευρᾷ τοῦ κυλίνδρου ἡ εζ. ἐχέτω δὲ μέσον λόγον τῶν δγ, εζ, ἡ η, καὶ κείσθω κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ η, ὁ β. δεικτέον ὅτι ὁ β κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου, χωρὶς τῆς βάσεως. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσος, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον εἰ δυνατὸν ἐλάσσων. δύο δὴ μεγεθῶν ὄντων ἀνίσων, τῆς τε ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, καὶ τοῦ β κύκλου, δυνατόν ἐστιν εἰς τὸν β κύκλον ἰσόπλευρον πολύγωνον ἐγγράψαι, καὶ ἄλλο περιγράψαι. ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὸν β κύκλον. νοείσθω δὴ περιγεγραμμένον, καὶ ἐγγεγραμμένον. καὶ περὶ τὸν α κύκλον περιγεγράφθω εὐθύγραμμον, ὅμοιον τῷ περὶ τὸν β περιγεγραμμένῳ. καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τοῦ εὐθυγράμμου πρίσμα. ἔσται δὴ περὶ τὸν κύλινδρον περιγεγραμμένον. ἔστω δὴ καὶ τῇ περιμέτρῳ τοῦ εὐθυγράμμου, τοῦ περὶ τὸν α κύκλον, ἴση ἡ κδ. καὶ τῇ κδ ἴση ἡ λζ. τῆς δὲ γδ ἡμίσεια ἔστω ἡ γτ. ἔσται δὴ τὸ κδτ τρίγωνον, ἴσον τῷ περιγεγραμμένῳ εὐθυγράμμῳ περὶ τὸν α κύκλον. ἐπειδὴ βάσιν μὲν ἔχει τῇ περιμέτρῳ ἴσην. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α κύκλου. τὸ δὲ ελ παραλληλόγραμμον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος, τοῦ περὶ τὸν κύλινδρον περιγεγραμμένου. ἐπειδὴ περιέχεται ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῆς ἴσης τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος. κείσθω δὴ τῇ εζ ἴση ἡ ερ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ζρλ τρίγωνον, τῷ ελ παραλληλογράμμῳ, ὥστε καὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ εὐθύγραμμα τὰ περὶ τοὺς α, β κύκλους περιγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον τὰ εὐθύγραμμα, ὅνπερ αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει. ἕξει ἄρα τὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ περὶ τὸν β κύκλον εὐθύγραμμον, λόγον, ὃν ἡ τδ πρὸς τὴν η δυνάμει. αἱ γὰρ τδ, η, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ἐκ τοῦ κέντρου. ἀλλ' ὃν ἔχει λόγον ἡ τδ πρὸς τὴν η δυνάμει, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἡ τδ πρὸς ρζ μήκει. ἡ γὰρ η τῶν τδ, ρζ μέση ἐστὶν ἀνὰ λόγον, διὰ τὸ καὶ τῶν γδ, εζ. πῶς δὲ τοῦτο; ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν δτ τῇ τγ. ἡ δὲ ρε τῇ εζ. διπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ γδ τῆς τδ. καὶ ἡ ρζ, τῆς ρε. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ δγ πρὸς δτ, οὕτως ἡ ρζ πρὸς ζε. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν γδ, εζ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τδ, ρζ. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν γδ, εζ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς η. καὶ τῷ ὑπὸ τῶν τδ, ρζ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς η. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ τδ πρὸς η, οὕτως ἡ η πρὸς ρζ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τδ πρὸς ρζ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς τδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς η. ἐὰν γὰρ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνὰ λόγον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας εἶδος, τὸ ὅμοιον, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ τδ πρὸς ρζ μήκει, τοῦτον ἔχει τὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ ρλζ. ἐπειδήπερ ἴσαι εἰσὶν αἱ κδ, λζ. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον, ὅνπερ τὸ τκδ τρίγωνον πρὸς τὸ ρζλ τρίγωνον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ζλρ τρίγωνον, τῷ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένῳ εὐθυγράμμῳ.

θυγράμμῳ. ὥστε καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περὶ τὸν α κύλινδρον περιγεγραμμένου, τῷ εὐθυγράμμῳ τῷ περὶ τὸν β κύκλον ἴση ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν β κύκλον, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ κύκλῳ, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ α κυλίνδρου πρὸς τὸν β κύκλον, ἐλάσσονα λόγον ἕξει καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περὶ τὸν κύλινδρον, περιγεγραμμένου πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ β τῷ κύκλῳ γεγραμμένον, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὸν β κύκλον· καὶ ἐναλλάξ, ὅπερ ἀδύνατον. ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν κύλινδρον, μείζων οὖσα δέδεικται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. τὸ δὲ γεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τῷ β κύκλῳ, ἔλασσον ἐστὶ τοῦ β κύκλου. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὁ β κύκλος ἐλάσσων τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. ἔστω δὲ, εἰ δυνατὸν, μείζων. πάλιν δὲ νοείσθω εἰς τὸν β κύκλον εὐθύγραμμον ἐγγεγραμμένον, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸν β κύκλον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν α κύκλον πολύγωνον, ὅμοιον τῷ εἰς τὸν β κύκλον ἐγγεγραμμένῳ. καὶ πρίσμα ἀναγεγράφθω ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου. καὶ πάλιν ἡ κδ ἴση ἔστω τῇ περιμέτρῳ τοῦ εὐθυγράμμου, τοῦ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένου. καὶ ἡ ζλ ἴση αὐτῇ ἔστω. ἔσται δὴ τὸ μὲν κτδ τρίγωνον μεῖζον τοῦ εὐθυγράμμου, τοῦ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένου. διότι βάσιν μὲν ἔχει τὴν περίμετρον αὐτοῦ. ὕψος δὲ μεῖζον τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ πλευρὰς, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου ἀγομένης καθέτου. τὸ δὲ ελ παραλληλόγραμμον ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος, τῇ ἐκ τῶν παραλληλογράμμων συγκειμένῃ, διότι περιέχεται ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῆς ἴσης τῇ περιμέτρῳ τοῦ εὐθυγράμμου, ὅ ἐστι βάσις τοῦ πρίσματος. ὥστε καὶ τὸ ρλζ τρίγωνον, ἴσον ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ εὐθύγραμμα τὰ ἐν τοῖς α, β κύκλοις ἐγγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων αὐτῶν δυνάμει. ἔχει δὲ καὶ τὰ κτδ, ζρλ τρίγωνα πρὸς ἄλληλα, λόγον, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων δυνάμει. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ β ἐγγεγραμμένον. καὶ τὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ λζρ τρίγωνον. ἔλασσον δέ ἐστι τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, τοῦ κτδ τριγώνου. ἔλασσον ἄρα καὶ τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ β κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, τοῦ ζρλ τριγώνου, ὥστε καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος τοῦ ἐν τῷ κυλίνδρῳ ἐγγεγραμμένου. ὅπερ ἀδύνατον. ἐπεὶ γὰρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον περὶ τὸν β κύκλον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἢ ὁ β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου· καὶ ἐναλλάξ. μεῖζον δέ ἐστι τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸν β κύκλον τοῦ β κύκλου. μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ β κύκλῳ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. ὥστε καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος, οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ὁ β κύκλος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδ᾽ ἐλάσσων, ἴσος ἄρα ἐστί.

Παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς χωρὶς τῆς βάσεως, ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον ιδ
λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου, καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ κώνου. ἔστω κῶνος ἰσοσκελὴς, οὗ βάσις ὁ α κύκλος. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου ἔστω ἡ γ. τῇ δὲ πλευρᾷ τοῦ κώνου ἔστω ἴση ἡ δ. τῶν δὲ γ, δ μέση ἀνὰ λόγον ἡ ε. ὁ δὲ β κύκλος ἐχέτω τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ε ἴσην. λέγω ὅτι ὁ β κύκλος ἐστὶν ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, χωρὶς τῆς βάσεως. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσος, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον ἐλάσσων. ἔστι δὴ δύο μεγέθη ἄνισα, ἥτε ἐπιφάνεια τοῦ κώνου, καὶ ὁ β κύκλος. καὶ μείζων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου. δυνατὸν ἄρα εἰς τὸν β κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγράψαι, καὶ ἄλλο περιγράψαι ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν β κύκλον. νοείσθω δὴ καὶ περὶ τὸν α κύκλον πολύγωνον περιγεγραμμένον, ὅμοιον τῷ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένῳ. καὶ ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν α κύκλον περιγεγραμμένου πολυγώνου πυραμὶς ἀνεστάτω ἀναγεγραμμένη, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐστι τὰ πολύγωνα τὰ περὶ τοὺς α, β κύκλους περιγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει πρὸς ἀλλήλας· τουτέστιν, ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς

β γ ε δ

ε δυνάμει, τουτέστιν ἡ γ πρὸς δ μήκει. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ γ πρὸς δ μήκει, τοῦτον ἔχει τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον περὶ τὸν α κύκλον, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸν κῶνον. ἡ μὲν γὰρ γ ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου καθέτῳ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου. ἡ δὲ δ τῇ πλευρᾷ τοῦ κώνου. κοινὸν δὲ ὕψος ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου, πρὸς τὰ ἡμίση τῶν ἐπιφανειῶν. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν α κύκλον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν β κύκλον. καὶ αὐτὸ τὸ εὐθύγραμμον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος περιγεγραμμένης περὶ τὸν κῶνον. ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τῷ εὐθυγράμμῳ τῷ περὶ τὸν β κύκλον, περιγεγραμμένῳ. ἐπεὶ οὖν ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν β κύκλον, περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν β κύκλον, ἐλάσσονα λόγον ἕξει ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τῆς περὶ τὸν κῶνον περιγεγραμμένης, πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ β κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν β κύκλον. ὅπερ ἀδύνατον. ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος μείζων οὖσα δέδεικται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τῷ β κύκλῳ, ἔλασσον ἔσται τοῦ β κύκλου. οὐκ ἄρα ὁ β κύκλος ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ μείζων. εἰ γὰρ δυνατὸν ἐστίν, ἔστω μείζων. πάλιν δὲ νοείσθω εἰς τὸν β κύκλον πολύγωνον ἐγγεγραμμένον, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, τοῦ ὃν ἔχει ὁ β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου. καὶ εἰς τὸν α κύκλον νοείσθω ἐγγεγραμμένον πολύγωνον, ὅμοιον τῷ εἰς τὸν β κύκλον ἐγγεγραμμένῳ. καὶ ἀναγεγράφθω ἀπ' αὐτοῦ πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐστιν τὰ ἐν τοῖς α, β ἐγγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει πρὸς ἀλλήλας, τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, καὶ ἡ γ πρὸς τὴν δ μήκει. ἡ δὲ γ πρὸς τὴν δ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον. ἡ γὰρ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α κύκλου πρὸς πλευρὰν τοῦ κώνου, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀγομένη κάθετος ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου, κάθετον ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ β ἐγγεγραμμένον, ἢ αὐτὸ τὸ πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος, τοῦ ἐν τῷ β πολυγώνου ἐγγεγραμμένου. ἐλάσσονα δὲ λόγον ἔχει τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἢ ὁ β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου. πολλῷ ἄρα τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς ἐν τῷ κώνῳ ἐγγεγραμμένης ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου, ὅπερ ἀδύνατον. τὸ μὲν γὰρ περιγεγραμμένον πολύγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ β κύκλου. ἡ δὲ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τῆς ἐν τῷ κώνῳ, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, οὐκ, ὅτι οὐδὲ μείζων ἐστὶν ὁ κύκλος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων, ἴσος ἄρα.

ιε Παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν βάσιν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως τοῦ κώνου. ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, οὗ βάσις ὁ α κύκλος. ἔστω δὲ τῇ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α, ἴση ἡ β, τῇ δὲ πλευρᾷ τοῦ κώνου, ἡ γ. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν α κύκλον, καὶ ἡ γ πρὸς τὴν β. εἰλήφθω γὰρ τῶν β, γ μέση ἀνὰ λόγον ἡ ε, καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ δ, ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ε. ὁ δ ἄρα κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. τοῦτο γὰρ ἐδείχθη ἐν τῷ πρὸ τούτου. ἐδείχθη δὲ ὁ δ κύκλος πρὸς τὸν α κύκλον, λόγον ἔχων τὸν αὐτόν, τῷ τῆς γ πρὸς β μήκει. ἑκάτερος γὰρ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ε πρὸς β δυνάμει. διὰ τὸ τοὺς κύκλους πρὸς ἀλλήλους εἶναι, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα. ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων. εἰ γὰρ αἱ διάμετροι, καὶ τὰ ἡμίσυ, τουτέστιν αἱ ἐκ τῶν κέντρων, ταῖς δὲ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσίν, αἱ β, ε, δῆλον οὖν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου, πρὸς τὸν α κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ γ πρὸς β μήκει.

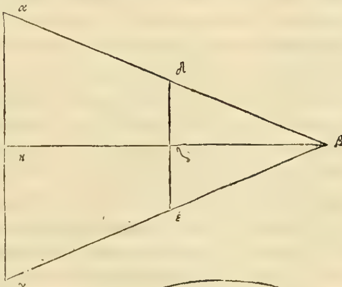
δ

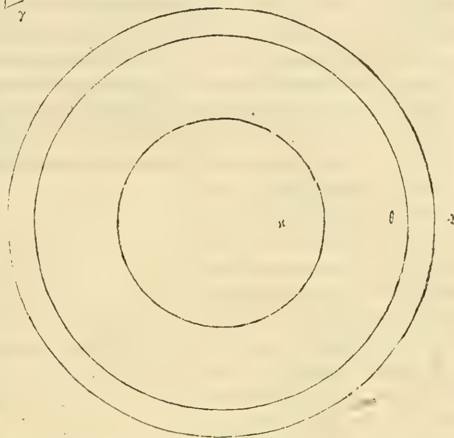
α

β ε γ

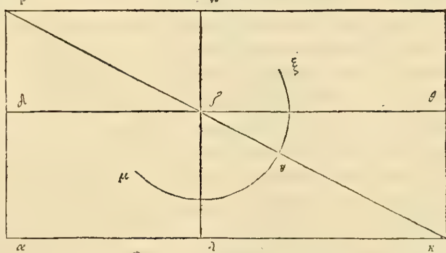
Εὰν

Ἐὰν κῶνος ἰσοσκελὴς ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς τε πλευρᾶς τοῦ κώνου, τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, καὶ τῆς ἴσης ἀμφοτέραις ταῖς ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων, τῶν ἐν τοῖς παραλλήλοις ἐπιπέδοις. ἔστω κῶνος, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον ἴσον τῷ α β γ. καὶ τετμήσθω παραλλήλῳ ἐπιπέδῳ τῇ βάσει, καὶ ποιείτω τομὴν τὴν δ ε. ἄξων δὲ τοῦ κώνου ἔστω β η. κύκλος δέ τις ἐκκείσθω, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέση ἀνὰ λόγον ἐστὶ τῆς τε α δ, καὶ συναμφοτέρου τῆς δ ζ, η α. ἔστω δὲ κύκλος ὁ θ. λέγω ὅτι ὁ θ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, τῇ μεταξὺ τῶν δ ε, α γ. ἐκκείσθωσαν γὰρ κύκλοι οἱ λ, κ. καὶ τοῦ μὲν κ κύκλου ἡ ἐκ τοῦ κέντρου, δυνάσθω τὸ ὑπὸ β δ ζ. τοῦ δὲ λ, ἡ ἐκ τοῦ κέντρου, δυνάσθω τὸ ὑπὸ β α η. ὁ μὲν ἄρα λ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ α β γ κώνου. ὁ δὲ κ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ ε β. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν β α, α η, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν β δ, δ ζ, καὶ τῷ ὑπὸ τῆς α δ, καὶ συναμφοτέρου τῆς δ ζ, α η, διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν δ ζ τῇ α η, ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ α β, α η δύναται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ λ κύκλου. τὸ δὲ ὑπὸ β δ, δ ζ δύναται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κ κύκλου. τὸ δὲ ὑπὸ τῆς δ α, καὶ συναμφοτέρου τῆς δ ζ α η δύναται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ θ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ λ κύκλου, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ἐκ τῶν κέντρων τῶν κ, θ κύκλων. ὥστε καὶ ὁ λ κύκλος ἴσος ἐστὶ τοῖς κ θ κύκλοις. ἀλλ' ὁ μὲν λ ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ β α γ κώνου. ὁ δὲ κ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ β ε κώνου. λοιπὴ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἡ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν δ ε, α γ, ἴση ἐστὶ τῷ θ κύκλῳ. ις





Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ β α η, καὶ διάμετρος αὐτοῦ ἔστω ἡ β η, τετμήσθω ἡ β α πλευρὰ ὡς ἔτυχεν ἐπὶ τὸ δ, καὶ διὰ τοῦ δ ἤχθω παράλληλος τῇ α η, ἡ δ θ. διὰ δὲ τοῦ ζ τῇ β α, ἡ κ λ. λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ β α η ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ β δ ζ, καὶ ὑπὸ δ α, καὶ συναμφοτέρου τῆς δ ζ α η. ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ὑπὸ β α η, ὅλον ἐστὶ τὸ β η. τὸ δὲ ὑπὸ β δ ζ, τὸ β ζ. τὸ δὲ ὑπὸ δ α, καὶ συναμφοτέρου τῆς δ ζ α η, ὁ μ ν ξ γνώμων. τὸ μὲν γὰρ ὑπὸ δ α η, ἴσον ἐστὶ τῷ κ η. διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ κ θ παραπλήρωμα, τῷ δ α παραπληρώματι. τὸ δὲ ὑπὸ δ α, δ ζ, τῷ δ λ. ὅλον ἄρα τὸ β η, ὅπερ ἐστὶ τὸ ὑπὸ β α η, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ β δ ζ, καὶ τῷ μ ν ξ γνώμονι, ὅς ἐστιν ἴσος τῷ ὑπὸ δ α, καὶ συναμφοτέρου τῆς α η δ ζ.



οἱ κῶνοι οἱ ἴσον ὕψος ἔχοντες, τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς βάσεσι. καὶ οἱ ἴσας ἔχοντες βάσεις, τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον τοῖς ὕψεσιν. ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παρὰ τὴν βάσιν, ἔστιν ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, ὡς ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα. τοῖς δὲ κυλίνδροις ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν οἱ κῶνοι, οἱ ἔχοντες τὰς αὐτὰς βάσεις τοῖς κυλίνδροις. καὶ τῶν ἴσων κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ὧν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσί. καὶ οἱ κῶνοι ὧν αἱ διάμετροι τῶν βάσεων, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι τοῖς ἄξοσι, τουτέστι τοῖς ὕψεσι, πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων. ταῦτα δὲ πάντα ὑπὸ τῶν πρότερον ἀποδέδεικται.

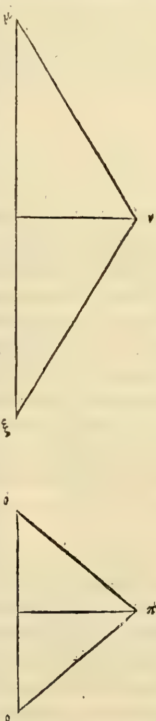
ιζ Ἐὰν ὦσι δύο κῶνοι ἰσοσκελεῖς, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἢ τῇ τοῦ ἑτέρου βάσει, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου κάθετος ἀγομένη τῷ ὕψει ἴση ᾖ, ἴσοι ἔσονται οἱ κῶνοι. ἔστωσαν δύο κῶνοι ἰσοσκελεῖς, οἱ αβγ, δεζ. καὶ τοῦ αβγ ἡ μὲν βάσις ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δεζ. τὸ δὲ ὕψος τὸ αη, ἴσον ἔστω τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως τοῦ θ, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου, οἷον ἐπὶ τὴν δε καθέτῳ ἠγμένῃ τῇ κθ. λέγω ὅτι ἴσοι εἰσὶν οἱ κῶνοι. ἐπεὶ γάρ ἴση ἐστὶν ἡ βάσις τοῦ αβγ, τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δεζ, τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὡς ἄρα ἡ τοῦ βαγ βάσις, πρὸς τὴν τοῦ δεζ βάσιν, οὕτως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δεζ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ δεζ. ἀλλ' ὡς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ δθ πρὸς τὴν θκ. ἐδείχθη γὰρ τοῦτο, ὅτι παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν βάσιν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τουτέστιν ἡ δε πρὸς δθ. ὡς δὲ ἡ εδ πρὸς θδ, οὕτως ἡ δθ πρὸς θκ. ἰσογώνια γάρ ἐστι τὰ τρίγωνα. ἴση δέ ἐστιν ἡ θκ τῇ αη. ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ βαγ, πρὸς τὴν βάσιν τοῦ δεζ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ δεζ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ αβγ. τῶν αβγ, δεζ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ βαγ, τῷ δεζ κώνῳ.

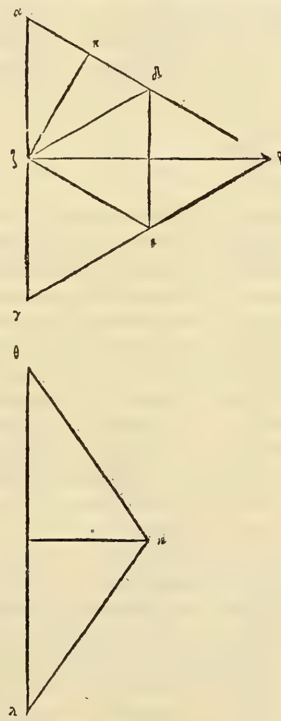
ιη Παντὶ ῥόμβῳ ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκειμένῳ, ἴσος ἐστὶ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἑτέρου κώνου τῶν περιεχόντων τὸν ῥόμβον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἑτέρου κώνου καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ ἑτέρου κώνου. ἔστω ῥόμβος ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκείμενος ὁ αβγδ. οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν βγ κύκλος. ὕψος δὲ τὸ αδ. ἐκκείσθω δέ τις ἕτερος ὁ ηθκ, τὴν μὲν βάσιν ἔχων τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ αβγ κώνου ἴσην, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ δ σημείου καθέτῳ ἐπὶ τὴν αβ, ἢ τὴν ἐπ' εὐθείας αὐτῇ ἠγμένην. ἔστω δὲ ἡ δζ. τὸ δὲ ὕψος τοῦ θηκ κώνου, ἔστω τὸ θλ. ἴσον δὴ ἐστὶ τὸ θλ τῇ δζ. λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ κῶνος τῷ ῥόμβῳ. ἐκκείσθω γὰρ ἕτερος κῶνος ὁ μνξ, τὴν μὲν βάσιν ἔχων ἴσην τῇ βάσει τοῦ αβγ κώνου, τὸ δὲ ὕψος

ἴσον

ἴσον τῇ αδ. καὶ ἔστω τὸ ὕψος αὐτοῦ τὸ νο. ἐπεὶ οὖν ἡ νο, τῇ αδ ἴση ἐστὶν, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ νο πρὸς δε, οὕτως ἡ αδ πρὸς δε. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ αδ πρὸς δε, οὕτως ὁ αβγδ ῥόμβος πρὸς τὸν βγδ κῶνον. ὡς δὲ ἡ νο πρὸς τὴν δε, οὕτως ὁ μνξ κῶνος πρὸς τὸν βγδ κῶνον, διὰ τὸ τὰς βάσεις αὐτῶν εἶναι ἴσας. ὡς ἄρα ὁ μνξ κῶνος, πρὸς τὸν βγδ κῶνον· οὕτως ὁ αβγδ ῥόμβος, πρὸς τὸν βγδ κῶνον. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μνξ, τῷ αβγδ ῥόμβῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αβγ, ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ηθκ. ὡς ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αβγ, πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ βάσις τοῦ ηθκ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ μνξ. ἡ γὰρ βάσις τοῦ αβγ ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ μνξ. ὡς δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αβγ πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ αβ πρὸς τὴν βε, τουτέστιν ἡ αδ πρὸς δζ. ὅμοια γὰρ τὰ τρίγωνα. ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ ηθκ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ μνξ, οὕτως ἡ αδ πρὸς δζ. ἴση δὲ ἡ μὲν αδ τῇ νο, ὑπέκειτο γάρ. ἡ δὲ δζ τῇ θλ. ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ ηθκ, πρὸς τὴν βάσιν τοῦ μνξ, οὕτως τὸ νο ὕψος πρὸς τὸ θλ. τῶν ηθκ, μνξ ἄρα κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι ἄρα εἰσὶν οἱ κῶνοι. ἐδείχθη δὲ ὁ μνξ ἴσος τῷ αβγδ ῥόμβῳ, καὶ ὁ ηθκ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ αβγδ ῥόμβῳ.

Ἐὰν κῶνος ἰσοσκελὴς ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, ἀπὸ δὲ τοῦ γενομένου κύκλου, κῶνος ἀναγραφῇ κορυφὴν ἔχων τὸ κέντρον τῆς βάσεως· ὁ δὲ γενόμενος ῥόμβος ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ὅλου κώνου, τῷ περιλείμματι ἴσος ἔσται κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. ἔστω κῶνος ἰσοσκελὴς ὁ αβγ. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῇ βάσει, καὶ ποιείτω τομὴν τὴν δε. κέντρον δὲ τῆς βάσεως ἔστω τὸ ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν δε κύκλου, κῶνος ἀναγεγράφθω κορυφὴν ἔχων τὸ ζ. ἔσται δὴ ῥόμβος ὁ βδζε, ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκείμενος. ἐκκείσθω δή τις κῶνος ὁ ηθλ. οὗ ἡ μὲν βάσις ἔστω ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν δε, αγ. τὸ δὲ ὕψος ἀχθείσης ἀπὸ τοῦ ζ σημείου καθέτου, ἐπὶ τὴν αβ τῆς ζη. ἔστω ἴσον τῇ ζη. λέγω ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ αβγ κώνου νοηθῇ ἀφῃρημένος ὁ βδζε ῥόμβος, τῷ περιλείμματι ἴσος ἔσται ὁ θηλ κῶνος. ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο κῶνοι οἱ μνξ, οπρ. ὥστε τὴν μὲν τοῦ μνξ βάσιν ἴσην εἶναι τῇ τοῦ αβγ κώνου τῇ ἐπιφανείᾳ, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ζη. διὰ δὴ τοῦτο ἴσος ἐστὶν ὁ μνξ κῶνος τῷ αβγ κώνῳ. ἐὰν γὰρ ὦσι δύο κῶνοι ἰσοσκελεῖς, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου κώνου ἐπιφάνεια ἴση ᾖ τῇ τοῦ ἑτέρου βάσει. ἔτι δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου ἀγομένη κάθετος, τῷ ὕψει ἴση, ἴσοι ἔσονται οἱ κῶνοι. τὴν δὲ τοῦ οπρ κώνου βάσιν ἴσην εἶναι τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δβε κώνου, ὕψος δὲ τῇ ζη. διὰ δὴ τοῦτο ἴσος ἐστὶν ὁ οπρ κῶνος, τῷ βδζε ῥόμβῳ. τοῦτο γὰρ προαπεδείχθη. ἐπεὶ δὲ ἡ τοῦ αβγ κώνου ἐπιφάνεια σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ βδε ἐπιφανείας, καὶ τῆς μεταξὺ τῶν δε, αγ. ἀλλ' ἡ μὲν τοῦ αβγ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ μνξ κώνου. ἡ δὲ τοῦ δβε ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ οπρ. ἡ δὲ μεταξὺ τῶν δε, αγ, ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ θηλ. ἡ ἄρα τοῦ μνξ βάσις ἴση ἐστὶ βάσεσι τῶν θηλ, οπρ, καὶ εἰσὶν οἱ κῶνοι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. ἴσος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ μνξ κῶνος τοῖς θηλ, οπρ κώνοις. ἀλλ' ὁ μὲν μνξ κῶνος





κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ α β γ κώνῳ. ὁ δὲ π ο ρ, τῷ β δ ε ζ ῥόμβῳ. λοιπὸς ἄρα ὁ θ κ λ κῶνος, τῷ περιλέμματι ἴσος ἐστίν.

κ Ἐὰν ῥόμβου ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκειμένου, ὁ ἕτερος κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, ἀπὸ δὲ τοῦ γενομένου κύκλου κῶνος ἀναγραφῇ, κορυφὴν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ ἑτέρῳ κώνῳ· ἀπὸ δὲ τοῦ ὅλου ῥόμβου ὁ γενόμενος ῥόμβος ἀφαιρεθῇ, τῷ περιλέμματι ἴσος ἔσται ὁ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, ὕψος δὲ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἑτέρου κώνου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ ἑτέρου κώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. ἔστω ῥόμβος ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκείμενος ὁ α β γ δ. καὶ τμηθήτω ὁ ἕτερος κῶνος, ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῇ βάσει, καὶ ποιείτω τομὴν τὴν ε ζ. ἀπὸ δὲ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ε ζ κύκλου, κῶνος ἀναγεγράφθω τὴν κορυφὴν ἔχων τὸ δ σημεῖον. ἔσται δὴ γεγονὼς ῥόμβος ὁ ε β δ ζ. καὶ νοείσθω ἀφῃρημένος ἀπὸ τοῦ ὅλου ῥόμβου. ἐκκείσθω δέ τις κῶνος ὁ θ κ λ, τὴν μὲν βάσιν ἴσην ἔχων τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν α γ, ε ζ. τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ δ σημείου καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν β α, ἢ τὴν ἐπ' εὐθείας αὐτῇ. λέγω ὅτι ὁ θ κ λ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ περιλέμματι. ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο κῶνοι, οἱ μ ν ξ, ο π ρ. καὶ ἡ μὲν βάσις τοῦ μ ν ξ κώνου ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ α β γ. τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ δ η. διὰ δὴ τὰ προδειχθέντα, ἴσος ἐστὶν ὁ μ ν ξ κῶνος τῷ α β γ δ ῥόμβῳ. τοῦ δὲ ο π ρ κώνου, ἡ μὲν βάσις ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ε β ζ κώνου. τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ δ κ. ὁμοίως δὴ ἴσος ἐστὶν ὁ ο π ρ κῶνος, τῷ ε β δ ζ ῥόμβῳ. ἐπεὶ δὲ ὁμοίως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ α β γ κώνου, σύγκειται ἔκ τε τοῦ ε β ζ, καὶ τῆς μεταξὺ τῶν ε ζ α γ. ἀλλὰ ἡ μὲν τοῦ α β γ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ μ ν ξ. ἡ δὲ τοῦ ε β ζ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ο ρ π κώνου. ἡ δὲ μεταξὺ τῶν ε ζ α γ ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ θ κ λ, ἡ ἄρα βάσις τοῦ μ ν ξ ἴση ἐστὶ ταῖς βάσεσι τῶν ο π ρ, θ κ λ. καὶ εἰσὶν οἱ κῶνοι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. καὶ ὁ μ ν ξ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τοῖς θ κ λ, ο π ρ κώνοις. ἀλλ' ὁ μὲν μ ν ξ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ α β γ δ ῥόμβῳ. ὁ δὲ ο π ρ κῶνος τῷ ε β δ ζ ῥόμβῳ. λοιπὸς ἄρα ὁ κῶνος ὁ θ κ λ, ἴσος ἐστὶ τῷ περιλέμματι τῷ λοιπῷ.

κα Ἐὰν εἰς κύκλον πολύγωνον ἐγγραφῇ ἀρτιόπλευρόν τε καὶ ἰσόπλευρον, καὶ διαχθῶσιν εὐθεῖαι ἐπιζευγνύουσαι τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου, ὥστε αὐτὰς παραλλήλους εἶναι μιᾷ ὁποιᾳοῦν τῶν ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινουσῶν, αἱ ἐπιζευγνύουσαι πᾶσαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον τοῦτον ἔχουσι τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ὑποτείνουσα τὰς μιᾷ ἐλάσσονας τῶν ἡμίσεων, πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου. ἔστω κύκλος ὁ α β γ δ, καὶ ἐν αὐτῷ πολύγωνον ἐγγεγράφθω τὸ α ε ζ β η θ γ μ ν δ λ κ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ε κ, ζ λ, β δ, η ν, θ μ. δῆλον δὴ ὅτι παράλληλοί εἰσι τῇ ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινούσῃ. λέγω οὖν, ὅτι αἱ εἰρημέναι πᾶσαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον τὴν α γ, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι τῷ τῆς γ ε πρὸς ε α. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ζ κ, λ β, η δ, θ ν. παράλληλος ἄρα ἡ μὲν ζ κ τῇ ε α, ἡ δὲ β λ τῇ ζ η. καὶ ἔτι ἡ μὲν δ η τῇ β λ, ἡ δὲ θ ν τῇ δ η. καὶ ἡ γ μ τῇ θ ν. καὶ ἐπεὶ δύο παράλληλοί εἰσιν αἱ ε α, κ ζ, καὶ δύο διηγμέναι εἰσὶν αἱ ε κ, α ο. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ

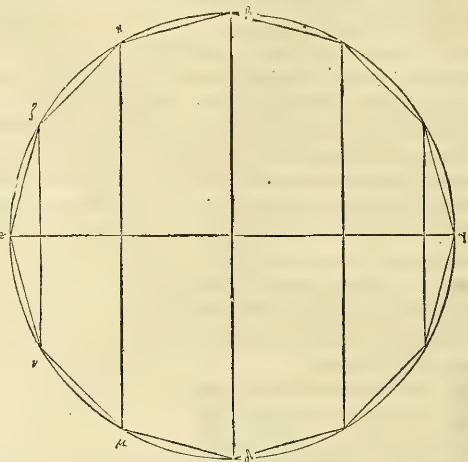
ε ξ

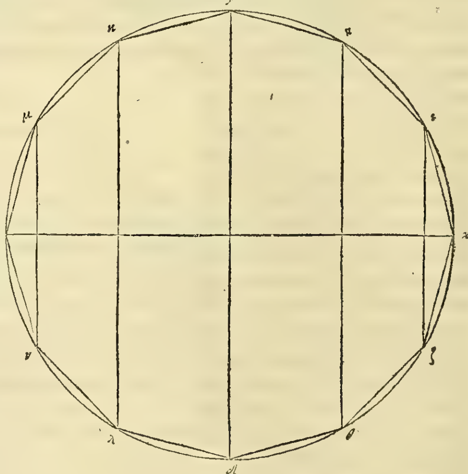
εξ, πρὸς ξα, ἡ κξ πρὸς ξο. ὡς δὲ ἡ κξ πρὸς ξο, ἡ ζπ πρὸς πο. ὡς δὲ ἡ ζπ πρὸς πο, ἡ λπ πρὸς πρ. ὡς δὲ ἡ λπ πρὸς πρ, οὕτως ἡ βσ πρὸς σρ. καὶ ἔτι ὡς ἡ μὲν βσ πρὸς σρ, ἡ δσ πρὸς στ. ὡς δὲ ἡ δσ πρὸς στ, ἡ ηυ πρὸς υτ. καὶ ἔτι ὡς ἡ μὲν ηυ πρὸς υτ, ἡ νυ πρὸς υφ. ὡς δὲ ἡ νυ πρὸς υφ, ἡ θχ πρὸς χφ. καὶ ἔτι ὡς μὲν ἡ θχ πρὸς χφ, ἡ μχ πρὸς χγ. καὶ πάντα ἄρα πρὸς πάντα ἐστὶν ὡς εἷς τῶν λόγων πρὸς ἕνα. ὡς ἄρα ἡ εξ πρὸς ξα, οὕτως αἱ εκ, ζλ, βδ, ην, θμ, πρὸς τὴν αγ διάμετρον. ὡς δὲ ἡ εξ πρὸς ξα, οὕτως ἡ γε πρὸς εα. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ γε πρὸς εα, οὕτως πᾶσαι αἱ εκ, ζλ, βδ, ην, θμ, πρὸς τὴν αγ διάμετρον.

κβ Ἐὰν εἰς τμῆμα κύκλου πολύγωνον ἐγγραφῇ τὰς πλευρὰς ἔχον χωρὶς τῆς βάσεως ἴσας καὶ ἀρτίους, ἀχθῶσιν δὲ εὐθεῖαι παρὰ τὴν βάσιν τοῦ τμήματος, τὰς πλευρὰς ἐπιζευγνύουσαι τοῦ πολυγώνου, αἱ ἀχθεῖσαι πᾶσαι καὶ ἡμίσεια τῆς βάσεως, πρὸς τὸ ὕψος τοῦ τμήματος, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν ἡ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου ἐπιζευγνυμένη, πρὸς τὴν τοῦ πολυγώνου πλευράν. εἰς γὰρ κύκλον τὸν αβγ, διήχθω τις εὐθεῖα ἡ αγ, καὶ ἐπὶ τῆς αγ πολύγωνον ἐγγεγράφθω εἰς τὸ αβγ τμῆμα ἀρτιόπλευρόν τε, καὶ ἴσας ἔχον τὰς πλευρὰς χωρὶς τῆς βάσεως τῆς αγ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζη, εθ, αἳ εἰσὶ παράλληλοι τῇ βάσει τοῦ τμήματος. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς αἱ ζη, εθ, αξ πρὸς βξ, οὕτως ἡ δζ πρὸς ζβ. πάλιν γὰρ ὁμοίως ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηε, αθ. παράλληλοι ἄρα εἰσὶ τῇ βζ. διὰ δὴ ταῦτα ἐστὶν ὡς ἡ κζ πρὸς κβ, ἥ τε ηκ πρὸς κλ, καὶ ἡ εμ πρὸς μλ, καὶ ἡ μθ πρὸς μν, καὶ ἡ ξα πρὸς ξν. καὶ ὡς ἄρα πάντα πρὸς πάντα, εἷς τῶν λόγων πρὸς ἕνα, ὡς ἄρα αἱ ζη, εθ, αξ πρὸς βξ, οὕτως ἡ ζκ πρὸς κβ. ὡς δὲ ἡ κζ πρὸς κβ, οὕτως ἡ δζ πρὸς ζβ. ὡς ἄρα ἡ δζ πρὸς ζβ, οὕτως αἱ ζη, εθ, αξ πρὸς βξ.

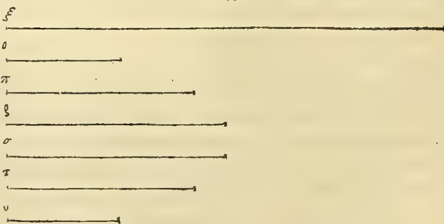
κγ Ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸν πολύγωνον ἰσόπλευρον, τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος. αἱ δὲ αγ, βδ διάμετροι ἔστωσαν. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς αγ διαμέτρου, περιενεχθῇ ὁ αβγδ κύκλος ἔχων τὸ πολύγωνον, δῆλον ὅτι ἡ μὲν περιφέρεια αὐτοῦ κατὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἐνεχθήσεται, αἱ δὲ τοῦ πολυγώνου γωνίαι χωρὶς τῶν πρὸς α, γ σημείοις κατὰ κύκλων περιφερειῶν ἐνεχθήσονται ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας γεγραμμένων ὀρθῶν πρὸς τὸν αβγδ κύκλον. διάμετροι δὲ αὐτῶν ἔσονται, αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου παρὰ τὴν βδ οὖσαι, αἱ δὲ τοῦ πολυγώνου πλευραὶ κατά τινων κώνων ἐνεχθήσονται. αἱ μὲν αζ, αν κατ' ἐπιφανείας κώνου, οὗ βάσις μὲν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ζν, κορυφὴ δὲ τὸ α σημεῖον. αἱ δὲ ζη, μν κατά τινος κωνικῆς ἐπιφανείας οἰσθήσονται, ἧς βάσις μὲν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν μη, κορυ

φὴ δὲ τὸ σημεῖον καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἐκβαλλόμεναι αἱ ζη, μν ἀλλήλαις τε καὶ τῇ αγ. αἱ δὲ βθ, μδ πλευραὶ ἐπὶ κωνικῆς ἐπιφανείας οἰσθήσονται. ἧς βάσις μέν ἐστιν ὁ κύκλος, ὁ περὶ διάμετρον τὴν βδ, ὀρθὸς πρὸς τὸν αβγδ κύκλον. κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἐκβαλλόμεναι αἱ βκ, δμ, ἀλλήλαις τε καὶ τῇ γα. ὁμοίως δὲ καὶ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμικυκλίῳ πλευραὶ ἐπὶ κωνικῶν ἐπιφανειῶν οἰσθήσονται, πάλιν ὁμοίων ταύταις. ἔσται δή τι σχῆμα ἐγγραφόμενον ἐν τῇ σφαίρᾳ ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, τῶν προειρημένων. οὗ ἡ ἐπιφάνεια ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. διαιρεθείσης γὰρ τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὴν βδ ὀρθοῦ, πρὸς τὸν αβγδ κύκλον, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἑτέρου ἡμισφαιρίου, καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ. ἀμφοτέρων γὰρ τῶν ἐπιφανειῶν πέρας ἐστὶ, τοῦ κύκλου ἡ περιφέρεια, τοῦ περὶ διάμετρον τὴν βδ ὀρθοῦ πρὸς τὸν αβγδ κύκλον. καί εἰσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι. καὶ περιλαμβάνεται αὐτῶν ἡ ἑτέρα ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἐπιφανείας, καὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχοντος αὐτῇ. ὁμοίως δὲ καὶ τοῦ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμισφαιρίῳ σχήματος ἡ ἐπιφάνεια ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφανείας. καὶ ὅλη οὖν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.





κδ Η τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος εἰς τὴν σφαῖραν ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς πλευρᾶς τοῦ σχήματος, καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου (τετραπλεύρου) παραλλήλους οὔσας τῇ ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινούσῃ εὐθείᾳ. ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ, καὶ ἐν αὐτῷ πολύγωνον ἐγγεγράφθω ἰσόπλευρον, οὗ αἱ πλευραὶ ὑπὸ τετράδος μετροῦνται. καὶ ἀπὸ τοῦ πολυγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου νοείσθω τι εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγεγραφὲν σχῆμα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εζ, ηθ, γδ, κλ, μν, παράλληλοι οὖσαι τῇ ὑπὸ δύο πλευρὰς



ρὰς ὑποτεινούσῃ εὐθείᾳ. κύκλος δή τις ἐκκείσθω ὁ ξ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς α ε, καὶ τῆς ἴσης ταῖς ε ζ, η θ, γ δ, κ λ, μ ν. λέγω ὅτι ὁ κύκλος οὗτος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγραφομένου σχήματος. ἐκκείσθωσαν γὰρ κύκλοι οἱ ο, π, ρ, σ, τ, υ. καὶ τοῦ μὲν ο, ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ε α, καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ε ζ. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ π, δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ε α καὶ τῆς ἡμισείας τῶν ε ζ, η θ. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ρ, δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ε α καὶ τῆς ἡμισείας τῶν η θ, γ δ. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ σ, δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς α ε, καὶ τῆς ἡμισείας τῶν γ δ, κ λ. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ τ, δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς α ε, καὶ τῆς ἡμισείας τῶν κ λ, μ ν. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ υ, δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς α ε. καὶ τῆς ἡμισείας τῆς μ ν. διὰ δὴ ταῦτα ὁ μὲν ο κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ α ε ζ κώνου, ὁ δὲ π τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν ε ζ, η θ. ὁ δὲ ρ τῇ μεταξὺ τῶν η θ, γ δ. ὁ δὲ σ τῇ μεταξὺ τῶν δ γ, κ λ. καὶ ἔτι ὁ μὲν τ ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν κ λ, μ ν. ὁ δὲ υ τῇ τοῦ μ β ν κώνου ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστί. οἱ πάντες ἄρα κύκλοι ἴσοι εἰσὶ τῇ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ φανερὸν ὅτι αἱ ἐκ τοῦ κέντρων τῶν ο, π, ρ, σ, τ, υ κύκλων, δύνανται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς α ε καὶ δὶς τῶν ἡμίσεων τῆς ε ζ, η θ, γ δ, κ λ, μ ν. αἳ ὅλαι εἰσὶν αἱ ε ζ, η θ, κ λ, μ ν. αἱ ἄρα ἐκ τῶν κέντρων τῶν ο, π, ρ, σ, τ, υ κύκλων δύνανται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς α ε καὶ πασῶν τῶν ε ζ, η θ, γ δ, κ λ, μ ν. ἀλλὰ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ξ κύκλου δύναται τὸ ὑπὸ τῆς α ε, καὶ τῆς συγκειμένης ἐκ πασῶν τῶν ε ζ, η θ, γ δ, κ λ, μ ν. ἡ ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ξ κύκλου δύναται τὰς ἐκ τῶν κέντρων τῶν ο, π, ρ, σ, τ, υ κύκλων. καὶ ὁ κύκλος ἄρα ὁ ξ, ἴσος ἐστὶ τοῖς ο, π, ρ, σ, τ, υ κύκλοις. οἱ δὲ ο, π, ρ, σ, τ, υ κύκλοι ἀπεδείχθησαν ἴσοι τῇ εἰρημένῃ τοῦ σχήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ ὁ ξ ἄρα κύκλος ἴσος ἔσται τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος.

Τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς τὴν σφαῖραν, ἡ ἐπιφάνεια ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ. ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ. καὶ ἐν αὐτῷ ἐγγεγράφθω πολύγωνον ἀρτιόγωνον ἰσόπλευρον, οὗ αἱ πλευραὶ ὑπὸ τετράδος μετροῦνται. καὶ ἐπ' αὐτοῦ νοείσθω ἐπιφάνεια ἡ ἀπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχομένη. λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγραφέντος, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτείνουσαι τοῦ πολυγώνου, αἱ ἄρα ι, θ μ. καὶ ταύταις παράλληλοι αἱ ζ κ, δ β, η λ. ἐκκείσθω δέ τις κύκλος ὁ ρ. οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ τῆς ε α, καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ε ι, ζ κ, β δ, η λ, θ μ. διὰ δὴ τὸ προδειχθὲν ἴσος ἐστὶν ὁ κύκλος τῇ τοῦ εἰρημένου σχήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ἴση πάσαις ταῖς ε ι, ζ κ, β δ, η λ, θ μ, πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου τὴν α γ. οὕτως ἡ γ ε πρὸς ε α. τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς εἰρημέναις, καὶ τῆς ε α, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ρ κύκλου, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν α γ, γ ε. ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ α γ, γ ε ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς α γ. ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ρ, τοῦ ἀπὸ τῆς α γ. ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ρ τῆς α γ. ὥστε ἡ διάμετρος τοῦ ρ κύκλου, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία τῆς διαμέτρου τοῦ α β γ δ κύκλου. καὶ δύο ἄρα τοῦ α β γ δ κύκλου διάμετροι, μείζους εἰσὶ τῆς διαμέτρου τοῦ ρ κύκλου. καὶ τὸ τετράκις ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ α β γ δ κύκλου, τουτέστι τῆς α γ, μεῖζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς τοῦ ρ κύκλου διαμέτρου. ὡς δὲ τὸ τετράκις ἀπὸ τῆς α γ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τοῦ ρ κύκλου διαμέτρου, οὕτως τέσσαρες κύκλοι οἱ α β γ δ πρὸς τὸν ρ κύκλον. τέσσαρες ἄρα κύκλοι οἱ α β γ δ, μείζους εἰσὶ τοῦ ρ κύκλου. ὁ ἄρα κύκλος ὁ ρ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλάσιος τοῦ μεγίστου κύκλου. ὁ ρ κύκλος ἴσος ἐδείχθη κε

τῇ εἰρημένῃ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος. ἡ ἄρα ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ.

κϛ Τῷ ἐγγραφομένῳ ἐν τῇ σφαίρᾳ σχήματι, τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν ἴσος ἐστὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον, τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος τοῦ ἐγγραφέντος ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου κάθετον ἠγμένῃ. ἔστω ἡ σφαῖρα καὶ ὁ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τῷ πρότερον. ἔστω δὲ κῶνος ὀρθὸς ὁ ρ, βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου κάθετον ἠγμένῃ. δεικτέον ὅτι ὁ κῶνος ὁ ρ, ἴσος ἐστὶ τῷ ἐγγεγραμμένῳ ἐν τῇ σφαίρᾳ σχήματι. ἀπὸ γὰρ τῶν κύκλων ὧν εἰσὶ διάμετροι αἱ ζν, ημ, θλ, ικ, κῶνοι ἀναγεγράφθωσαν, κορυφὴν ἔχοντες τὸ τῆς σφαίρας κέντρον. ἔσται δὴ ῥόμβος στερεὸς ἔκ τε κώνου, οὗ βάσις μὲν ἔστω ὁ κύκλος ὁ περὶ τὴν ζν, κορυφὴ δὲ τὸ α σημεῖον. καὶ τοῦ κώνου οὗ βάσις ὁ αὐτὸς κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ χ σημεῖον, ἴσος ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ναζ. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ χ κάθετον ἠγμένῃ. πάλιν δὲ καὶ τὸ περιλελειμμένον τοῦ ῥόμβου τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὴν ζν ημ. καὶ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κώνων τοῦ τε ζνχ, καὶ τοῦ ημχ, ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς μν ζη. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ χ ἐπὶ τὴν ζη κάθετον ἠγμένῃ. δέδεικται γὰρ ταῦτα. ἔτι δὲ καὶ τὸ περιλειπόμενον τοῦ κώνου τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ημ, βδ, καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ μηχ κώνου. καὶ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν βδ, ἴσον ἔσται κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν τε ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ημ, βδ. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ χ ἐπὶ τὴν βη κάθετον ἠγμένῃ. ὁμοίως δὲ καὶ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμισφαιρίῳ ὅ τε ῥόμβος ὁ χκγι, καὶ τὰ περιλείμματα τῶν κώνων ἴσα ἔσται τοσούτοις καὶ τηλικούτοις κώνοις, ὅσοι καὶ πρότερον ἐρρήθησαν. δῆλον οὖν ὅτι καὶ ὅλον τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἴσον ἐστὶ πᾶσι τοῖς εἰρημένοις κώνοις. οἱ δὲ κῶνοι ἴσοι εἰσὶ τῷ ρ κώνῳ. ἐπειδὴ ὁ ρ κῶνος ὕψος μὲν ἔχει ἑκάστῳ ἴσον τῶν εἰρημένων κώνων. βάσιν δὲ ἴσην πάσαις ταῖς βάσεσιν αὐτῶν. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένον ἴσον ἐστὶ τῷ ἐκκειμένῳ κώνῳ.

κζ Τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν, ἔλασσόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἔστω γὰρ ὁ γινόμενος κῶνος ἴσος τῷ σχήματι τῷ ἐγγεγραμμένῳ ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὴν βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου κάθετον ἀγομένῃ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ ἐγγραφέντος πολυγώνου ὁ ρ. ὁ δὲ κῶνος

ὁ ξ

ξ̄ ἔσω, βάσιν ἔχων ἴσην τῷ α β̄ γ δ κύκλῳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α β̄ γ δ κύκλου. ἐπεὶ οὖν ὁ ρ̄ κῶνος βάσιν ἔχει ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ χ̄ καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν α ζ̄. ἐδείχθη δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσων ἢ τετραπλασία τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ μεγίστου κύκλου. ἔστιν ἄρα ἡ τοῦ ρ̄ κώνου βάσις ἐλάσσων ἢ τετραπλασία τῆς βάσεως τοῦ ξ̄ κώνου. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὕψος τοῦ ρ̄ ἔλασσον τοῦ ὕψους τοῦ ξ̄ κώνου. ἐπεὶ οὖν ὁ ρ̄ κῶνος τὴν μὲν βάσιν ἔχει ἐλάσσονα ἢ τετραπλασίαν τῆς τοῦ ξ̄ βάσεως, τὸ δὲ ὕψος ἔλασσον τοῦ ὕψους, δῆλον ὡς καὶ αὐτὸς ὁ ρ̄ κῶνος ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλάσιος τοῦ ξ̄ κώνου. ἀλλὰ καὶ ὁ ρ̄ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. τὸ ἄρα ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἔλασσόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον τοῦ ξ̄ κώνου.

Ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ α β̄ γ δ. περὶ δὲ τὸν α β̄ γ δ κύκλον περιγεγράφθω πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος. τὸ δὲ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένον πολύγωνον, κύκλος περιγεγραμμένος περιλαμβανέτω, περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον γινόμενος τῷ α β̄ γ δ, μενούσης δὴ τῆς ε̄ κ περιενεχθήτω τὸ ε ζ̄ κ θ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ τό τε πολύγωνον καὶ ὁ κύκλος. δῆλον οὖν ὅτι ἡ μὲν περιφέρεια τοῦ α β̄ γ δ κύκλου κατὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας οἰσθήσεται. ἡ δὲ περιφέρεια τοῦ ε ζ̄ κ θ, κατ' ἄλλης ἐπιφανείας σφαίρας τὸ αὐτὸ κέντρον ἐχούσης τῇ ἐλάσσονι οἰσθήσεται. αἱ δὲ ἁφαὶ καθ' ἃς ἐπιψαύουσιν αἱ πλευραί, γράφουσι κύκλους ὀρθοὺς πρὸς τὸν α β̄ γ δ κύκλον ἐν τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ. αἱ δὲ γωνίαι τοῦ πολυγώνου χωρὶς τῶν πρὸς τοῖς ε̄, κ̄ σημείοις, κατὰ κύκλων περιφερειῶν οἰσθήσονται, ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς μείζονος σφαίρας γεγραμμένων ὀρθῶν πρὸς τὸν ε ζ̄ κ θ κύκλον. αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου κατὰ κωνικῶν ἐπιφανειῶν οἰσθήσονται, καθάπερ ἐπὶ τῶν πρὸ τούτου. ἔσται οὖν τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν, περὶ μὲν τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν περιγεγραμμένον, ἐν δὲ τῇ μείζονι ἐγγεγραμμένον. ὅτι δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, οὕτως δειχθήσεται. ἔστω γὰρ ἡ κ̄ δ διάμετρος κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ, τῶν κ̄, δ̄ σημείων ὄντων, καθ' ἃ ἅπτονται τοῦ α β̄ γ δ κύκλου αἱ δύο πλευραὶ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου, διῃρημένης δὴ τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὴν κ̄ δ ὀρθοῦ πρὸς τὸν α β̄ γ δ κύκλον. καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν, διαιρεθήσεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου. καὶ φανερὸν ὅτι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἐπιπέδῳ. ἀμφοτέρων γὰρ τῶν ἐπιφανειῶν

πέρας ἐστὶ ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια τοῦ περὶ διάμετρον τὴν κδ, ὀρθοῦ πρὸς τὸν αβγδ κύκλον, καί εἰσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι. καὶ περιλαμβάνεται ἡ ἑτέρα αὐτῶν ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἐπιφανείας, καὶ τῆς ἐπιπέδου τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης. ἐλάσσων οὖν ἐστιν ἡ περιλαμβανομένη τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια, τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ τοῦ λοιποῦ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν.

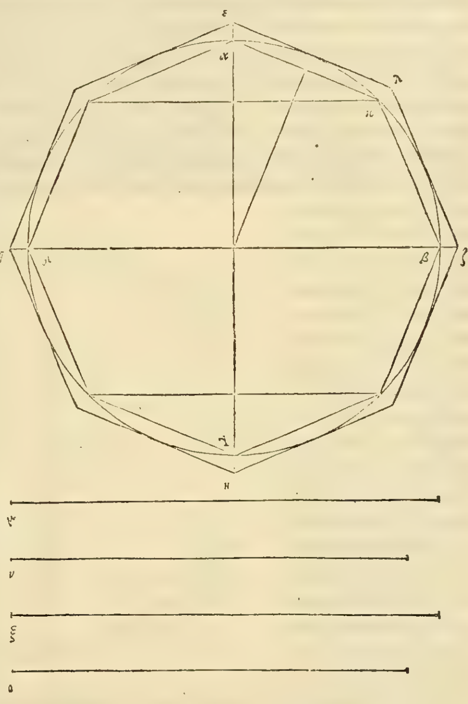
κη Τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν, ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου, οὔσαις παρά τινα τῶν ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινουσῶν. τὸ γὰρ περιγεγραμμένον περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν, ἐγγέγραπται εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν. τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου ἐν τῇ σφαίρᾳ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν, δέδεικται ὅτι τῇ ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστὶν ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου, καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου, οὔσαις παρά τινα τῶν ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινουσῶν. δῆλον οὖν ἐστι τὸ προειρημένον.

κθ Τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν, ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ. ἔστω γὰρ ἥ τε σφαῖρα καὶ ὁ κύκλος καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον προκειμένοις. καὶ ὁ λ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ ἔστω τοῦ προκειμένου περιγεγραμμένου περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν. ἐπεὶ οὖν ἐν τῷ εζηθ κύκλῳ πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγέγραπται, καὶ ἀρτιογώνιον, αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ πολυγώνου πλευρὰς παράλληλοι οὖσαι τῇ θζ, πρὸς τὴν ζθ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν ἡ κθ πρὸς κζ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου, τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ζθ κ. ὥστε ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ λ κύκλου ἴσον δύναται τῷ ὑπὸ ζθ κ. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ λ κύκλου τῆς θκ. ἡ δὲ θκ ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τοῦ αβγδ κύκλου. διπλασία γάρ ἐστι τῆς χσ, οὔσης ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ αβγδ κύκλου. δῆλον οὖν ὅτι μείζων ἐστὶν ἢ τετραπλάσιος ὁ λ κύκλος, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν, τοῦ μεγίστου κύκλου τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ.

Τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν ἴσος ἐστὶ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. τὸ γὰρ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν, ἐγγέγραπται ἐν τῇ μείζονι σφαίρᾳ. τῷ δὲ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν, δέδεικται ἴσος κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. αὕτη δέ ἐστιν ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. δῆλον οὖν ἐστι τὸ προτεθέν. ἐκ τούτου δὲ φανερόν, ὅτι τὸ σχῆμα τὸ περιγραφόμενον περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν μεῖζόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἐπεὶ δὴ γὰρ ἴσος ἐστὶ τῷ σχήματι κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ, τουτέστι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. ἔστι δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν μείζων ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν

ἐν τῇ σφαίρᾳ. μείζων ἄρα ἢ τετραπλάσιον ἔσται τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὴν σφαῖραν τοῦ κώνου, βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἐπειδὴ καὶ ὁ κῶνος ἴσος αὐτῷ, μείζων ἢ τετραπλάσιος γίνεται τοῦ εἰρημένου. βάσιν τε γὰρ μείζονα, ἢ τετραπλασίαν ἔχει, καὶ ὕψος ἴσον.

Ἐὰν ἢ ἐν σφαίρᾳ σχῆμα ἐγγεγραμμένον, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον ὑπὸ ὁμοίων πολυγώνων, τὸν αὐτὸν τρόπον τοῖς πρότερον κατεσκευασμένοις, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐπιφάνειαν, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου περὶ τὸν μέγιστον κύκλον, πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ. αὐτὸ δὲ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον, τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἔστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ α β γ δ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸν πολύγωνον ἰσόπλευρον. τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος. καὶ ἄλλο περιγεγράφθω περὶ τὸν κύκλον, ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ. ἐπὶ δὲ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευραὶ ἐφαπτέσθωσαν τοῦ κύκλου κατὰ μέσα τῶν περιφερειῶν τῶν ἀποτεμνομένων ὑπὸ τῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου πλευρῶν. αἱ δὲ ε η, ζ θ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἔστωσαν ἀλλήλαις τοῦ κύκλου τοῦ περιλαμβάνοντος τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον, καὶ ὁμοίως κείμεναι ταῖς α γ, β δ διαμέτροις, καὶ νοείσθωσαν ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τὰς ἀπεναντίον γωνίας τοῦ πολυγώνου, αἳ γίγνονται ἀλλήλαις τε καὶ τῇ β ζ, θ δ παράλληλοι, μενούσης δὴ τῆς ε η διαμέτρου, καὶ περιενεχθεισῶν τῶν περιμέτρων τῶν πολυγώνων περὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν. τὸ μὲν περιγεγραμμένον σχῆμα ἔσται ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον. δεικτέον οὖν ὅτι ἡ μὲν ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ε λ πρὸς α κ. τὸ δὲ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἔστω γὰρ ὁ μὲν μ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν. ὁ δὲ ν ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου, δύναται ἄρα τοῦ μὲν μ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ε λ καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου τοῦ περιγεγραμμένου. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν, τὸ ὑπὸ τῆς α κ καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ πολύγωνα, ὅμοια ἂν εἴη καὶ τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν εἰρημένων γραμμῶν, τουτέστι τῶν ἐπὶ τὰς γωνίας, ἢ τὰς πλευρὰς τῶν πολυγώνων. ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα ὃν ἔχουσιν αἱ τῶν πολυγώνων πλευραὶ δυνάμει. ἀλλὰ καὶ ὃν ἔχει λόγον τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν εἰρημένων γραμμῶν, τοῦτον ἔχουσιν αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν μ, ν κύκλων πρὸς ἀλλήλας δυνάμει. ὥστε καὶ αἱ τῶν μ, ν διάμετροι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς τῶν πολυγώνων πλευραῖς. οἱ δὲ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους διπλασίονα λόγον ἔχουσι τῶν διαμέτρων, οἵτινές εἰσι ταῖς ἐπιφανείαις τοῦ περιγεγραμμένου καὶ ἐγγεγραμμένου. δῆλον οὖν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς τὴν



λ'

τὴν σφαῖραν, διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ε λ πρὸς α κ. εἰλήφθωσαν δὴ δύο κῶνοι οἱ ο, ξ. καὶ ἔστω ὁ μὲν ξ κῶνος βάσιν ἔχων τὸν ξ κύκλον, ἴσον τῷ μ. ὁ δὲ ο, βάσιν ἔχων τὸν ο κύκλον, ἴσον τῷ ν, ὕψος δὲ ὁ μὲν ξ κῶνος τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ὁ δὲ ο τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν α κ κάθετον ἠγμένην. ἴσος ἄρα ὁ μὲν ξ κῶνος τῷ σχήματι τῷ περιγεγραμμένῳ περὶ τὴν σφαῖραν. ὁ δὲ ο τῷ ἐγγεγραμμένῳ. δέδεικται γὰρ ταῦτα. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ πολύγωνα, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ε λ πρὸς α κ, ὃν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὴν α κ κάθετον ἀγομένην. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ ὕψος τοῦ ξ κώνου, πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ο κώνου, ὃν ἡ ε λ πρὸς α κ. ἔχει δὲ καὶ ἡ διάμετρος τοῦ μ κύκλου, πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ν κύκλου λόγον, ὃν ἔχει ἡ ε λ πρὸς α κ. τῶν ἄρα ξ, ο κώνων αἱ διάμετροι τῶν βάσεων τοῖς ὕψεσι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον. ὅμοιοι ἄρα εἰσί. καὶ διὰ τὸ αὐτὸ τριπλασίονα λόγον ἔχει ὁ ξ κῶνος πρὸς τὸν ο κῶνον, ἤπερ ἡ διάμετρος τοῦ μ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ν κύκλου. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ε λ πρὸς α κ.

λα Πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ. ἔστω γὰρ σφαῖρά τις, καὶ ἔστω τετραπλάσιος τοῦ μεγίστου κύκλου ὁ α. λέγω ὅτι ὁ α ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον μείζων ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τοῦ κύκλου. ἔστι δὴ δύο μεγέθη ἄνισα, ἥτε ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, καὶ ὁ α κύκλος. δυνατὸν ἄρα ἐστὶ λαβεῖν δύο εὐθείας ἀνίσους, ὥστε τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα, λόγον ἔχειν ἐλάσσονα τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας πρὸς τὸν κύκλον. εἰλήφθωσαν αἱ β, γ. καὶ τῶν β γ μέση ἀνὰ λόγον ἔστω ἡ δ. νοείσθω δὲ καὶ ἡ σφαῖρα ἐπιπέδῳ τετμημένη διὰ τοῦ κέντρου κατὰ τὸν ε ζ η θ κύκλον. νοείσθω δὲ καὶ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένον καὶ περιγεγραμμένον πολύγωνον, ὥστε ὅμοιον εἶναι τὸ περιγεγραμμένον τῷ ἐγγεγραμμένῳ πολυγώνῳ, καὶ τὴν τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ ὃν ἔχει ἡ β πρὸς τὴν δ. καὶ ὁ διπλάσιος ἄρα λόγος τοῦ διπλασίου λόγου ἐστὶν ἐλάσσων. καὶ τοῦ μὲν τῆς β πρὸς δ, διπλάσιός ἐστιν ὁ τῆς β πρὸς τὴν γ. τῆς δὲ πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου, διπλάσιος ὁ τῆς ἐπιφανείας περιγεγραμμένου στερεοῦ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου. ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας πρὸς τὸν α κύκλον. ὅπερ ἄτοπον. ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μείζων ἐστίν, ἡ δὲ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος τοῦ α κύκλου ἐλάσσων ἐστί. δέδεικται γὰρ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσων τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἢ τετραπλασία. τοῦ δὲ μεγίστου κύκλου τετραπλάσιός ἐστιν ὁ α κύκλος. οὐκ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας μείζων ἐστὶ τοῦ α κύκλου. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων. εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω, καὶ ὁμοίως εὑρήσθωσαν αἱ β, γ εὐθεῖαι, ὥστε τὴν β πρὸς γ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ ὃν ἔχει ὁ α κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, καὶ τῶν β, γ μέση ἀνὰ λόγον ἡ δ. καὶ ἐγγεγράφθω καὶ περιγεγράφθω πάλιν, ὥστε τὴν τοῦ περιγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, τοῦ τῆς β πρὸς δ, καὶ τὰ διπλάσια ἄρα. ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ α κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. ὅπερ ἄτοπον. ἡ μὲν

γὰρ

νου ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ α κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. ὅπερ ἄτοπον. ἡ μὲν γὰρ τοῦ περιγεγραμμένου ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ α κύκλου. ἡ δὲ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσων τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. οὐκ ἄρα οὐδὲ ἐλάσσων ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τοῦ α κύκλου. ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ μείζων. ἡ ἄρα ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἴση ἐστὶ τῷ α κύκλῳ, τουτέστι τῷ τετραπλασίῳ τοῦ μεγίστου κύκλου.

Πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ κώνου, βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, λβ
ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἔστω γὰρ σφαῖρά τις, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ. εἰ οὖν μή ἐστιν ἡ σφαῖρα τετραπλασία τοῦ εἰρημένου κώνου, ἔστω εἰ δυνατὸν μείζων ἢ τετραπλασία. ἔστω δὲ ὁ ξ κῶνος βάσιν μὲν ἔχων τετραπλασίαν τοῦ αβγδ κύκλου, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. μείζων οὖν ἐστιν ἡ σφαῖρα τοῦ ξ κώνου. ἔσται δὴ δύο μεγέθη ἄνισα, ἥ τε σφαῖρα καὶ ὁ κῶνος. δυνατὸν οὖν δύο εὐθείας λαβεῖν ἀνίσους, ὥστε ἔχειν τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἐλάσσονα, τοῦ ὃν ἔχει ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν ξ κῶνον. ἔστωσαν οὖν αἱ κ, η. αἱ δὲ ι, θ εἰλημμέναι, ὥστε τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχειν, τὴν κ τῆς ι, καὶ τὴν ι τῆς θ, καὶ τὴν θ τῆς η. νοείσθω δὲ καὶ εἰς τὸν αβγδ κύκλον ἐγγεγραμμένον πολύγωνον, οὗ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν μετρείσθω ὑπὸ τετράδος. καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ, καθάπερ ἐπὶ τοῦ πρότερον. ἡ δὲ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ πρὸς ι. καὶ ἔστωσαν αἱ αγ, βδ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις. εἰ οὖν μενούσης τῆς αγ διαμέτρου, περιενεχθείη τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ τὰ πολύγωνα, ἔσται τὸ σχῆμα τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὸ δὲ περιγεγραμμένον. καὶ ἕξει τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν αβγδ κύκλον. ἡ δὲ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κ πρὸς τὴν ι. ὥστε τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τριπλασίονα τοῦ κ πρὸς ι. ἔχει δὲ καὶ ἡ κ πρὸς η μείζονα λόγον, ἢ τριπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ πρὸς ι. τοῦτο γὰρ φανερὸν διὰ λημμάτων. πολλῷ ἄρα τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ πρὸς η. ἡ δὲ κ πρὸς η ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν ξ κῶνον, καὶ ἐναλλάξ, ὅπερ ἀδύνατον. τὸ μὲν γὰρ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον μεῖζόν ἐστι τῆς σφαίρας. τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον ἔλασσον τοῦ ξ κώνου. διότι ὁ μὲν ξ κῶνος τετραπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ αβγδ κύκλῳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον τοῦ εἰρημένου κώνου, ἢ τετραπλάσιον. οὐκ ἄρα μείζων ἢ τετραπλασία ἡ σφαῖρα τοῦ εἰρημένου. ἔστω εἰ δυνατὸν ἐλάσσων ἢ τετραπλασία, ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ἡ σφαῖρα τοῦ ξ κώνου. εἰλήφθωσαν δὴ αἱ κ, η εὐθεῖαι, ὥστε τὴν κ μείζονα εἶναι τῆς η, καὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν πρὸς αὐτὴν, τοῦ ὃν ἔχει ὁ ξ κῶνος πρὸς τὴν σφαῖραν. καὶ αἱ θ, ι ἐκκείσθωσαν καθὼς πρότερον, καὶ εἰς τὸν αβγδ κύκλον νοείσθω πολύγωνον ἐγγεγραμμένον. καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον. ὥστε τὴν πλευρὰν τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἤπερ ἡ κ πρὸς ι. καὶ τὰ ἄλλα κατεσκευασμένα τὸν αὐτὸν τρόπον τοῖς πρότερον. ἕξει ἄρα καὶ τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν σχῆμα, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν αβγδ κύκλον, πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου. ἡ δὲ πλευρὰ πρὸς τὴν

πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κ̄ πρὸς ῑ. ἕξει οὖν τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἐλάσσονα λόγον ἢ τριπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ̄ πρὸς τὴν ῑ. ἡ δὲ κ̄ πρὸς τὴν η̄ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τριπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ̄ πρὸς τὴν ῑ. ὥστε ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἢ ἡ κ̄ πρὸς τὴν η̄. ἡ δὲ κ̄ πρὸς τὴν η̄, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ ξ̄ κῶνος πρὸς τὴν σφαῖραν, ὅπερ ἀδύνατον. τὸ μὲν γὰρ ἐγγεγραμμένον ἔλασσον ἐστὶ τῆς σφαίρας, τὸ δὲ περιγεγραμμένον μεῖζον τοῦ ξ̄ κώνου. οὐκ ἄρα οὐδὲ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλάσια ἡ σφαῖρα τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ α β̄ γ δ κύκλῳ. ὕψος δὲ τὴν ἴσην τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μείζων, τετραπλασία ἄρα.

Προδεδειγμένων δὲ τούτων, φανερὸν ὅτι πᾶς κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ἡμιόλιος ἐστὶ τῆς σφαίρας. ὁ μὲν γὰρ κύλινδρος ὁ προειρημένος ἑξαπλάσιος ἐστὶ τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ἡ δὲ σφαῖρα δέδεικται τοῦ αὐτοῦ κώνου τετραπλασία οὖσα. δῆλον οὖν, ὅτι ὁ κύλινδρος ἡμιόλιος ἐστὶ τῆς σφαίρας. πάλιν ἐπεὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῶν βάσεων ἴση δέδεικται κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέση ἀνὰ λόγον ἐστὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου πλευρᾶς, καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως. τοῦ δὲ εἰρημένου κυλίνδρου περὶ τὴν σφαῖραν, ἡ πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως, δῆλον ὅτι ἡ μέση αὐτῶν ἀνὰ λόγον, ἴση γίνεται τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως. ὁ δὲ κύκλος ὁ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων ἴσην τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως, τετραπλάσιος ἐστὶ τῆς βάσεως τῆς τοῦ μεγίστου κύκλου τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ. ἔσται ἄρα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῶν βάσεων, τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου. ὅλη ἄρα μετὰ τῶν βάσεων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἑξαπλασία ἔσται τοῦ μεγίστου κύκλου. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου. ὅλη ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἡμιολία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

λγ Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς τὸ τμῆμα τῆς σφαίρας, ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἐν τῷ τμήματι τοῦ μεγίστου κύκλου, καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς παραλλήλοις τῇ βάσει τοῦ τμήματος, σὺν τῇ ἡμισείᾳ τῆς τοῦ τμήματος βάσεως. ἔστω σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ τμῆμα, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν α η̄ κύκλος. ἐγγεγράφθω σχῆμα εἰς αὐτὸ οἷον εἴρηται, περιεχόμενον ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν. καὶ μέγιστος κύκλος ὁ α η̄ θ. καὶ ἀρτιόπλευρον πολύγωνον τὸ α γ ε̄ θ ζ δ η χωρὶς τῆς α̅ η πλευρᾶς. καὶ εἰλήφθω κύκλος ὁ λ̄, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς α̅ γ πλευρᾶς, καὶ ὑπὸ πασῶν τῶν ε̄ ζ, γ̄ δ. καὶ ἔτι τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως, τουτέστι τῆς α̅ κ. δεικτέον οὖν, ὅτι ὁ λ̄ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ τοῦ σχήματος ἐπιφανείᾳ. εἰλήφθω γὰρ κύκλος ὁ μ̄, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ε̄ θ πλευρᾶς, καὶ τῆς ἡμισείας

μισείας τῆς ε ζ. γίνεται δὴ ὁ μ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὴν ε ζ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ θ σημεῖον. εἰλήφθω δὲ καὶ ἄλλος ὁ ν, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ε γ, καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρου τῆς ε ζ, γ δ. ἔσαι οὗτος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ε ζ, γ δ. καὶ ἄλλος ὁμοίως ὁ ξ εἰλήφθω κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς α γ καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρων τῶν γ δ, α η. καὶ αὐτὸς οὖν ἴσος ἐστὶ τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τοῦ κατὰ τὰς α η, γ δ. πάντες οὖν οἱ κύκλοι ἴσοι ἔσονται τῇ ὅλῃ τοῦ σχήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων αὐτῶν ἴσον δυνήσονται τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς τῆς α γ, καὶ τῆς ἴσης ταῖς ε ζ, γ δ. καὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς βάσεως τῇ α η. ἐδύνατο δὲ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ λ κύκλου, ἴσον τῷ αὐτῷ χωρίῳ. ὁ ἄρα λ κύκλος ἴσος ἔσται τοῖς μ, ν, ξ κύκλοις. ὥστε καὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος.

Τετμήσθω σφαῖρα μὴ διὰ τοῦ κέντρου ἐπιπέδῳ, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ α ε ζ, τέμνων πρὸς ὀρθὰς τὸ ἐπίπεδον τὸ τέμνον. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ α β γ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόγωνον, χωρὶς τῆς βάσεως τῆς α β. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον ἐὰν μενούσης τῆς γ ζ περιενεχθῇ τὸ σχῆμα, αἱ μὲν δ, ε, α, β γωνίαι κατὰ κύκλων οἰσθήσονται, ὧν διάμετροι αἱ δ ε, α β. αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ τμήματος, κατὰ κωνικῆς ἐπιφανείας. καὶ ἔσαι τὸ γενηθὲν σχῆμα στερεὸν ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, βάσιν μὲν ἔχον κύκλον οὗ διάμετρος ἡ α β, κορυφὴ δὲ τὸ γ. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον τὴν ἐπιφάνειαν ἐλάσσονα ἕξει, τῆς τοῦ τμήματος ἐπιφανείας τοῦ περιλαμβάνοντος. τὸ γὰρ αὐτὸ πέρας αὐτῶν ἐστὶν ἐν ἐπιπέδῳ τοῦ τε τμήματος, καὶ τοῦ σχήματος ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ α β. καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι ἀμφότεραι εἰσὶν αἱ ἐπιφάνειαι, καὶ περιλαμβάνεται ἡ ἑτέρα ὑπὸ τῆς ἑτέρας. λδ

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ἐν τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. ἔστω σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ α β ε ζ. καὶ ἔστω τμῆμα ἐν τῇ σφαίρᾳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν α β. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τὸ εἰρημένον σχῆμα. καὶ ἐν τῷ τμήματι τοῦ κύκλου πολύγωνον, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτά, διαμέτρου μὲν τῆς σφαίρας οὔσης τῆς θ λ. ἐπεζευγμένων δὲ τῶν λ ε, θ α. καὶ ἔστω κύκλος ὁ μ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔστω τῇ α θ. δεικτέον ὅτι ὁ μ κύκλος μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ σχήματος ἐπιφανείας. ἡ γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος δέδεικται ἴση οὖσα κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ε θ, καὶ τῶν ε ζ, γ δ, η α. τὸ δὲ ὑπὸ τῆς ε θ, καὶ τῶν ε ζ, γ δ, η α δέδεικται ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ε λ, κ θ περιεχομένῳ. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ε λ, κ θ, ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς α θ. καὶ γὰρ τοῦ ὑπὸ λ θ, θ κ, ἴσου ὄντος τῷ ἀπὸ θ α. φανερὸν οὖν ὅτι ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὅς ἐστιν ἴσος ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ. δῆλον ἄρα, ὅτι ὁ μ κύκλος μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος. λε

Τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ τμήματι ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν τὴν αὐτὴν ἔχοντι τῷ σχήματι, κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου κάθετον ἠγμένην. ἔστω γὰρ σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος, καὶ τμῆμα ἔλασσον ἡμικυκλίου τὸ α β γ. καὶ κέντρον τὸ ε. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ α β γ τμῆμα πολύγωνον ἀρτιόπλευρον χωρὶς τῆς α γ, ὁμοίως τοῖς πρότερον. καὶ μενούσης τῆς β ε περιενεχθεῖσα ἡ σφαῖρα ποιείτω σχῆμά τι ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον. καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν α γ, κῶνος ἀναγεγράφθω κορυφὴν ἔχων τὸ κέντρον. καὶ εἰλήφθω κῶνος ὁ κ, βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τοῦ ε κέντρου ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου κάθετον ἠγμένην. δεικτέον ὅτι ὁ κ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ σχήματι, σὺν τῷ κώνῳ τῷ α ε γ. ἀναγε- λς

γεγράφθωσαν δὲ καὶ κῶνοι ἀπὸ τῶν κύκλων τῶν περὶ διαμέτρους τὰς κ θ, ζ λ, κορυφὴν ἔχοντες τὸ ε σημεῖον. ἐπεὶ οὖν ὁ μὲν η β θ ε ῥόμβος στερεὸς ἴσος ἐστὶ κώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κ β θ κώνου, τὸ ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν κ β ἀγομένῃ καθέτῳ. τὸ δὲ περίλημμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς κ θ, ζ λ, καὶ τῆς κωνικῶν τῶν ζ ε δ, κ ε θ ἴσον ἐστὶ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς κ θ, ζ λ, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν ζ κ καθέτῳ ἠγμένῃ. πάλιν τὸ περίλημμα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ζ λ, α γ, καὶ τῆς κωνικῶν τῶν α ε γ, ζ ε λ, ἴσον ἐστὶ κώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ζ λ, α γ, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν ζ α καθέτῳ ἠγμένῃ. οἱ οὖν εἰρημένοι κῶνοι ἴσοι ἔσονται τῷ σχήματι, καὶ μετὰ τοῦ α ε γ κώνου. καὶ ὕψος μὲν ἴσον ἔχουσι τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. τὰς δὲ βάσεις ἴσας τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ α ζ κ β λ γ σχήματος. ἔχει δὲ καὶ ὁ κ κῶνος τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ βάσιν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ κῶνος τοῖς εἰρημένοις κώνοις. οἱ δὲ εἰρημένοι κῶνοι ἐδείχθησαν ἴσοι τῷ σχήματι, καὶ τῷ α ε γ κώνῳ. καὶ ὁ κ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ τε σχήματι, καὶ τῷ ε α γ κώνῳ. ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, μείζων ἐστὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος σὺν τῷ κώνῳ. ὁ γὰρ προειρημένος κῶνος μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ ἴσου τῷ σχήματι, σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν βάσιν τοῦ τμήματος. τὴν δὲ κορυφὴν πρὸς τῷ κέντρῳ, τουτέστι τὴν βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. ἥτε γὰρ βάσις τῆς βάσεως μείζων ἐστί. δέδεικται γὰρ τοῦτο, καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὕψους.

κζ ἜΣτω σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ. καὶ τετμήσθω ἔλασσον ἡμικυκλίου ὁ ἀποτέμνει ἡ α β. καὶ κέντρον τὸ δ. καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ δ ἐπὶ τὰ α β ἐπεζεύχθωσαν αἱ α δ, δ β. καὶ περὶ τὸν γενηθέντα τομέα περιγεγράφθω πολύγωνον, καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος. ἕξει δὴ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ α β γ κύκλῳ. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς ε κ, περιενεχθὲν τὸ πολύγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὁ περιγεγραμμένος κύκλος κατὰ ἐπιφανείας οἰσθήσεται σφαίρας. καὶ αἱ γωνίαι τοῦ πολυγώνου κύκλους γράψουσιν, ὧν αἱ διάμετροι ἐπιζευγνύουσι τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου, οὖσαι

παράλληλο

παράλληλοι τῇ α β. τὰ δὲ σημεῖα καθ' ἃ ἅπτονται τοῦ ἐλάσσονος κύκλου αἱ τοῦ πολυγώνου πλευραὶ, κύκλους γράφουσιν ἐν τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ, ὧν διάμετροι ἔσονται αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς ἁφὰς, παράλληλοι οὖσαι τῇ α β. αἱ δὲ πλευραὶ ἐπὶ κωνικῶν ἐπιφανειῶν οἰσθήσονται. καὶ ἔσται τὸ περιγεγραφὲν σχῆμα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν ζ η κύκλος. ἡ δὲ τοῦ εἰρημένου σχήματος ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ ἐλάσσονος τμήματος ἐπιφανείας. οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν α β κύκλος. ἤχθησαν γὰρ ἐφαπτόμεναι αἱ α μ, β ν. ἐπὶ κωνικῆς ἄρα ἐπιφανείας οἰσθήσονται, καὶ τὸ σχῆμα τὸ γενηθὲν ὑπὸ τοῦ πολυγώνου τοῦ α μ, θ ε ν β ἕξει μείζονα τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας. οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν α β κύκλος ἐστί. πέρας γὰρ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ ἐπ' αὐτῷ ἔχουσιν τὸν περὶ διάμετρον τὴν α β κύκλον. καὶ περιλαμβάνεται τὸ τμῆμα ὑπὸ τοῦ σχήματος. ἀλλ' ἡ γεγενημένη ὑπὸ τῶν ζ μ, η ν ἐπιφάνεια κώνου, μείζων ἐστὶ τῆς γεγενημένης ὑπὸ τῶν μ α, ν β. ἡ μὲν γὰρ ζ μ τῆς μ α μείζων ἐστί. ὑπὸ γὰρ ὀρθὴν ὑποτείνει. ἡ δὲ ν η τῆς ν β. ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ, μείζων ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας. ταῦτα γὰρ δέδεικται ἐν τοῖς λήμμασι. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ τμήματος ἐπιφανείας τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. καὶ φανερὸν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος τοῦ περὶ τὸν τομέα, ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου, καὶ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν πασῶν τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου, καὶ τῆς ἐπὶ ἡμισείας τῆς βάσεως τοῦ εἰρημένου πολυγώνου. * ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἐγγεγραμμένον ἐστὶν εἰς τὸ τμῆμα τῆς μείζονος σφαίρας. τοῦτο δὲ δῆλον, διὰ τὸ προγεγραμμένον.

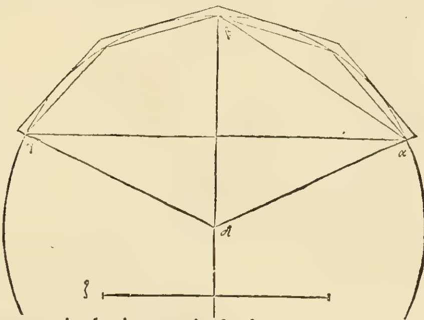
Τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος τῷ τομεῖ, ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ κύκλου. οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἠγμένῃ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. ἔστω γὰρ σφαῖρα, καὶ μέγιστος κύκλος ἐπ' αὐτῆς ὁ α β γ δ. καὶ κέντρον τὸ ε, καὶ περὶ τὸν τομέα περιγεγράφθω τὸ λ κ ζ πολύγωνον, καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος περιγεγράφθω. καὶ γεγενήσθω σχῆμα, καθάπερ πρότερον. καὶ ἔστω κύκλος ὁ ν, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου, καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας σὺν τῇ ἡμισείᾳ τῆς κ λ. ἀλλὰ τὸ εἰρημένον χωρίον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς μ θ καὶ ζ η. ὅ δή ἐστιν ὕψος τοῦ τμήματος τῆς μείζονος σφαίρας. τοῦτο γὰρ προδέδεικται. τοῦ ἄρα ν κύκλου ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ ὑπὸ μ θ, η ζ περιεχομένῳ. ἀλλ' ἡ μὲν η ζ μείζων ἐστὶ τῆς δ ξ, ὅ ἐστιν ὕψος τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. ἐὰν γὰρ ἐπιζεύξωμεν τὴν κ ζ, ἔσται παράλληλος τῇ δ α. ἔστι δὲ καὶ ἡ α β τῇ κ λ παράλληλος. καὶ κοινὴ ἡ ζ ε. ὅμοιον ἄρα τὸ ζ κ η τρίγωνον, τῷ δ α ξ τριγώνῳ. καὶ ἔστι μείζων ἡ ζ κ τῆς α δ. μείζων ἄρα καὶ ἡ ζ η τῆς δ ξ. ἴση δὲ ἡ μ θ τῇ διαμέτρῳ τῇ γ δ. ἐὰν ἐπιζευχθῇ ἡ ε κ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν μ ο τῇ ο ζ, ἡ δὲ θ ε τῇ ε ζ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ε ο τῇ μ θ. διπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ μ θ τῆς ε ο. ἀλλὰ καὶ ἡ γ δ διπλασία ἐστὶ τῆς ε ο. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μ θ τῇ γ δ. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν γ δ, δ ξ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς α δ. ἡ ἄρα τοῦ σχήματος τοῦ κ ζ λ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος τοῦ περὶ διάμετρον τὴν α β. ὁ γὰρ ν κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν τομέα σχήματος. λη

Γίνεται δὴ καὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τὸν τομέα σὺν τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν κ λ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον, ἴσον κώνῳ οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν πλευρὰν καθέτῳ ἠγμένῃ, ἣ δὴ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. τὸ γὰρ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τὸν τομέα, ἐγγεγραμμένον ἐστὶν εἰς τὸ τμῆμα λθ

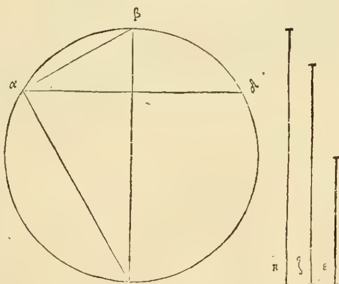
μα τῆς μείζονος σφαίρας, ἧς κέντρον ἐστὶ τὸ αὐτό. δῆλον οὖν τὸ λεγόμενον ἐστὶν ἐκ τοῦ προγεγραμμένου. ἐκ τούτου δὲ φανερόν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ μεῖζόν ἐστι κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ὁ γὰρ ἴσος κῶνος τῷ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ τὴν μὲν βάσιν μείζονα ἕξει τοῦ εἰρημένου κύκλου, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. ἔστω πάλιν σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος, καὶ τμῆμα ἔλασσον ἡμικυκλίου τὸ αβγ. καὶ κέντρον τὸ δ. καὶ εἰς τὸν αβγ τομέα ἐγγεγράφθω πολύγωνον ἀρτιόγωνον, καὶ τούτῳ ὅμοιον περιγεγράφθω, καὶ παράλληλοι ἔστωσαν αἱ πλευραὶ ταῖς πλευραῖς. καὶ κύκλος περιγεγράφθω περὶ τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον. καὶ ὁμοίως τοῖς πρότερον μενούσης τῆς ηβ περιενεχθέντες οἱ κύκλοι, ποιείτωσαν σχήματα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα, δεικτέον ὅτι ἡ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνειαν, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου, πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου. τὸ δὲ σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ. ἔστω γὰρ ὁ μ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου, καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας, καὶ ἔτι τῆς ἡμισείας τῆς εζ. ἔσται δὴ ὁ μ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. εἰλήφθω δὴ καὶ ὁ μ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας σὺν τῇ ἡμισείᾳ τῆς αγ. ἔσται δὴ καὶ οὗτος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. ἀλλὰ τὰ εἰρημένα χωρία ἐστὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς εκ πλευρᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αλ πλευρᾶς. καὶ ὡς ἄρα τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, ὁ μ κύκλος πρὸς τὸν ν κύκλον. φανερὸν οὖν ὅτι καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εκ πρὸς τὴν αλ. τὸν δὲ αὐτόν, ὃν καὶ τὸ πολύγωνον. ἔστω πάλιν κῶνος ὁ ξ, βάσιν μὲν ἔχων τῷ μ ἴσην, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. ἴσος δὴ οὗτος ἐστὶν ὁ κῶνος τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν εζ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ δ. καὶ ἔστω ἄλλος κῶνος ὁ ο, βάσιν μὲν ἴσην ἔχων τῷ ν. ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὴν αλ, κάθετον ἠγμένην. ἔσται δὴ καὶ οὗτος ἴσος τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν αγ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ δ κέντρον. ταῦτα γὰρ πάντα προγέγραπται. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ εκ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, ὡς ἡ αλ πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ δ, ἐπὶ τὴν αλ κάθετον ἠγμένην. ἐδείχθη δὲ ὡς ἡ εκ πρὸς τὴν αλ, οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ κύκλου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν κύκλου. καὶ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον. ἔσται ἄρα ὡς ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ ξ, πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ ο. οὕτω τὸ ὕψος τοῦ ξ κώνου, πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ο κώνου. ὅμοιοι εἰσὶν οἱ κῶνοι. ὁ ξ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν ο κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον. φανερὸν οὖν, ὅτι καὶ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εκ πρὸς αλ.

μ Παντὸς τμήματος σφαίρας, ἐλάσσονος ἡμισφαιρίου, ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας. ἔστω σφαῖρα, καὶ μέγιστος ἐν αὐτῇ κύκλος ὁ αβγ. καὶ τμῆμα ἐν αὐτῇ ἔλασσον ἡμισφαιρίου, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν αγ κύκλος, πρὸς ὀρθὰς ὢν τῷ αβγ κύκλῳ. καὶ εἰλήφθω κύκλος

κύκλος ὁ ζ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αβ. δέδεικται ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αβγ τμήματος, ἴση ἐστὶ τῷ ζ κύκλῳ. εἰ γὰρ μή, ἔστω μείζων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ζ κύκλου. καὶ εἰλήφθω τὸ δ κέντρον. καὶ ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὰ α, γ ἐπιζευχθεῖσαι ἐκβεβλήσθωσαν. καὶ δύο μεγεθῶν ἀνίσων ὄντων τῆς τε ἐπιφανείας τοῦ τμήματος, καὶ τοῦ ζ κύκλου, ἐγγεγράφθω εἰς τὸν αβγ τομέα πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιογώνιον, καὶ ἄλλο τούτῳ ὅμοιον περιγεγράφθω. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας πρὸς τὸν κύκλον. περιενεχθέντος δὲ τοῦ κύκλου ὡς καὶ πρότερον, ἔσται δύο σχήματα ἀπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα. ὧν τὸ μὲν περιγεγραμμένον, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον. καὶ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἔσται ὡς τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον. ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων διπλάσιός ἐστι τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευρά, πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου πλευράν. ἀλλὰ τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τοῦ εἰρημένου τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὸν ζ κύκλον. μείζων δέ ἐστιν ἡ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας τοῦ τμήματος. καὶ ἡ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια ἄρα μείζων ἐστὶ τοῦ ζ κύκλου, ὅπερ ἀδύνατον. δέδεικται γὰρ ἡ εἰρημένη τοῦ σχήματος ἐπιφάνεια ἐλάσσων οὖσα τοῦ τηλικούτου κύκλου. ἔστω πάλιν ὁ κύκλος μείζων τῆς ἐπιφανείας. καὶ ὁμοίως περιγεγράφθω καὶ ἐγγεγράφθω ὅμοια πολύγωνα. καὶ τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω, τοῦ ὃν ἔχει ὁ κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σχήματος. οὐκ ἄρα μείζων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ζ κύκλου. ἐδείχθη δὲ ὡς οὐδὲ ἐλάσσων, ἴση ἄρα.



Ἐὰν μεῖζον ἡμισφαιρίου ᾖ τμῆμα, ὁμοίως αὐτοῦ ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μα
ἔσται τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. ἔστω γὰρ σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος, καὶ νοείσθω τετμημένη ἐπιπέδῳ ὀρθῷ, τῷ κατὰ τὴν αδ. καὶ τὸ αβδ ἔλασσον ἔστω ἡμισφαιρίου. καὶ διάμετρος ἡ βγ πρὸς ὀρθὰς τῇ αδ. καὶ ἀπὸ τῶν β, γ ἐπὶ τὸ α ἐπεζεύχθωσαν αἱ βα, αγ. καὶ ἔστω ὁ μὲν ε κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αβ. ὁ δὲ ζ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αγ. ὁ δὲ η κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ γβ, καὶ ὁ η κύκλος ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς δυσὶ κύκλοις τοῖς ε, ζ. ὁ δὲ η κύκλος ἴσος ἐστὶν ὅλῃ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας. ἐπειδήπερ ἑκατέρα τετραπλασία ἐστὶ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν βγ κύκλου. ὁ δὲ ε κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ αβδ τμήματος. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐπὶ τοῦ ἐλάσσονος ἡμισφαιρίου. λοιπὸς ἄρα ὁ ζ κύκλος, ἴσος ἐστὶ τῇ τοῦ αγδ τμήματος ἐπιφανείᾳ, ὃ δή ἐστι μείζων ἡμισφαιρίου.



Παντὶ τομεῖ σφαίρας, ἴσος ἐστὶ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας τοῦ κατὰ τὸν τομέα, ὕψος δὲ ἴσον μβ
τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἔστω σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ αβδ, καὶ κέντρον τὸ γ. καὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον, τὸν ἴσον τῇ κατὰ τὴν αβδ περιφέρειαν ἐπιφανείᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ βγ. δεικτέον ὅτι ὁ τομεὺς ὁ αβγδ ἴσος ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ κώνῳ. εἰ γὰρ μή, ἔστω μείζων ὁ τομεὺς τοῦ κώνου. καὶ κείσθω ὁ θ κῶνος, οἷος εἴρηται. δύο δὴ μεγεθῶν ἀνίσων ὄντων, τοῦ τομέως καὶ τοῦ θ κώνου, εὑρήσθωσαν δύο γραμμαὶ αἱ δ, ε. μείζων δὲ ἡ δ τῆς ε, καὶ ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἡ δ πρὸς ε, ἤπερ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον. καὶ εἰλήφθωσαν δύο γραμμαὶ αἱ ζ, η. ὅπως τῷ ἴσῳ ὑπερέχῃ ἡ δ τῆς ζ, καὶ ἡ ζ τῆς η, καὶ ἡ η τῆς ε. καὶ περὶ τὸν ἐπίπεδον τομέα τοῦ κύκλου περιγεγράφθω πολύγωνον

γωνον ἰσόπλευρον, καὶ ἀρτιογώνιον. καὶ τούτῳ ὅμοιον ἐγγεγράφθω. ὥσπερ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰ ἐλάσσονα λόγον ἔχει πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, τοῦ ὃν ἔχει ἡ δ πρὸς ζ. καὶ ὁμοίως τοῖς πρότερον περιενεχθέντος τοῦ κύκλου, γεγενήσθω δύο σχήματα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα. τὸ ἄρα περιγεγραμμένον, σὺν τῷ κώνῳ τῷ κορυφὴν ἔχοντι τὸ γ σημεῖον, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ τριπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου. ἀλλὰ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ δ πρὸς ζ. ἐλάσσονα λόγον ἄρα ἕξει, ἢ τριπλάσιον, τὸ εἰρημένον στερεὸν σχῆμα τοῦ τῆς δ πρὸς ζ. ἡ δὲ δ πρὸς ε μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τριπλάσιον τοῦ τῆς δ πρὸς ζ. τὸ ἄρα περιγεγραμμένον σχῆμα στερεὸν τῷ τομεῖ, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ δ πρὸς ε. ἡ δὲ δ πρὸς ε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ στερεὸς τομεὺς πρὸς τὸν θ κῶνον. τὸ ἄρα περιγεγραμμένον τῷ τομεῖ σχῆμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ στερεὸς τομεὺς πρὸς τὸν θ κῶνον. καὶ ἐναλλάξ. μεῖζον δέ ἐστι τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν σχῆμα τοῦ τμήματος. καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον ἄρα σχῆμα ἐν τῷ τομεῖ, μεῖζόν ἐστι τοῦ θ κώνου. ὅπερ ἀδύνατον. δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς ἄνω, ἔλασσον ὂν τοῦ τηλικούτου κώνου, τουτέστι τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἐπιζευγνυμένῃ εὐθείᾳ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. οὗτος δέ ἐστιν ὁ εἰρημένος κῶνος ὁ θ. βάσιν τε γὰρ ἔχει κύκλον ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τμήματος, τουτέστι τῷ εἰρημένῳ κύκλῳ, καὶ ὕψος ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. οὐκ ἄρα ὁ στερεὸς τομεὺς μείζων ἐστὶ τοῦ θ κώνου. ἔστω δὴ πάλιν ὁ θ κῶνος τοῦ στερεοῦ τομέως μείζων. πάλιν δὴ ὁμοίως ἡ δ πρὸς τὴν ε μείζων αὐτῆς οὖσα, ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω, τοῦ ὃν ἔχει ὁ κῶνος πρὸς τὸν τομέα. καὶ ὁμοίως εἰλήφθωσαν αἱ ζ, η. ὥστε εἶναι τὰς δύο πλευρὰς τὰς αὐτάς, καὶ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν ἐπίπεδον τομέα πολυγώνου ἀρτιογωνίου ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω, τοῦ ὃν ἔχει ἡ δ πρὸς τὴν ζ. καὶ γεγενήσθω τὰ περὶ τὸν στερεὸν τομέα στερεὰ σχήματα. ὁμοίως οὖν δείξομεν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸν τομέα στερεὸν σχῆμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἡ δ πρὸς ε. καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ θ κῶνος πρὸς τὸν τομέα. ὥστε καὶ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἐγγεγραμμένον στερεὸν ἐν τῷ τμήματι πρὸς τὸ περιγεγραμμένον. μείζων δέ ἐστιν ὁ τομεὺς τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸν σχήματος. μείζων ἄρα ὁ θ κῶνος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. ὅπερ ἀδύνατον. δέδεικται γὰρ τοῦτο, ὅτι ὁ τηλικοῦτος κῶνος ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὸν τομέα. ἴσος ἄρα ὁ τομεὺς τῷ θ κώνῳ.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ

ΚΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ ΒΙΒΛΙΟΝ Β.

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΔΩΣΙΘΕΟ ΧΑΙΡΕΙΝ.

Πρότερον μὲν ἀπέστειλάς μοι γράψαι τῶν προβλημάτων τὰς ἀποδείξεις, ὧν αὐτὸς τὰς προτάσεις ἀπέστειλα Κόνωνι. συμβαίνει δὲ αὐτῶν τὰ πλεῖστα γράφεσθαι διὰ τῶν θεωρημάτων, ὧν πρότερον ἀπέστειλά σοι τὰς ἀποδείξεις. ὅτι τε πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, καὶ δὴ ὅτι παντὸς τμήματος σφαίρας τῇ ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ εὐθείᾳ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως ἀγομένῃ. καὶ διότι πάσης σφαίρας ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, αὐτός τε ἡμιόλιός ἐστι τῷ μεγέθει τῆς σφαίρας, καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἡμιόλια τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. καὶ διότι πᾶς τομεὺς στερεὸς ἴσος ἐστὶ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας τοῦ ἐν τῷ τομεῖ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ὅσα μὲν οὖν τῶν θεωρημάτων καὶ προβλημάτων γράφεται διὰ τούτων τῶν θεωρημάτων, ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ γράψας ἀπέσταλκά σοι. ὅσα δὲ δι᾽ ἄλλης εὑρίσκονται θεωρίας, τά τε περὶ ἑλίκων καὶ τὰ περὶ τῶν κωνοειδῶν, πειράσομαι διὰ τάχους ἀποστεῖλαι. τὸ δὲ πρῶτον ἦν τῶν προβλημάτων, τόδε· σφαίρας δοθείσης ἐπίπεδον χωρίον εὑρεῖν, ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας. ἔστι δὲ τοῦτο φανερὸν, δεδειγμένον ἐκ τῶν προειρημένων θεωρημάτων. τὸ γὰρ τετραπλάσιον τοῦ μεγίστου κύκλου τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἐπίπεδόν τε χωρίον ἐστὶ, καὶ ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας.

Τὸ δεύτερον ἦν κώνου δοθέντος ἢ κυλίνδρου σφαῖραν εὑρεῖν τῷ κώνῳ ἢ τῷ κυλίνδρῳ ἴ- α
σην. ἔστω ὁ διδόμενος κῶνος ἢ κύλινδρος ὁ α, καὶ τῷ α ἴση ἡ β σφαῖρα. καὶ κείσθω τοῦ α κώνου ἢ κυλίνδρου ἡμιόλιος κύλινδρος ὁ γζδ. τῆς δὲ β σφαίρας ἡμιόλιος κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ηθ κύκλος. ἄξων δὲ ὁ κλ ἴσος τῇ διαμέτρῳ τῆς β σφαίρας. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ε κύλινδρος τῷ κ κυλίνδρῳ. τῶν δὲ ἴσων κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ὡς ἄρα ὁ ε κύκλος πρὸς τὸν κ κύκλον, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς γδ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηθ, οὕτως ἡ κλ πρὸς εζ. ἴση δὲ ἡ κλ τῇ ηθ. ὁ γὰρ ἡμιόλιος κύλινδρος τῆς σφαίρας ἴσον ἔχει τὸν ἄξονα τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας. καὶ ὁ κ κύκλος μέγιστός ἐστι τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ γδ πρὸς τὸ ἀπὸ ηθ, οὕτως ἡ ηθ πρὸς τὴν εζ, ἔστω τῷ ἀπὸ ηθ ἴσον τῷ ὑπὸ γδ, μν. ὡς ἄρα ἡ γδ πρὸς μν, οὕτως τὸ ἀπὸ γδ πρὸς τὸ ἀπὸ ηθ, τουτέστιν ἡ ηθ πρὸς εζ. καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ γδ πρὸς τὴν ηθ, οὕτως ἡ ηθ πρὸς τὴν μν, καὶ ἡ μν πρὸς εζ. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἑκατέρα τῶν γδ, εζ. δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν γδ, εζ δύο μέσαι ἀνὰ λόγον εἰσὶν αἱ ηθ, μν. δοθεῖσα ἄρα ἑκατέρα τῶν ηθ, μν, συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω δὴ ὁ δοθεὶς κῶνος ἢ κύλινδρος ὁ α. δεῖ δὴ τῷ α κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ ἴσην σφαῖραν εὑρεῖν. ἔστω τοῦ α κώνου, ἢ κυλίνδρου, ἡμιόλιος κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν γδ κύκλος, ἄξων δὲ ὁ εζ. καὶ εἰλήφθω τῶν γδ, εζ δύο μέσαι ἀνὰ λόγον, αἱ ηθ, μν. ὥστε εἶναι ὡς τὴν γδ πρὸς τὴν ηθ, οὕτω τὴν ηθ πρὸς τὴν μν, καὶ τὴν μν πρὸς τὴν εζ. καὶ νοείσθω κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ηθ κύκλος. ἄξων δὲ ὁ κλ ἴσος τῇ ηθ διαμέτρῳ. λέγω δὴ ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ ε κύλινδρος τῷ κ κυλίνδρῳ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ γδ πρὸς ηθ, ἡ μν πρὸς εζ. καὶ ἐναλλὰξ, καὶ ἴση ἡ ηθ τῇ κλ. ὡς ἄρα ἡ γδ πρὸς μν, του-

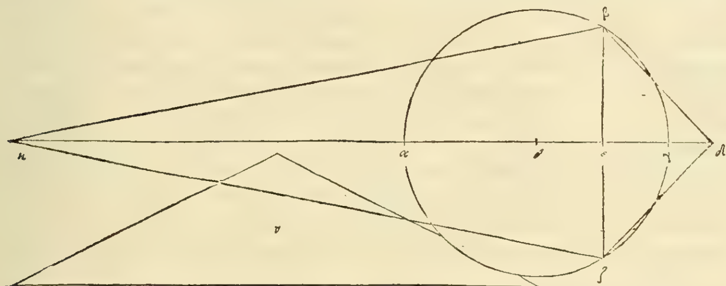
τέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς γδ πρὸς τὸ ἀπὸ ηθ, οὕτως ὁ ε κύκλος πρὸς τὸν κ κύκλον. ὡς ἄρα ὁ ε κύκλος πρὸς τὸν κ κύκλον, οὕτως ἡ κλ πρὸς τὴν εζ. τῶν ἄρα ε, κ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις ταῖς ὕψεσιν. ἴσος ἄρα ὁ ε κύλινδρος τῷ κ κυλίνδρῳ. ὁ δὲ κ κύλινδρος τῆς σφαίρας, ἧς διάμετρος ἡ ηθ ἡμιόλιός ἐστι. καὶ ἡ σφαῖρα ἄρα ἧς ἡ διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ ηθ, τουτέστιν ἡ β, ἴση ἐστὶ τῷ α κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ.

β Παντὶ τμήματι τῆς σφαίρας ἴσος ἐστὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ εὐθεῖαν, ἥτις πρὸς τὸ ὕψος τοῦ τμήματος τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν συναμφότερος, ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος, πρὸς τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος. ἔστω σφαῖρα, ἐν ᾗ μέγιστος κύκλος οὗ διάμετρος ἡ αγ. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ἡ σφαῖρα, τῷ διὰ τῆς βζ πρὸς ὀρθὰς τῇ αγ. καὶ ἔστω κέντρον τὸ θ. καὶ πεποιήσθω ὡς συναμφότερος ἡ θα, αε, πρὸς τὴν αε, οὕτως ἡ δε πρὸς γε. καὶ πάλιν πεποιήσθω ὡς συναμφότερος ἡ θγ, γε πρὸς γε, οὕτως ἡ κε πρὸς εα. καὶ ἀναγεγράφθωσαν κῶνοι ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν βζ, κορυφὰς ἔχοντες τὰ κ, δ σημεῖα. λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ μὲν βδζ κῶνος, τῷ κατὰ τὸ γ τμήματι τῆς σφαίρας, ὁ δὲ βκζ τῷ κατὰ τὸ α σημεῖον. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βθ, θζ, καὶ νενοήσθω κῶνος βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον. κορυφὴν δὲ τὸ θ σημεῖον. καὶ ἔστω κῶνος ὁ μ, βάσιν μὲν ἔχων κύκλον ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ βγζ τμήματος τῆς σφαίρας. τουτέστιν οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ βγ. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἔσται δὴ ὁ μ κῶνος ἴσος τῷ βγθζ στερεῷ τομεῖ. τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. ἐπεὶ δέ ἐστιν ὡς ἡ δε πρὸς εγ, οὕτω συναμφότερος ἡ θα, αε. πρὸς αε διελόντι ἔσται ὡς ἡ γδ πρὸς γε, οὕτως ἡ θα πρὸς αε, τουτέστιν ἡ γθ πρὸς αε. καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ δγ πρὸς γθ ἐστὶν, οὕτως ἡ γε πρὸς εα. καὶ συνθέντι, ὡς ἡ θδ πρὸς θγ, ἡ γα πρὸς αε, τουτέστι τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. ὡς ἄρα ἡ δθ πρὸς γθ, τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. ἴση δέ ἐστιν ἡ γβ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ κύκλου. ἡ δὲ βε ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶ τοῦ περὶ διάμετρον τῆς βζ κύκλου. ὡς ἄρα ἡ δθ πρὸς θγ, ὁ μ κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον. καί ἐστιν ἴση ἡ θγ τῷ ἄξονι τοῦ μ κώνου. καὶ ὡς ἄρα ἡ δθ πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ μ κώνου, οὕτως ὁ μ κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον, ἴσος ἄρα ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν μ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, τῷ βδζθ στερεῷ ῥόμβῳ. τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς λήμμασι τοῦ πρώτου βιβλίου δέδεικται. ἢ οὕτως, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ δθ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ μ κώνου, οὕτως ὁ μ κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον, ἴσος ἄρα ὁ μ κῶνος τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ δθ. ἀντιπεπόνθασι γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἀλλ' ὁ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τῆς βζ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν δθ. ἴσος ἐστὶ τῷ βδζθ στερεῷ ῥόμβῳ. ἀλλ' ὁ μ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ βγζθ στερεῷ τομεῖ, καὶ ὁ βγζθ στερεὸς τομεὺς ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ βδζθ στερεῷ ῥόμβῳ. κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ κώνου, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ εθ, λοιπὸς ἄρα ὁ βδζ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ βζγ τμήματι τῆς σφαίρας. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ὁ βκζ κῶνος, ἴσος τῷ βαζ τμήματι τῆς σφαίρας. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς συναμφότερος, ἡ θγ, γε πρὸς γε, οὕτως ἡ κε πρὸς εα. διελόντι ἄρα ὡς ἡ κα πρὸς αε, οὕτως ἡ θγ πρὸς γε. ἴση δὲ ἡ θγ τῇ θα. καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ κα πρὸς αθ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ. ὥστε καὶ συνθέντι, ὡς ἡ κθ πρὸς θα, ἡ αγ πρὸς γε, τουτέστι τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ βε. κείσθω δὴ πάλιν κύκλος ὁ ν, ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ αβ. ὁ ἄρα ν κύκλος ἴσος

ἔσται

ἐστι τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ βαζ τμήματος. καὶ νοείσθω ὁ κῶνος ὁ ν, ἴσον ἔχων τὸ ὕψος τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἴσος ἄρα ἐστὶ τῷ βθζα στερεῷ τομεῖ. τοῦτο γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ δέδεικται. καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς ἡ κθ πρὸς θα, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν κύκλου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλου, τουτέστιν ὁ ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον. ἴση δὲ ἡ αθ τῷ ὕψει τοῦ ν κώνου. ὡς ἄρα ἡ κθ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ κώνου, οὕτως ὁ ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ν κῶνος, τουτέστιν ὁ βθζα τομεὺς τῷ βθζκ σχήματι. κοινὸς προσκείσθω ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὴν βζ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ εθ. ὅλον ἄρα τὸ αβζ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ βζκ κώνῳ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. καὶ φανερὸν ὅτι γίνεται καθόλου τμῆμα σφαίρας πρὸς κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι. καὶ ὕψος ἴσον ὡς συναμφότερος, ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ ἡ κάθετος τοῦ λοιποῦ τμήματος πρὸς τὴν κάθετον τοῦ λοιποῦ τμήματος. ὡς γὰρ ἡ δε πρὸς εγ, οὕτως ὁ δζβ κῶνος, τουτέστι τὸ βγζ τμῆμα πρὸς τὸν βγζ κῶνον.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, δείξομεν ὅτι καὶ ὁ κβζ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ αζβ τμήματι τῆς σφαίρας. ἔστω γὰρ ὁ ν κῶνος βάσιν μὲν ἔχων τὴν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ κῶνος τῇ σφαίρᾳ. ἡ γὰρ σφαῖρα δέδεικται τετραπλασία τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον, καὶ ὕψος τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ ν κῶνος τοῦ αὐτοῦ ἐστὶ τετραπλάσιος. ἐπεὶ καὶ ἡ βάσις τῆς βάσεως, καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ θα, αε πρὸς αε, ἡ δε πρὸς εγ. διελόντι καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ θγ πρὸς γδ, ἡ αε πρὸς εγ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ κε πρὸς εα, συναμφότερος ἡ θγε πρὸς γε. διελόντι καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ κα πρὸς γθ, τουτέστι πρὸς θα, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ. τουτέστιν ἡ θγ πρὸς γδ. καὶ συνθέντι, ἴση δὲ ἡ αθ τῇ θγ, ὡς ἄρα ἡ κθ πρὸς θγ, ἡ θδ πρὸς δγ. καὶ ὅλη ἡ κδ πρὸς δθ. ἐστὶν ὡς ἡ δθ πρὸς δγ. τουτέστιν ὡς ἡ κθ



πρὸς θα. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ δθκ, θα τῷ ὑπὸ τῶν δκ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θγ, ἡ θδ πρὸς γδ, ἐναλλὰξ ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, ἡ θγ πρὸς γδ. ὡς δὲ ἡ θγ πρὸς γδ, ἐδείχθη ἡ αε πρὸς εγ, ὡς ἄρα ἡ κθ πρὸς θδ, ἡ αε πρὸς εγ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κδ πρὸς τὸ ὑπὸ κθδ. τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αεγ. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν κθδ ἴσον ἐδείχθη τῷ ὑπὸ κδ, αθ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κδ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν κδ, αθ, τουτέστιν ἡ κδ πρὸς αθ. τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ὑπὸ αεγ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ εβ. καί ἐστιν ἴση ἡ αγ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν κύκλου. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν κύκλου πρὸς τὸ ἀπὸ βε, τουτέστιν ὁ ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον, οὕτως ἡ κδ πρὸς αθ. τουτέστιν ἡ κδ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ν κώνου. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ν κῶνος, τουτέστιν ἡ σφαῖρα τῷ βδζκ στερεῷ ῥόμβῳ. ἢ οὕτως ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον, οὕτως ἡ κδ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ν κώνου. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ν κῶνος τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ὁ περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλος. ὕψος δὲ ἡ δκ. ἀντιπεπόνθασιν γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἀλλ' οὗτος ὁ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ βκζδ στερεῷ ῥόμβῳ. καὶ ὁ ν ἄρα κῶνος, τουτέστιν ἡ σφαῖρα ἴση ἐστὶ τῷ βζκδ στερεῷ ῥόμβῳ, ὧν ὁ βδζ κῶνος ἴσος ἐδείχθη τῷ βγζ τμήματι τῆς σφαίρας. λοιπὸς ἄρα ὁ βκζ κῶνος, ἴσος ἐστὶ τῷ βαζ τμήματι τῆς σφαίρας.

Τρίτον ἦν πρόβλημα τόδε. τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὅπως αἱ τῶν τμημάτων ἐπιφάνειαι πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι. γεγονέτω, καὶ ἔστω τῆς σφαίρας μέγιστος κύκλος ὁ αδβε. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ αβ. καὶ ἐκβεβλήσθω πρὸς τὴν αβ ἐπίπε- γ

δον

δον ὀρθόν. καὶ ποιείτω τὸ ἐπίπεδον ἐν τῷ α δ β ε κύκλῳ τομὴν τὴν δ ε. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α δ, β δ. ἐπεὶ οὖν λόγος ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ δ α ε τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δ β ε τμήματος. ἀλλὰ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ α ε τμήματος ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α δ. τῇ δὲ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ β ε τμήματος ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ δ β. ὡς δὲ οἱ εἰρημένοι κύκλοι πρὸς ἀλλήλους, οὕτως τὸ ἀπὸ α δ πρὸς τὸ ἀπὸ δ β. τουτέστιν ἡ α γ πρὸς γ β. λόγος ἄρα τῆς α γ πρὸς γ β δοθείς, ὥστε δοθέν ἐστι τὸ γ σημεῖον. καὶ ἔστι τῇ α β πρὸς ὀρθὰς ἡ δ ε. θέσει ἄρα καὶ τὸ διὰ τῆς δ ε ἐπίπεδον. συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἔστω σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ α β δ ε. καὶ διάμετρος ἡ α β. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς ζ πρὸς η. καὶ τετμήσθω ἡ α β, κατὰ τὸ γ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν α γ πρὸς β γ, οὕτως τὴν ζ πρὸς η. καὶ διὰ τοῦ γ ἐπιπέδῳ τετμήσθω ἡ σφαῖρα πρὸς ὀρθὰς τῇ α β, εὐθεῖα. καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ ἡ δ ε. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α δ, δ β. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο κύκλοι οἱ θ, κ, ὁ μὲν θ ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ α δ, ὁ δὲ κ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἴσην ἔχων τῇ δ β. ἔστιν ἄρα ὁ μὲν θ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ α ε τμήματος. ὁ δὲ κ τοῦ δ β ε τμήματος. τοῦτο γὰρ προδέδεικται ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσα ἐστὶν ἡ ὑπὸ α δ β, καὶ κάθετος ἡ γ δ. ἔστιν ὡς ἡ α γ πρὸς γ β, τουτέστιν ἡ ζ πρὸς η, τὸ ἀπὸ α δ πρὸς τὸ ἀπὸ δ β. τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ θ κύκλου, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κ κύκλου. τουτέστιν ὁ θ κύκλος πρὸς τὸν κ κύκλον. τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δ α ε τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δ β ε τμήματος τῆς σφαίρας.

δ΄ Τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι. ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα ἡ α β γ δ. δεῖ δὴ αὐτὴν τεμεῖν ἐπιπέδῳ, ὥστε τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν δοθέντα. τετμήσθω διὰ τῆς α γ ἐπιπέδῳ, λόγος ἄρα τοῦ α δ γ τμήματος τῆς σφαίρας πρὸς τὸ α β γ τμῆμα τῆς σφαίρας δοθείς. τετμήσθω δὲ ἡ σφαῖρα διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω ἡ τομὴ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ. κέντρον δὲ τὸ κ. καὶ διάμετρος ἡ δ β. καὶ πεποιείσθω, ὡς μὲν συναμφότερος ἡ κ δ χ πρὸς δ χ, οὕτως ἡ ρ χ πρὸς χ β. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ κ β χ πρὸς β χ, οὕτως ἡ λ χ πρὸς χ δ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α λ, λ γ, α ρ, ρ γ. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν α λ γ κῶνος, τῷ α δ γ τμήματι τῆς σφαίρας. ὁ δὲ α ρ γ, τῷ α β γ. λόγος ἄρα καὶ τοῦ α λ γ κώνου πρὸς τὸν α ρ γ κῶνον δοθείς. ὡς δὲ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, οὕτως ἡ λ χ πρὸς χ ρ. ἐπείπερ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχουσι τὸν περὶ διάμετρον τὸν α γ κύκλον. λόγος ἄρα καὶ τῆς λ χ πρὸς χ ρ δοθείς. καὶ διὰ ταῦτα τοῖς πρότερον διὰ τῆς κατασκευῆς, ὡς ἡ λ δ πρὸς κ δ, ἡ κ β πρὸς β ρ, καὶ ἡ δ χ πρὸς χ β. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ρ β πρὸς β κ, ἡ κ δ πρὸς λ δ. συνθέντι ὡς ἡ ρ κ πρὸς κ β, τουτέστι πρὸς κ δ, οὕτως ἡ κ λ πρὸς λ δ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ ρ λ πρὸς ὅλην τὴν κ λ ἐστίν, ὡς ἡ κ λ πρὸς λ δ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ρ λ δ, τῷ ἀπὸ λ κ. ὡς ἄρα ἡ ρ λ πρὸς λ δ, τὸ ἀπὸ κ λ πρὸς τὸ ἀπὸ λ δ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ λ δ πρὸς δ κ, οὕτως ἡ δ χ πρὸς χ β. ἔσται ἀνάπαλιν καὶ συνθέντι, ὡς ἡ κ λ πρὸς λ δ, οὕτως ἡ β δ πρὸς δ χ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κ λ πρὸς τὸ ἀπὸ λ δ, οὕτω τὸ ἀπὸ β δ πρὸς τὸ ἀπὸ δ χ.

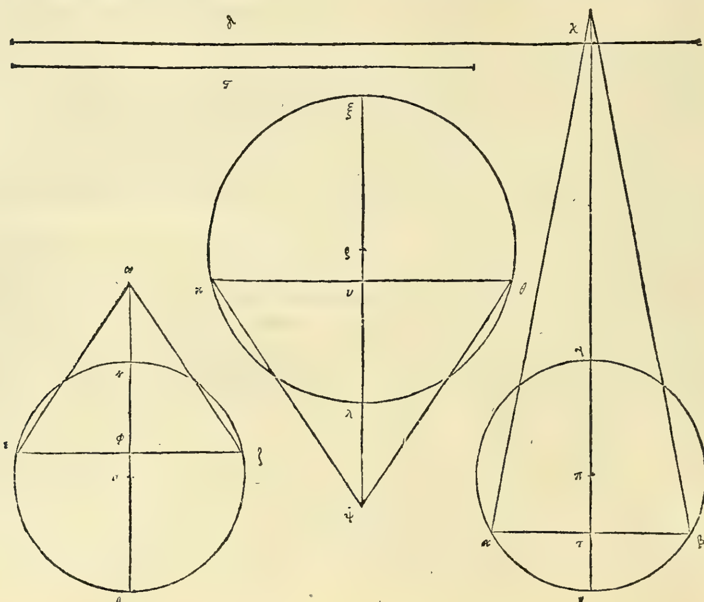
πάλιν

πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ λχ πρὸς δχ, συναμφότερος ἡ κβ, βχ πρὸς βχ. διελόντι, ὡς ἡ λδ πρὸς δχ, οὕτως ἡ κβ πρὸς βχ. καὶ κείσθω τῇ κβ ἴση ἡ βζ. ὅτι γὰρ ἐκτὸς τοῦ ρ πεσεῖται, δῆλον. καὶ ἔσται ὡς ἡ λδ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ζβ πρὸς βχ. ὥστε καὶ ὡς ἡ δλ πρὸς λχ, ἡ βζ πρὸς ζχ. ἐπεὶ δὲ λόγος ἐστὶ τῆς δλ πρὸς λχ δοθείς, καὶ τῆς ρλ ἄρα πρὸς λχ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς ρλ πρὸς λχ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ρλ πρὸς λδ, καὶ ἡ δλ πρὸς λχ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ δβ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. ὡς δὲ ἡ δλ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζχ. ὁ ἄρα τῆς ρλ πρὸς λχ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, καὶ ἡ βζ πρὸς ζχ. πεποιήσθω δὲ ὡς ἡ ρλ πρὸς λχ, ἡ βζ πρὸς ζθ. λόγος δὲ τῆς ρλ πρὸς λχ δοθείς, λόγος ἄρα καὶ τῆς ζβ πρὸς ζθ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ βζ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ζθ, καὶ ὁ τῆς βζ ἄρα λόγος πρὸς ζθ σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, καὶ ἡ βζ πρὸς ζχ. ἀλλ' ὁ βζ πρὸς ζθ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς βζ πρὸς ζχ, καὶ τοῦ τῆς ζχ πρὸς ζθ. κοινὸς ἀφῃρήσθω ὁ τῆς βζ πρὸς ζχ, λοιπὸς ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ βδ, τουτέστι δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, οὕτως ἡ χζ πρὸς ζθ, τουτέστι πρὸς δοθέν. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ζδ εὐθεῖα. παρὰ δοθεῖσαν τὴν δζ. τεμεῖν δεῖ κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὴν χζ πρὸς δοθεῖσαν τὴν ζθ, οὕτως τὸ δοθὲν τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. τοῦτο δὲ οὕτως ἁπλῶς μὲν λεγόμενον οὐκ ἔχει διορισμόν. προστιθεμένων δὲ τῶν προβλημάτων, τῶν ἐνθάδε ὑπαρχόντων, τουτέστι τοῦ τε διπλασίαν εἶναι τὴν δβ τῆς βζ. καὶ τοῦ μείζονα τὴν ζθ τῆς βθ. ὡς κατὰ τὴν ἀνάλυσιν οὐκ ἔχει διορισμόν. καὶ ἔσται τὸ πρόβλημα τοιοῦτον. δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν δβ, βζ. καὶ διπλασίας οὔσης τῆς δβ τῆς βζ, καὶ σημείου ἐπὶ τῆς βζ τοῦ θ, τεμεῖν τὴν δβ κατὰ τὸ χ. καὶ ποιεῖν ὡς τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, τὴν χζ πρὸς ζθ. ἑκάτερα δὲ ταῦτα ἐπὶ τέλει ἀναλυθήσεταί τε καὶ συντεθήσεται.

Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω ὁ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς π πρὸς σ μείζων πρὸς ἐλάσσονα. καὶ δεδόσθω τις σφαῖρα. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου. καὶ ἔστω τομὴ ὁ αβγδ κύκλος, καὶ διάμετρος ἔστω ἡ βδ, κέντρον δὲ τὸ κ. καὶ τῇ κβ ἴση κείσθω ἡ βζ, καὶ τετμήσθω ἡ βζ κατὰ τὸ θ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν θζ πρὸς θβ, τὴν π πρὸς σ. καὶ ἔτι τετμήσθω ἡ βδ κατὰ τὸ χ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν χζ πρὸς θζ, τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. καὶ διὰ τοῦ χ ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω ὀρθὸν πρὸς τὸ βδ. λέγω ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τὴν σφαῖραν, ὥστε εἶναι ὡς τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον, τὴν π πρὸς σ. πεποιήσθω γὰρ ὡς μὲν συναμφότερος ἡ κβ, χ πρὸς βχ, οὕτως ἡ λχ πρὸς δχ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ κδ, χ πρὸς χδ, ἡ ρχ πρὸς χβ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αλ, λγ, αρ, ργ. ἔσται δὴ διὰ τὴν κατασκευὴν ὡς ἐδείξαμεν ἐν τῇ ἀναλύσει, ἴσον τὸ ὑπὸ ρλδ τῷ ὑπὸ λκ. καὶ ὡς ἡ κλ πρὸς λδ, ἡ βδ πρὸς δχ. ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ κλ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ, τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ρλ, λδ τῷ ἀπὸ λκ ἐστὶν ἴσον, ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ λκ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, τουτέστιν ἡ χζ πρὸς ζθ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ κβ, χ πρὸς βχ, οὕτως ἡ λχ πρὸς χδ. ἴση δέ ἐστιν ἡ κβ τῇ βζ. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἡ ζχ πρὸς χβ, οὕτως ἡ δχ πρὸς χδ. ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ χζ πρὸς ζβ, οὕτως ἡ χλ πρὸς λδ. ὥστε καὶ ὡς ἡ λδ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζχ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, οὕτως ἡ χζ πρὸς ζθ. ὡς δὲ ἡ δλ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζχ. καὶ δι' ἴσου ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ, ὡς ἡ ρλ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζθ. καὶ ὡς ἄρα ἡ λχ πρὸς χρ, οὕτως ἡ ζθ πρὸς θβ. ὡς δὲ ἡ ζθ πρὸς θβ, οὕτως ἡ π πρὸς σ. καὶ ὡς ἄρα ἡ λχ πρὸς χρ, τουτέστιν ὁ αγλ κῶνος πρὸς τὸν αργ κῶ-

νου, τουτέστι τὸ α λ γ τμῆμα τῆς σφαίρας, πρὸς τὸ α β γ τμῆμα τῆς σφαίρας, οὕτως ἡ π πρὸς σ.

ε Τῷ δοθέντι τμήματι σφαίρας ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι. ἔστω τὰ δύο δοθέντα τμήματα σφαίρας τὰ α β γ, ε ζ η. καὶ ἔστω τοῦ μὲν α β γ τμήματος βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν α β κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ γ σημεῖον. τοῦ δὲ ε ζ η βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ε ζ, κορυφὴ δὲ τὸ η σημεῖον. δεῖ δὴ εὑρεῖν τμῆμα σφαίρας, ὃ ἔσται τῷ μὲν α β γ τμήματι ἴσον, τῷ δὲ ε ζ η ὅμοιον. εὑρήσθω. καὶ ἔστω τὸ θ κ λ. καὶ ἔστω αὐτοῦ μὲν βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν θ κ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ λ σημεῖον. ἔστωσαν δὴ καὶ κύκλοι ἐν ταῖς σφαίραις οἱ α ν β γ, θ ξ κ λ, ε ο ζ η, διάμετροι δὲ αὐτῶν πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν τῶν τμημάτων αἱ γ ν, λ ξ, η θ. καὶ ἔστω κέντρα τὰ π, ρ, σ. καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν συναμφότερος ἡ π ν, ν τ πρὸς τὴν ν τ, οὕτως ἡ χ τ πρὸς τ γ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ρ ξ, ξ υ πρὸς ξ υ, οὕτως ἡ ψ υ πρὸς υ λ, καὶ ὡς συναμφότερος ἡ σ ο, ο φ

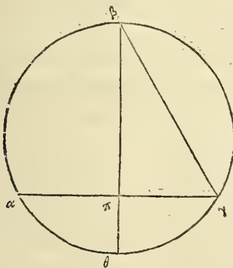


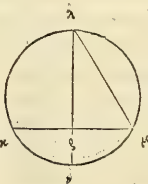
πρὸς ο φ, οὕτως ἡ ω φ πρὸς φ η. καὶ νοείσθωσαν κῶνοι, ὧν βάσεις μέν εἰσιν οἱ περὶ διάμετρον τὴν α β, θ κ, ε ζ κύκλοι, κορυφαὶ δὲ τὰ χ, ψ, ω σημεῖα. ἔστι δὲ ἴσος ὁ μὲν α β χ κῶνος τῷ α β γ τμήματι τῆς σφαίρας, ὁ δὲ ψ θ κ τῷ θ κ λ. ὁ δὲ ε ω ζ τῷ ε η ζ. τοῦτο γὰρ δέδεικται. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ α β γ τμῆμα τῆς σφαίρας τῷ θ κ λ τμήματι, ἴσος ἄρα καὶ ὁ α χ β κῶνος τῷ ψ θ κ κώνῳ. τῶν δὲ ἴσων κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν α β πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν θ κ, οὕτως ἡ ψ υ πρὸς χ τ. ὡς δὲ ὁ κύκλος πρὸς τὸν κύκλον, τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ, οὕτως ἡ ψ υ πρὸς χ τ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ε ζ η τμῆμα τῷ θ κ λ τμήματι, ὅμοιος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ ε ζ ω κῶνος τῷ ψ θ κ κώνῳ. τοῦτο γὰρ δειχθήσεται. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ω φ πρὸς τὴν ε ζ, οὕτως ἡ ψ υ πρὸς θ κ. λόγος δὲ τῆς ω φ πρὸς τὴν ε ζ δοθείς, λόγος ἄρα καὶ τῆς ψ υ πρὸς τὴν θ κ δοθείς, ὁ αὐτὸς ἔστω ὁ τῆς χ τ πρὸς δ. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ χ τ, δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ δ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ψ υ πρὸς χ τ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ, οὕτως ἡ θ κ πρὸς δ. κείσθω τῷ ἀπὸ θ κ ἴσον τὸ ὑπὸ α β, ς. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ, οὕτως ἡ α β πρὸς τὴν ς. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ, οὕτως ἡ θ κ πρὸς δ. καὶ ἐναλλάξ. ὡς ἡ α β πρὸς θ κ, οὕτως ἡ ς πρὸς δ. ὡς δὲ ἡ α β πρὸς θ κ, οὕτως ἡ θ κ πρὸς ς. διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ἀπὸ θ κ τῷ ὑπὸ τῶν α β, ς. ὡς ἄρα ἡ α β πρὸς θ κ, οὕτως ἡ θ κ πρὸς ς, καὶ ἡ ς πρὸς δ. δύο ἄρα δοθεισῶν τῶν α β, δ, δύο μέσαι κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ θ κ, ς.

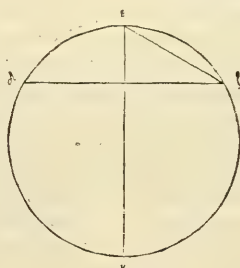
Σωτε-

Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω ᾧ μὲν δεῖ ἴσον τμῆμα συστήσασθαι, τὸ αβγ. ᾧ δὲ ὅμοιον, τὸ εζη. καὶ ἔστωσαν μέγιστοι κύκλοι τῶν σφαιρῶν οἱ αβγν, ηεοζ. διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ γν, ηο. καὶ κέντρα τὰ π, σ. καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν συναμφότερος ἡ πν, ντ πρὸς ντ, οὕτως ἡ χτ πρὸς τγ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ σο, οφ πρὸς οφ, ἡ ωφ πρὸς φη. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν χαβ κῶνος τῷ αβγ τμήματι τῆς σφαίρας. ὁ δὲ ζωε τῷ εηζ. πεποιήσθω ὡς ἡ ωφ πρὸς εζ, οὕτως ἡ χτ πρὸς δ. καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν αβ, δ, δύο μέσαι ἀνὰ λόγον εἰλήφθωσαν αἱ θκ, ς. ὥστε εἶναι, ὡς τὴν αβ πρὸς θκ, οὕτως τὴν κθ πρὸς ς, καὶ τὴν ς πρὸς δ. καὶ ἐπὶ τῆς θκ κύκλου τμῆμα ἐφεστάσθω τὸ θκλ, ὅμοιον τῷ εζη κύκλου τμήματι, καὶ ἀναπεπληρώσθω ὁ κύκλος. καὶ ἔστω αὐτοῦ διάμετρος ἡ λξ. καὶ νοείσθω σφαῖρα ἧς μέγιστος κύκλος ἐστὶν ὁ λθξκ, κέντρον δὲ τὸ ϱ. καὶ διὰ τῆς θκ ἐπίπεδον ὀρθὸν ἐκβεβλήσθω πρὸς τὴν λξ. ἔσται δὴ τὸ τμήματι τῆς σφαίρας τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ λ, ὅμοιον τῷ εζη τμήματι τῆς σφαίρας. ἐπειδὴ καὶ τῶν κύκλων τὰ τμήματα ἦν ὅμοια, λέγω δὲ ὅτι καὶ ἴσον ἐστὶ τῷ αβγ τμήματι τῆς σφαίρας. πεποιήσθω ὡς συναμφότερος ἡ ϱξ, ξυ πρὸς τὴν ξυ, οὕτως ἡ ψυ πρὸς υλ. ἴσος ἄρα ψθκ κῶνος, τῷ θκλ τμήματι τῆς σφαίρας. καὶ ἐπειδὴ ὅμοιός ἐστιν ὁ ψθκ κῶνος τῷ ζωε κώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ωφ πρὸς εζ, τουτέστιν ἡ χτ πρὸς δ, οὕτως ἡ ψυ πρὸς θκ. καὶ ἐναλλὰξ καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἄρα ἡ ψυ πρὸς χτ, ἡ θκ πρὸς δ. καὶ ἐπειδὴ ἀνὰ λόγον εἰσὶν αἱ αθ, κθ, ς, δ, ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θκ, ἡ θκ πρὸς δ. ὡς δὲ ἡ θκ πρὸς δ, ἡ ψυ πρὸς χτ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ κθ, τουτέστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν θκ κύκλος, οὕτως ἡ ψυ πρὸς τὴν χτ. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ χαβ κῶνος τῷ ψθκ κώνῳ. ὥστε καὶ τὸ αβγ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ θκλ τμήματι τῆς σφαίρας. τῷ δοθέντι ἄρα τμήματι τῷ αβγ ἴσον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ὅμοιον τῷ εζη, τὸ αὐτὸ συνέσταται τὸ θκλ.

Δύο δοθέντων σφαίρας τμημάτων, εἴτε τῆς αὐτῆς, εἴτε μή, εὑρεῖν τμῆμα σφαίρας, ὃ ἔσται ἑνὶ μὲν τῶν δοθέντων ὅμοιον, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν ἕξει ἴσην τῇ τοῦ ἑτέρου τμήματος ἐπιφανείᾳ. ς̄ ἔστω τὰ δοθέντα τμήματα σφαιρικὰ ἐπὶ τὰς αβγ, δεζ περιφερείας. καὶ ἔστω ᾧ μὲν δεῖ ὅμοιον εὑρεῖν, τῷ ἐπὶ τὴν αβγ περιφέρειαν. οὗ δὲ τὴν ἐπιφάνειαν ἴσην ἔχειν τῇ ἐπιφανείᾳ, τὸ ἐπὶ τὴν δεζ. καὶ γεγενήσθω καὶ ἔστω τὸ κλμ τῆς σφαίρας, τῷ μὲν αβγ τμήματι ὅμοιον. τὴν δὲ ἐπιφάνειαν ἴσην ἐχέτω τῇ τοῦ δεζ τμήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ νοείσθω τὰ κέντρα τῶν σφαιρῶν. καὶ δι᾽ αὐτῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω ὀρθὰ πρὸς τὰς τῶν τμημάτων βάσεις. καὶ ἐν μὲν ταῖς σφαίραις τομαὶ ἔστωσαν οἱ κλμν, βαγθ, εζηδ μέγιστοι κύκλοι. ἐν δὲ ταῖς βάσεσι τῶν τμημάτων, αἱ κμ, αγ, δζ εὐθεῖαι. διάμετροι δὲ τῶν σφαιρῶν πρὸς ὀρθὰς οὖσαι ταῖς κμ, αγ, δζ, ἔστωσαν αἱ λν, βθ, εη. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λμ, βγ, εζ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ κλμ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφά-



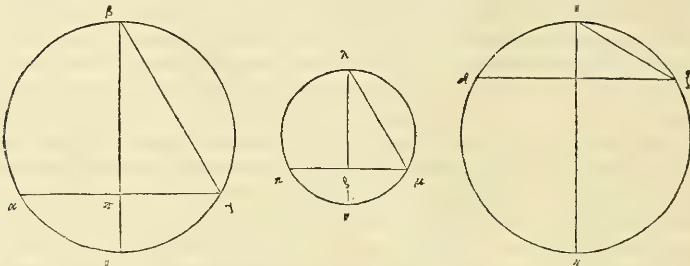




νεια τῇ τοῦ δεζ τμήματος ἐπιφανείᾳ, ἴσος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ εζ. αἱ γὰρ ἐπιφάνειαι τῶν εἰρημένων τοῦ τμημάτων ἴσαι ἐδείχθησαν κύκλοις, ὧν αἱ ἐκ τοῦ κέντρων ἴσαι εἰσὶν ταῖς ἀπὸ τῶν κορυφῶν τμημάτων ἐπὶ τὰς βάσεις ἐπιζευγνυούσαις. ὥστε καὶ ἡ μλ τῇ εζ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ δὲ ὅμοιόν ἐστι τὸ κλμ τῷ αβγ τμήματι, ἔστιν ὡς ἡ ϱλ πρὸς ϱν, ἡ βπ πρὸς πθ. καὶ ἀνάπαλιν. καὶ συνθέντι ὡς ἡ νλ πρὸς λϱ, οὕτως ἡ θβ πρὸς βπ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ϱλ πρὸς λμ, οὕτως ἡ βπ πρὸς γβ. ὅμοια γὰρ τὰ τρίγωνα. ὡς ἄρα ἡ νλ πρὸς λμ, τουτέστι πρὸς εζ, οὕτως ἡ θβ πρὸς βγ. καὶ ἐναλλὰξ. λόγος δὲ τῆς εζ πρὸς βγ δοθείς. δοθεῖσα γὰρ ἑκατέρα. λόγος ἄρα καὶ τῆς λν πρὸς βθ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ βθ. δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ λν, ὥστε καὶ ἡ σφαῖρα δοθεῖσά ἐστι.

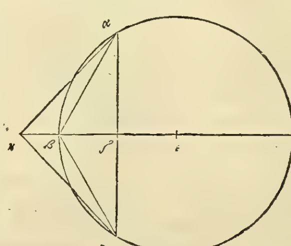
Συντεθήσεται

Συντεθήσεται δὴ οὕτως. ἔστω τὰ δοθέντα δύο τμήματα σφαίρας, τὰ αβγ, δεζ. τὸ μὲν αβγ, ᾧ δεῖ ὅμοιον· τὸ δὲ δεζ, οὗ τὴν ἐπιφάνειαν ἴσην ἔχει τῇ ἐπιφανείᾳ. καὶ τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω τοῖς ἐπὶ τῆς ἀναλύσεως. καὶ πεποιήσθω, ὡς μὲν ἡ βγ πρὸς εζ, οὕτως ἡ βθ πρὸς λν. καὶ περὶ διάμετρον τὴν λν κύκλος γεγράφθω. καὶ νοείσθω σφαῖρα ἧς μέγιστος ἔστω κύκλος ὁ λκνμ. καὶ τετμήσθω ἡ νλ κατὰ τὸ ρ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν θπ πρὸς πβ, τὴν νρ πρὸς ρλ. καὶ διὰ τοῦ ρ ἐπιπέδῳ τετμήσθω ἡ ἐπιφάνεια ὀρθῷ πρὸς τὴν λν. καὶ ἐπιζεύχθω ἡ λμ. ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ ἐπὶ τῶν κμ, αγ



βεβηκότα τῶν κύκλων τμήματα, ὥστε καὶ τὰ τμήματα τῶν σφαιρῶν ἐστὶν ὅμοια. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ θβ πρὸς βπ, οὕτως ἡ νλ πρὸς λρ. καὶ γὰρ τὰ κατὰ διαίρεσιν. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ πβ πρὸς βγ, οὕτως ἡ ρλ πρὸς λμ. καὶ ὡς ἄρα ἡ θβ πρὸς νλ, ἡ βγ πρὸς λμ. ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ θβ πρὸς λν, ἡ βγ πρὸς εζ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ εζ τῇ λμ. ὥστε καὶ ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ εζ, ἴσος ἐστὶ κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ λμ. καὶ ὁ μὲν τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων τὴν εζ κύκλος, ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δεζ τμήματος. ὁ δὲ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ λμ, ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κλμ τμήματος. τοῦτο γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ δέδεικται. ἴση ἄρα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κλμ τμήματος τῆς σφαίρας, τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δεξ τμήματος, καὶ ἐστὶν ὅμοιον τὸ κλμ τῷ αβγ.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας τμῆμα τεμεῖν ἐπιπέδῳ, ὥστε τὸ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, καὶ ὕψος ἴσον, τὸν δοθέντα λόγον ἔχειν. ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ βδ. δεῖ δὴ τὴν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν τῷ διὰ τῆς αγ, ὅπως τὸ αβγ τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸν αβγ κῶνον λόγον ἔχῃ τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι. γεγονέτω καὶ ἔστω κέντρον τῆς σφαίρας τὸ ε. καὶ ὡς συναμφότερος ἡ εδζ πρὸς δζ, οὕτως ἡ ηζ πρὸς ζβ. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ αγη κῶνος τῷ αβγ τμήματι. λόγος ἄρα καὶ τοῦ αηγ κώνου πρὸς τὸν αβγ κῶνον δοθείς. λόγος ἄρα τῆς ηζ πρὸς ζβ δοθείς. ὡς δὲ ἡ ηζ πρὸς ζβ συναμφότερος ἡ εδζ πρὸς δζ. λόγος ἄρα συναμφοτέρου τῆς εδζ πρὸς δζ δοθείς, ὥστε καὶ τῆς εδ πρὸς δζ. δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ δζ, ὥστε καὶ ἡ αγ. καὶ ἐπεὶ συναμφότερος ἡ εδζ πρὸς δζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ εδβ πρὸς δβ. καὶ ἔστι συναμφότερος μὲν ἡ εδβ τρὶς ἡ εδ. ἡ δὲ βδ δὶς ἡ εδ. συναμφότερος ἄρα ἡ εδζ πρὸς δζ, μείζονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει τρία πρὸς δύο. καὶ ἔστιν ὁ συναμφοτέρου τῆς εδζ πρὸς ζδ λόγος ὁ αὐτὸς τῷ δοθέντι. δεῖ ἄρα τὸν διδόμενον λόγον εἰς τὴν σύνθεσιν μείζονα εἶναι, τοῦ ὃν ἔχει τρία πρὸς δύο.



Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ. διάμετρος δὲ ἡ βδ. κέντρον δὲ τὸ ε. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς κθ πρὸς κλ, μείζων τοῦ ὃν ἔχει τρία πρὸς δύο. ἔστι δὲ ὡς τρία πρὸς δύο, συναμφότερος ἡ εδβ πρὸς δβ. καὶ ἡ θκ ἄρα πρὸς κλ μείζονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει συναμφότερος ἡ εδβ πρὸς δβ. διελόντι ἄρα ἡ θλ πρὸς λκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εδ πρὸς δβ. καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ θλ πρὸς λκ, οὕτως ἡ εδ πρὸς δζ. καὶ διὰ τοῦ ζ τῇ βδ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ αζγ. καὶ διὰ τῆς αγ ἤχθω ἐπίπεδον

θω ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὴν βδ. λέγω ὅτι τὸ αβγ τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸν αβγ κῶνον λόγον ἔχει τὸν αὐτὸν τῷ θκ πρὸς κλ. πεποιήσθω γὰρ ὡς συναμφότερος ἡ εδζ πρὸς δζ, οὕτως ἡ κζ πρὸς ζβ. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ γακ κῶνος τῷ αβγ τμήματι τῆς σφαίρας. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ θκ πρὸς κλ, οὕτως συναμφότερος ἡ εδζ πρὸς δζ, τουτέστιν ἡ κζ πρὸς ζβ, τουτέστιν ὁ ακγ κῶνος, πρὸς τὸν αβγ κῶνον. ἴσος δὲ ὁ ακγ κῶνος τῷ αβγ τμήματι τῆς σφαίρας. ὡς ἄρα τὸ αβγ τμῆμα πρὸς τὸν αβγ κῶνον, οὕτως ἡ θκ πρὸς κλ.

η

Ἐὰν σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμηθῇ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον, ἐλάσσονα μὲν λόγον ἔχει, ἢ διπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ μείζονος τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ἐλάσσονος ἐπιφάνειαν. μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον. ἔστω σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ. καὶ διάμετρος ἡ βδ. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τῆς αγ ὀρθῷ πρὸς τὸν αβγδ κύκλον. καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τῆς σφαίρας τὸ αβγ, λέγω ὅτι τὸ αβγ τμῆμα πρὸς τὸ αδγ, ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βα, αδ. καὶ ἔστω κέντρον τὸ ε. καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν συναμφότερος ἡ εδζ πρὸς δζ, ἡ θζ πρὸς ζβ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ εβζ πρὸς βζ, οὕτως ἡ κζ πρὸς ζδ. καὶ νοείσθωσαν κῶνοι, βάσιν ἔχοντες τὸν περὶ διάμετρον τὴν αβγ κύκλον, κορυφὰς δὲ τὰ θ, κ σημεῖα. ἔσται δὴ ἴσος ὁ μὲν αθγ κῶνος τῷ αβγ τμήματι τῆς σφαίρας, ὁ δὲ αγκ τῷ αδγ. καὶ ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ αδ, οὕτως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αβγ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ αδγ τμήματος. τοῦτο γὰρ προγέγραπται. δεικτέον ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ἔλασσον, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλάσιον, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. λέγω ὅτι καὶ ὁ αθγ κῶνος πρὸς τὸν ακγ, τουτέστιν ἡ ζθ πρὸς ζκ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ αδ, τουτέστιν ἡ βζ πρὸς ζδ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς μὲν συναμφότερος ἡ εδζ πρὸς δζ, οὕτως ἡ θζ πρὸς ζβ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ εβζ πρὸς βζ, οὕτως ἡ ζκ πρὸς ζδ. ἔσται καὶ ὡς ἡ βζ πρὸς ζδ, ἡ θβ πρὸς βε. ἴση γὰρ ἡ βε τῇ δε. τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς ἐπάνω συναποδέδεικται. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ εβζ πρὸς βζ, ἡ κζ πρὸς ζδ. ἔστω τῇ βε ἴση ἡ βκ. δῆλον γὰρ ὅτι μεῖζόν ἐστιν ἡ θβ τῆς βε. ἐπεὶ καὶ ἡ βζ τῆς ζδ. καὶ ἔσται ὡς ἡ κζ πρὸς ζβ, ἡ κζ πρὸς ζδ. ὡς δὲ ἡ ζβ πρὸς ζδ, ἐδείχθη ἡ θβ πρὸς βε. ἴση δὲ ἡ βε τῇ κβ. ὡς ἄρα ἡ θβ πρὸς βκ, οὕτως ἡ κζ πρὸς ζκ. καὶ ἐπεὶ ἡ θζ πρὸς ζκ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θβ πρὸς βκ. ὡς δὲ ἡ θβ πρὸς βκ, ἐδείχθη ἡ κζ πρὸς ζκ. ἡ θζ ἄρα πρὸς ζκ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κζ πρὸς ζκ. ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν θζκ, τοῦ ἀπὸ ζκ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν θζκ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ, τουτέστιν ἡ ζθ πρὸς ζκ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς κζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ. τὸ δὲ ἀπὸ κζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ, διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ κζ πρὸς ζκ. ἡ ἄρα θζ πρὸς ζκ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ διπλασίονα τοῦ ὃν ἔχει ἡ κζ πρὸς ζκ. (ἡ
ζ κζ πρὸς

κζ πρὸς ζκ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλασίονα τοῦ ὃν ἔχει ἡ βζ πρὸς ζδ.) τοῦτο γὰρ ἐζητοῦμεν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βε τῇ εδ, ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βζδ τοῦ ὑπὸ τῶν βεδ. ἡ ζβ ἄρα πρὸς βε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εδ πρὸς δζ. τουτέστιν ἡ θβ πρὸς βζ. ἔλασσον ἄρα τὸ ἀπὸ ζβ τοῦ ὑπὸ τῶν θβε. τουτέστι τοῦ ὑπὸ τῶν θβκ. ἔστω ἴσον τὸ ἀπὸ βν τῷ ὑπὸ θβκ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ θβ πρὸς βκ, τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ. τὸ δὲ ἀπὸ θζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ, μείζονα λόγον ἔχει ἢ τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ νκ. τὸ ἀπὸ θζ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θβ πρὸς βκ, τουτέστιν ἡ θβ πρὸς βε, τουτέστιν ἡ κζ πρὸς ζκ. ἡ ἄρα θζ πρὸς ζκ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τοῦ τῆς κζ πρὸς ζκ. τοῦτο γὰρ ἐπὶ τέλει. καί ἐστιν ὡς μὲν ἡ θζ πρὸς ζκ, ὁ αθγ κῶνος πρὸς τὸν ακγ κῶνον. τουτέστι τὸ αβγ τμῆμα πρὸς τὸ αδγ τμῆμα. ὡς δὲ ἡ κζ πρὸς ζκ, ἡ βζ πρὸς ζδ, τουτέστι τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ αδ. τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αβγ τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ αδγ τμήματος. ἄλλο δὲ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον, ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον.

Ἄλλως. Ἔστω σφαῖρα, ἐν ᾗ μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ. διάμετρος δὲ ἡ αγ. κέντρον δὲ τὸ ε. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ὀρθῷ διὰ τῆς βδ πρὸς τὴν αγ. λέγω ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ δαβ πρὸς τὸ ἔλασσον τὸ βγδ, ἐλάσσονα ἢ διπλάσιον λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αβδ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ βγδ τμήματος. μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αβ, βγ. ὁ δὲ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγος, ὁ τοῦ κύκλου ἐστὶν οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ αβ, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ βγ, τουτέστιν ὁ τῆς αθ πρὸς τὴν θγ. κείσθω τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἴση ἑκατέρα τῶν αζ, γη. ὁ δὲ τοῦ βαδ τμήματος πρὸς τὸ βγδ λόγος συνῆπται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ βαδ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον, οὗ ἡ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ α σημεῖον. καὶ ὁ αὐτὸς κῶνος πρὸς τὸν κῶνον βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτήν, κορυφὴν δὲ τὸ γ σημεῖον, καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος πρὸς τὸ βγδ τμῆμα. ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ βαδ τμήματος λόγος, πρὸς τὸν βαδ κῶνον, ὁ τῆς ηθ ἐστὶ πρὸς θγ. ὁ δὲ τοῦ κώνου, πρὸς τὸν κῶνον ὁ τῆς αθ πρὸς θγ. ὁ δὲ τοῦ βγδ κώνου πρὸς τὸ τμῆμα τὸ βγδ, ὁ τῆς αθ ἐστὶ πρὸς θζ. ὁ δὲ συνημμένος ἐκ τοῦ τῆς ηθ πρὸς θγ, καὶ τῆς αθ πρὸς θγ, ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν αθη ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ηθ, θα, πρὸς τὸ ἀπὸ θγ μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θζ. ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν ηθ, θα ἐστὶν ἐπὶ τὴν θα, πρὸς τὸ ἀπὸ θγ, ἐπὶ τὴν θζ. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ τῶν ηθα ἐπὶ τὴν θα, πρὸς τὸ ἀπὸ θγ ἐπὶ τὴν θη, ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς θα ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ θα ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν ζθ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ. διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν ηθ, πρὸς τὸ ἀπὸ θγ ἐπὶ τῆς θζ. ὅτι ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν ζθ, τοῦ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θη. ὅτι ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ θζ τῆς θη, φημὶ διότι καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον λόγον μείζονα ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς ἐπιφάνειαν λόγου. ἀλλ' ὁ μὲν τῶν τμημάτων ἐδείχθη, ὁ αὐτὸς ὢν ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ θγ ἐπὶ τὴν θζ. τοῦ δὲ τῆς ἐπιφανείας λόγου, ἡμιόλιός ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ αβ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ βγ κύβον. φημὶ δή, ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ ἀπὸ τῆς αβ κύβος, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς βγ κύβον. τουτέστιν ὁ ἀπὸ τῆς αθ κύβος, πρὸς τὸν ἀπὸ θβ κύβον. τουτέστιν ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ. καὶ ὅταν αθ πρὸς θβ, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, προσλαβὼν τὸν τῆς αθ πρὸς θβ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ ἐστὶν πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν γθβ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν θβγ, ὁ τοῦ ἀπὸ αθ ἐστὶν ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν θβγ ἐπὶ τὴν θη. φημὶ δὴ ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ βθγ. τουτέστι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ ἐπὶ τὴν θη. δεικτέον οὖν ὅτι τὸ ἀπὸ θγ ἐπὶ τὴν θζ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν βθγ, ἐπὶ τῆς ηθ. ὃ ταὐτόν ἐστι τῷ δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ηθ πρὸς θζ. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ ε τῇ εγ πρὸς ὀρθὰς ἡ εκ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ β κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ βλ. ἐπίλοιπον ἡμῖν δεῖξαι, διότι ἡ ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἴση δὲ ἐστὶν ἡ θζ

συναμφοτέρῳ

συναμφοτέρων τῇ αθ, κε. δεῖξαι ἄρα δεῖ, ὅτι ἡ κθ πρὸς συναμφότερον τὴν θα, κε, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. καὶ ἀφαιρεθείσης ἄρα ἀπὸ τῆς θκ τῆς γθ, ἀπὸ δὲ τῆς κε, τῆς ελ ἴσης τῇ βθ, δεήσει δειχθῆναι, ὅτι λοιπὴ ἡ γκ πρὸς λοιπὴν συναμφότερον τὴν αθ, κλ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ, τουτέστιν ἡ θβ πρὸς θα. τουτέστιν ἡ λε πρὸς θα. καὶ ἐναλλάξ. ὅτι ἡ κε πρὸς ελ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλ, θα, πρὸς θα. καὶ διελόντι, ἡ κλ πρὸς λε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κλ πρὸς θα. ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἡ λε τῆς θα.

Τῶν ὑπὸ τῇ ἴσῃ ἐπιφανείᾳ περιεχομένων σφαιρικῶν τμημάτων, μεῖζόν ἐστι τὸ ἡμισφαίριον. ἔστω γὰρ σφαίρας μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ αγ. καὶ ἄλλη σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ εζηθ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ εη. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ἡ μὲν ἑτέρα σφαῖρα διὰ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ ἑτέρα μὴ διὰ τοῦ κέντρου. ἔστω δὲ τὰ μὲν τέμνοντα ἐπίπεδα ὀρθὰ πρὸς τὰς αγ, εη διαμέτρους. καὶ τετμήσθωσαν κατὰ τὰς δβ, ζθ γραμμάς. ἔστι δὴ τὸ μὲν κατὰ τὴν ζεθ περιφέρειαν τμῆμα τῆς σφαίρας ἡμισφαίριον, τῶν δὲ κατὰ τὴν βαδ περιφέρειαν τομῶν. γὰρ μὲν τῷ ἑτέρῳ σχήματι πρὸς ὃ τὸ σ σημεῖον μεῖζον ἡμισφαιρίου. ἐν δὲ τῷ ἑτέρῳ ἔλασσον ἡμισφαιρίου. ἴσαι δὲ ἔστωσαν αἱ τῶν εἰρημένων τμημάτων ἐπιφάνειαι. θ

λέγω οὖν ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ κατὰ τὴν ζεθ περιφέρειαν ἡμισφαίριον, τοῦ κατὰ τὴν βαδ περιφέρειαν τμήματος. ἐπεὶ γὰρ ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν εἰρημένων τμημάτων, φανερὸν ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ βα τῇ εζ εὐθείᾳ. δέδεικται γὰρ ἑκάστου τμήματος ἡ ἐπιφάνεια ἴση οὖσα κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος εὐθείᾳ ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅ ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡμίσεως κύκλου ἡ βαδ περιφέρεια ἐν τῷ ἑτέρῳ σχήματι, πρὸς ὃ τὸ σ σημεῖον, δῆλον ὅτι ἡ βα ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασίων δυνάμει τῆς ακ, τῆς δὲ ἐκ τοῦ κέντρου μείζων ἢ διπλασίων δυνάμει. ἔστω δὲ καὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ αβδ κύκλου ἴση ἡ γξ. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ γξ πρὸς τὴν γκ, τοῦτον ἐχέτω ἡ μα πρὸς ακ. ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου περὶ διάμετρον τὴν βδ κῶνος ἔστω, κορυφὴν ἔχων τὸ μ σημεῖον. ἴσος δὴ ἐστὶν οὗτος τῷ κατὰ τὴν βαδ περιφέρειαν τμήματι τῆς σφαίρας. ἔστω καὶ τῇ ελ ἴση ἡ εν. καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν θζ κῶνος, ἔστω κορυφὴν ἔχων τὸ ν σημεῖον. ἴσος δὴ καὶ οὗτός ἐστι τῷ κατὰ τὴν θεζ περιφέρειαν ἡμισφαιρίῳ. τὸ δὴ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν

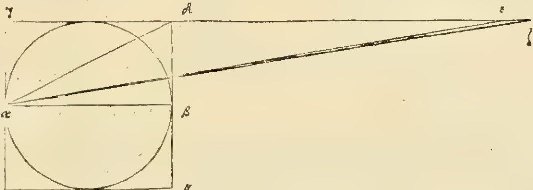
αρ̄γ μεῖζόν ἐστι τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ακ̄γ. διότι τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν τοῦ ἐλάσσονος τοῦ ἑτέρου μείζονα ἔχει. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ᾱρ, ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ᾱκ, γ̄ξ. ἥμισυ γάρ ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ᾱβ. μεῖζον οὖν ἐστι καὶ τὸ συναμφότερον τοῦ συναμφοτέρου. τὸ ἄρα περιεχόμενον ὑπὸ τῶν γᾱρ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ξκ̄α. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ξκ̄α, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν μκ̄γ. ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν γᾱρ, τοῦ ὑπὸ τῶν μκ̄γ. ὥστε μείζονα λόγον ἔχει ἡ γ̄α πρὸς τὴν κ̄γ, ἤπερ ἡ μ̄κ πρὸς τὴν ᾱρ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ᾱγ πρὸς τὴν γ̄κ, τοῦτον ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς ᾱβ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β̄κ. δῆλον οὖν, ὅτι μείζονα λόγον ἔχει τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ τῆς ᾱβ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ ᾱρ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β̄κ, ἤπερ ἡ μ̄κ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ᾱρ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ λ̄ν. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ζ̄θ, πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν β̄δ, ἢ ἡ μ̄κ πρὸς τὴν μ̄λ. ὥστε μείζων ἐστὶν ὁ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον μὲν τὴν ζ̄θ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ ν̄ σημεῖον τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος κύκλον τὸν περὶ διάμετρον μὲν τὴν β̄δ, κορυφὴν δὲ τὸ μ̄ σημεῖον. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ ἡμισφαίριον τὸ κατὰ τὴν εζθ περιφέρειαν, μεῖζόν ἐστι τοῦ τμήματος τοῦ κατὰ τὴν βᾱδ περιφέρειαν.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ.

α Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει. ἐχέτω ὁ αβ̄γδ κύκλος, ὡς ὑπόκειται· λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ τῷ ε̄. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μείζων ὁ κύκλος, καὶ ἐγγεγράφθω τὸ ᾱγ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα. καὶ ἔστω τὰ τμήματα ἤδη ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύκλος τοῦ τριγώνου. τὸ εὐθύγραμμον ἄρα ἔτι τοῦ τριγώνου ἐστὶ μεῖζον. εἰλήφθω κέντρον τὸ ν̄, καὶ κάθετος ἡ ν̄ξ. ἐλάσσων ἄρα ἡ ν̄ξ τῆς τοῦ τριγώνου πλευρᾶς. ἔστι δὲ καὶ ἡ περίμετρος τοῦ εὐθυγράμμου τῆς λοιπῆς ἐλάττων. ἐπεὶ καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιμέτρου. ἔλαττον ἄρα τὸ εὐθύγραμμον τοῦ ε̄ τριγώνου, ὅπερ ἄτοπον. ἔστω δὲ ὁ κύκλος, εἰ δυνατόν, ἐλάττων τοῦ ε̄ τριγώνου. καὶ περιγεγράφθω τὸ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα. καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι διὰ τῶν σημείων, ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ οᾱρ. ἡ ο̄ρ ἄρα τῆς μ̄ρ ἐστὶ μείζων. ἡ γὰρ ρ̄μ τῇ ρ̄α ἴση ἐστί. καὶ τὸ ρο̄π τρίγωνον ἄρα τοῦ οζ̄αμ σχήματος μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ. λελείφθωσαν οἱ τῷ πζ̄α τομεῖς ὅμοιοι ἐλάσσους τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ε̄ τρίγωνον τοῦ αβ̄γδ κύκλου. ἔστιν ἄρα τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἔτι τοῦ ε̄ ἔλασσον, ὅπερ ἄτοπον. ἔστι γὰρ μεῖζον, ὅτι ἡ μὲν ν̄α ἴση ἐστὶ τῇ καθέτῳ τοῦ τριγώνου. ἡ δὲ περίμετρος μείζων ἐστὶ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου. ἴσος ἄρα ὁ κύκλος τῷ ε̄ τριγώνῳ.

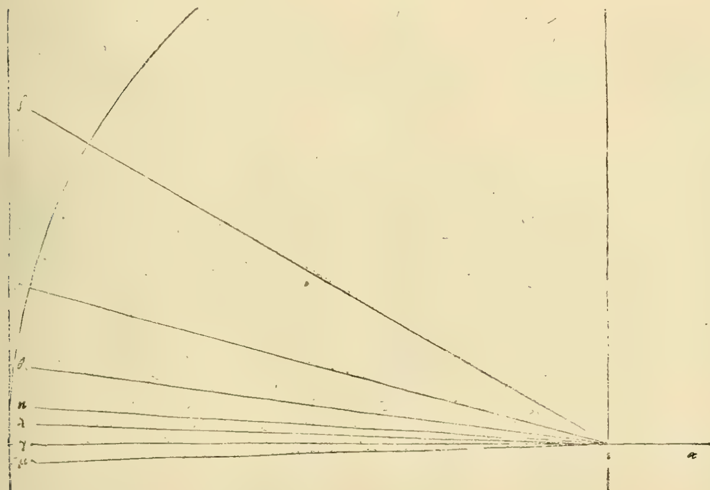
β Ὁ κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον, λόγον ἔχει, ὃν ι̅α πρὸς ι̅δ. ἔστω κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ᾱβ.

αβ. καὶ περιγεγράφθω τετράγωνον τὸ γη δ. καὶ τῆς γδ διπλῆ, ἡ δε. ἑβδόμου δὲ ἡ εζ τῆς γδ.



ἐπεὶ οὖν τὸ αγε πρὸς τὸ αγδ λόγον ἔχει, ὃν κα πρὸς ζ. πρὸς δὲ τὸ αεζ τὸ αγδ λόγον ἔχει, ὃν ἑπτὰ πρὸς ἕν. τὸ αγζ πρὸς τὸ αγδ ἐστιν, ὡς κβ πρὸς ζ. ἀλλὰ τοῦ αγδ τετραπλάσιόν ἐστι, τὸ γη τετράγωνον. τὸ δὲ αγζ τρίγωνον, τῷ αβ κύκλῳ ἴσον ἐστίν, ἐπεὶ ἡ μὲν αγ καθετὸς ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ἡ δὲ βάσις τῆς διαμέτρου τριπλασίων, καὶ τῆς ζ ἔγγιστα ὑπερέχουσα δειχθήσεται. ὁ κύκλος οὖν πρὸς τὸ γη τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν ια πρὸς ιδ.

Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστί. καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις. ἔστω κύκλος, καὶ διάμετρος ἡ αγ, καὶ κέντρον τὸ ε, καὶ ἡ γλζ ἐφαπτομένη. καὶ ἡ ὑπὸ ζεγ τρίτου ὀρθῆς. ἡ εζ ἄρα πρὸς ζγ λόγον ἔχει, ὃν τς πρὸς ρνγ. ἡ δὲ εγ πρὸς τὴν γζ λόγον ἔχει, ὃν σξε πρὸς ρνγ. τετμήσθω οὖν ἡ ὑπὸ ζεγ δίχα τῇ εη. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζε πρὸς εγ, ἡ ζη πρὸς ηγ. καὶ ἐναλλὰξ. καὶ συνθέντι, ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ ζε, εγ πρὸς ζγ, ἡ εγ πρὸς γη. ὥστε ἡ γε πρὸς γη μείζονα λό- γ



γον ἔχει, ἤπερ φοα πρὸς ρνγ. ἡ εη ἄρα πρὸς ηγ δυνάμει, λόγον ἔχει, ὃν Μ θυν πρὸς Μ γυθ. μήκει ἄρα ὃν φϙα πρὸς ρνγ. πάλιν δίχα ἡ ὑπὸ ηεγ τῇ εθ. διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα ἡ εγ πρὸς γθ, μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ,αρξβ ἡ πρὸς ρνγ. ἡ θε ἄρα πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ,αροβ ἡ πρὸς ρνγ. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ θεγ τῇ εκ. ἡ εγ ἄρα πρὸς γκ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,βτλδ δ΄ πρὸς ρνγ. ἡ εκ ἄρα πρὸς γκ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ,βτλθ δ΄ πρὸς ρνγ. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ κεγ τῇ λε. ἡ εγ ἄρα πρὸς λγ μείζονα μήκει λόγον ἔχει, ἤπερ ,δχογ ∠ πρὸς ρνγ. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ζεγ τρίτου οὖσα ὀρθῆς τέτμηται τετράκις δίχα, ἡ ὑπὸ λεγ, ὀρθῆς ἐστι μη. κείσθω οὖν αὐτῇ ἴση. ἡ πρὸς τῷ ε, ἡ ὑπὸ γεμ. ἡ ἄρα ὑπὸ λεμ ὀρθῆς ἐστι κδ. καὶ ἡ λμ ἄρα εὐθεῖα πλευρά ἐστιν τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου πολυγώνου πλευρὰς ἔχοντος ϟς. ἐπεὶ οὖν ἡ εγ πρὸς τὴν γλ ἐδείχθη μείζονα λό- λδ β μ μ

γον ἔχουσα, ἥπερ ͵δχογ ∠ πρὸς ͵ερνγ. ἀλλὰ τῆς μὲν εγ διπλῆ ἡ αγ. τῆς δὲ γλ διπλασίων ἡ λμ. καὶ ἡ αγ ἄρα πρὸς τὴν τοῦ ϙϛ πολυγώνου περίμετρον μείζονα λόγον ἔχει, ἥπερ ͵δχογ ∠ πρὸς α μ †μ ͵δχπη. καί ἐστι τριπλασία. καὶ ὑπερέχουσι χξζ ∠ ἅπερ τῶν ͵δχογ ∠, ἐλάσσονα ἐστὶ τοῦ ἑβδόμου, ὥστε τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν κύκλον τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλάσιον, καὶ ἔλαττον ἢ τῷ ἑβδόμῳ μέρει μεῖζον. ἡ τοῦ κύκλου ἄρα περίμετρος πολὺ μᾶλλον ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τριπλασίων, καὶ ἑβδόμῳ μέρει μείζων.

δ Ἔστω κύκλος, καὶ διάμετρος ἡ αγ. ἡ δὲ ὑπὸ βαγ τρίτου ὀρθῆς. ἡ αβ ἄρα πρὸς βγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵ατνα πρὸς ψπ. ἡ δὲ αγ πρὸς γβ, ὃν ͵αφξ πρὸς ψπ. τετμήσθω δίχα ἡ ὑπὸ βαγ τῇ αη. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαη τῇ ὑπὸ ηγβ, ἀλλὰ καὶ τῇ ὑπὸ ηαγ. καὶ ἡ ὑπὸ ηγβ ἄρα, τῇ ὑπὸ ηαγ ἐστὶν ἴση. καὶ κοινὴ ἡ ὑπὸ αηγ ὀρθή, καὶ τρίτη ἄρα ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ηζγ τρίτῃ τῇ ὑπὸ αγη. ἰσογώνιον ἄρα τὸ αηγ τῷ γηζ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αη πρὸς ηγ, ἡ γη πρὸς ηζ, καὶ ἡ αγ πρὸς γζ. ἀλλ' ὡς ἡ αγ πρὸς γζ, καὶ συναμφότερος ἡ γαβ πρὸς βγ. καὶ ὡς συναμφότερος ἄρα ἡ βαγ πρὸς βγ, ἡ αη πρὸς ηγ. διὰ τοῦτο οὖν ἡ αη πρὸς τὴν ηγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἥπερ ͵βϡια πρὸς ψπ. ἡ δὲ αγ πρὸς τὴν γη ἐλάσσονα, ἢ ὃν ͵γιγ ∠ δ' πρὸς ψπ. δίχα ἡ ὑπὸ γαη τῇ αθ. ἡ αθ ἄρα διὰ τὰ αὐτὰ πρὸς τὴν θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵ελκδ ∠ δ' πρὸς ψπ, ἢ ὃν ͵αωκγ πρὸς σμ. ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας δ ιγ. ὥστε ἡ αγ πρὸς τὴν γθ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵αωλη θ' πρὸς σμ. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ θαγ τῇ κα. καὶ ἡ κα, πρὸς τὴν κγ ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵αζ πρὸς ξς. ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας οἶμαι ἄρα πρὸς τὴν κατάλογον ͵αος πρὸς ξς. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ καγ τῇ λα. ἡ αλ ἄρα πρὸς τὴν λγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν τὰ ͵βιϛ ϛ' πρὸς ξς. ἡ δὲ αγ πρὸς γλ ἐλάσσονα, ἢ τὰ ͵βιζ δ' πρὸς ξς. ἀνάπαλιν ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν διάμετρον μείζονα ἔχει λόγον ἥπερ ͵ϛτ ιλϛ πρὸς ͵μαζιβ δ'. ἅπερ τῶν ͵βιζ δ' μείζονά ἐστιν ἢ τριπλασίονα καὶ δέκα οα, καὶ ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ ϙϛ πολυγώνου τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τῆς διαμέτρου, τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ δέκα οα. ὥστε καὶ ὁ κύκλος ἔτι μᾶλλον τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων, ἢ δέκα οα. ἡ ἄρα τοῦ κύκλου περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ, καὶ ἐλάσσων μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μείζων δέ.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΚΩΝΟΕΙΔΕΩΝ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΟΕΙΔΕΩΝ.

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΔΩΣΙΘΕΩ ΕΥ ΠΡΑΤΤΕΙΝ.



ΠΟΣΤΕΛΛΩ σοι γράψας ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ τῶν τε λοιπῶν θεωρημάτων τὰς ἀποδείξιας, ὧν οὐκ εἶχες ἐν τοῖς πρότερον ἀπεσταλμένοις, καὶ ἄλλων ὕστερον ποτεξευρημένων, ἃ πρότερον μὲν ἤδη πολλάκις ἐγχειρήσας ἐπισκέπτεσθαι δύς ποτ᾽ ὅλον ἔχειν τι φανείσας μοι τὰς εὑρέσιας αὐτῶν ἠπόρησα. διόπερ οὐδὲ συνεξεδόθεν τοῖς ἄλλοις αὐτὰ τὰ προβεβλημένα. ὕστερον δὲ ἐπιμελέστερον ποτ᾽ αὐτοῖς γενόμενος ἐξεῦρον τὰ ἀπορηθέντα. ἦν δὲ τὰ μὲν λοιπὰ τῶν προτέρων θεωρημάτων περὶ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος προβεβλημένα, τὰ δὲ νῦν ἐντὶ ποτεξευρημένα περί τε ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος, καὶ περὶ σφαιροειδέων σχημάτων, ὧν τὰ μὲν παραμάκεα, τὰ δὲ ἐπιπλατέα καλέω. περὶ μὲν οὖν τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὑπόκειτο τάδε. εἴκα ὀρθογωνίου κώνου τομὰ μενούσας τᾶς διαμέτρου περιενεχθεῖσα ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, τὸ περιλαφθὲν σχῆμα ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ὀρθογώνιον κωνοειδὲς καλείσθω, καὶ ἄξονα μὲν αὐτοῦ, τὰν μεμενακοῦσαν διάμετρον καλεῖσθαι. κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ᾽ ὃ ἅπτεται ὁ ἄξων τᾶς τοῦ κωνοειδέος ἐπιφανείας. καὶ εἴκα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος σχήματος ἐπίπεδον ἐπιψαύῃ, παρὰ δὲ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθὲν ἀποτέμῃ τι τμῆμα τοῦ κωνοειδέος, βάσιν μὲν καλεῖσθαι τοῦ ἀποτμαθέντος τμάματος τὸ ἐπίπεδον τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ κωνοειδέος τομᾶς, ἐν τῷ ἀποτέμνοντι ἐπιπέδῳ, κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον καθ᾽ ὃ ἐπιψαύει τὸ ἕτερον ἐπίπεδον τοῦ κωνοειδέος. ἄξονα δὲ τὰν ἐναπολαφθεῖσαν εὐθεῖαν ἐν τῷ τμήματι, ἀπὸ τᾶς ἀχθείσας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμήματος παρὰ τὸν ἄξονα τοῦ κωνοειδέος. προεβάλλοντο δὲ τάδε θεωρῆσαι, διά τι εἴκα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος τμάματα ἀποτμαθῇ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ἡμιόλιον ἐσσεῖται τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. καὶ διατί εἴκα ἀπὸ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα ἀποτμαθέντα ἐπιπέδοις ὁπωσοῦν ἀγμένοις, τὰ ἀποτμαθέντα τμάματα διπλάσιον λόγον ἑξοῦντι ποτὶ τὰ ἄλλα τῶν ἀξόνων. περὶ δὲ τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ὑποτιθέμεθα μὲν τάδε. εἴκα ἐν ἐπιπέδῳ ἐῶντι ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, καὶ διάμετρος αὐτᾶς, καὶ ἔγγιστα τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου τομᾶς. μενούσας δὲ τᾶς διαμέτρου περιενεχθὲν τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ εἰρημέναι γραμμαί, ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, αἱ μὲν ἔγγιστα εὐθεῖαι τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς, δῆλον ὡς κῶνον ἰσοσκελῆ περιλαψοῦντι, οὗ κορυφὴ ἐσσεῖται τὸ σαμεῖον καθ᾽ ὃ ἔγγιστα συμπίπτοντι. ἄξων δὲ ἁ μεμενακοῦσα διάμετρος. τὸ δ᾽ ὑπὸ τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς σχῆμα περιλαφθέν, ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς καλεῖσθαι. ἄξονα δὲ αὐτοῦ τὰν μεμενακοῦσαν διάμετρον. κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ᾽ ὃ ἅπτεται ὁ ἄξων τᾶς ἐπιφανείας τοῦ κωνοειδέος. τὸν δὲ κῶνον τὸν περιλαφθέντα ὑπὸ τᾶς τοῦ ἔγγιστα τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς, περιέχοντα τὸ κωνοειδὲς καλεῖσθαι. τὰν δὲ μεταξὺ εὐθεῖαν τᾶς τε κορυφᾶς τοῦ κωνοειδέος καὶ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, ποτεοῦσαν τῷ ἄξονι καλεῖσθαι. καὶ εἴκα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἐπίπεδον ἐπιψαύῃ, παρὰ δὲ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον, ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθέν, ἀποτέμῃ τμῆμα τοῦ κωνοειδέος, βάσιν μὲν καλεῖσθαι τοῦ ἀποτμαθέντος τμάματος τὸ ἐπίπεδον τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ κωνοειδέος τομᾶς, ἐν τῷ ἀποτέμνοντι ἐπιπέδῳ. κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ᾽ ὃ ἅπτεται τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐπιψαῦον τοῦ κωνοειδέος. ἄξονα τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἐν τῷ τμάματι, ἀπὸ τᾶς ἀχθείσας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμάματος, καὶ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές. καὶ τὰν μεταξὺ τὰν εἰρημέναν κορυφὰν εὐθεῖαν ποτεοῦσαν τῷ ἄξονι καλεῖσθαι. τὰ μὲν οὖν ὀρθογώνια κωνοειδέα πάντα, ὅμοια ἐντί. τῶν δὲ ἀμβλυγωνίων κωνοειδέων ὅμοια καλείσθω, ὧν καὶ οἱ κῶνοι οἱ περιέχοντες τὰ κωνοειδέα ὅμοιοι ἐῶντι. προβάλλεται δὲ τάδε θεωρῆσαι, διατί εἴκα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἀποτμηθῇ τμάματα ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέρα ἴσα τῷ ἄξονι τοῦ τμάματος. καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις, τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος, καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι. καὶ διατί, εἴκα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος

δέος τμᾶμα ἀποτμαθῇ ἐπιπέδῳ μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ὃ γίγνεται ἀπότμαμα κώνου, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφότερος ἴσα τῷ ἄξονι τοῦ τμάματος καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι, ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος, καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι. περὶ δὲ τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὑποτιθέμεθα τάδε. εἴκα ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς μενούσας τᾶς μείζονος διαμέτρου περιενεχθεῖσα, ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, τὸ περιγραφὲν σχῆμα, ὑπό τε τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς παραμακὲς σφαιροειδὲς καλεῖσθαι. εἰ δὲ τᾶς ἐλάσσονος διαμέτρου μενούσας περιενεχθεῖσα, ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, τὸ περιγραφὲν σχῆμα ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐπιπλατυσφαιροειδὲς καλεῖσθαι. ἑκατέρου δὲ τῶν σφαιροειδέων ἄξονα μὲν καλεῖσθαι τὰν μεμενακοῦσαν διάμετρον. κορυφὴν δὲ τὸ σαμεῖον καθ' ὃ ἅπτεται ὁ ἄξων τᾶς ἐπιφανείας τοῦ σφαιροειδέος. κέντρον δὲ καλεῖσθαι τὸ μέσον τοῦ ἄξονος, καὶ διάμετρον τὰν διὰ τοῦ κέντρου ποτ' ὀρθὰς ἀγομέναν τῷ ἄξονι. καὶ εἴκα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτέρων ἐπίπεδα παράλληλα ἐπιψαύοντι μὴ τέμνοντα. παρὰ δὲ τὰ ἐπίπεδα τὰ ψαύοντα, ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθῇ, τέμνον τὸ σφαιροειδὲς τῶν γενομένων τμημάτων, βάσιν μὲν καλεῖσθαι τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ σφαιροειδέος τομᾶς ἐν τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ. κορυφὰς δὲ τὰ σαμεῖα, καθ' ἃς ἐπιψαύοντι τοῦ σφαιροειδέος τὰ παράλληλα ἐπίπεδα. ἄξονας δὲ τὰς ἐναπολαφθείσας εὐθείας ἐν τοῖς τμαμάτεσσιν ἀπὸ τᾶς εὐθείας τὰς κορυφὰς αὐτῶν ἐπιζευγνυούσας. ὅτι δὲ τά τε ἐπιψαύοντα ἐπίπεδα τοῦ σφαιροειδέος καθ' ἓν μόνον ἅπτονται σαμεῖον τᾶς ἐπιφανείας αὐτοῦ, καὶ ὅτι ἁ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα διὰ τοῦ κέντρου τοῦ φαιροειδέος πορεύεται, δειξοῦμεν. ὅμοια δὲ καλεῖσθαι τῶν σφαιροειδέων σχημάτων, ὧν καὶ οἱ ἄξονες ποτὶ τὰς διαμέτρους τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι. τμᾶμα δὲ σφαιροειδέων σχημάτων καὶ κωνοειδέων ὅμοια καλείσθω, εἴκα ἀφ' ὁμοίων σχημάτων ἀφαιρημένα ἔωντι, καὶ τάς τε βάσεις ὁμοίας ἔχοντι καὶ οἱ ἄξονες αὐτῶν, ἤτοι ὀρθοὶ ἐόντες ποτὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν βάσεων, ἢ γωνίας ἴσας ποιοῦντες, ποτὶ τὰς ὁμολόγους διαμέτρους τῶν βάσεων τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ποτ' ἀλλήλοις ταῖς ὁμολόγοις διαμέτροις τῶν βάσεων. προβάλλεται δὲ περὶ τῶν σφαιροειδέων τάδε θεωρῆσαι. διατί εἴκα τι τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῶν γενομένων τμαμάτων, ἑκάτερον διπλάσιον ἐσσεῖται τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. εἴκα δὲ ὀρθῷ μὲν ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ τμηθῇ, διὰ τοῦ κέντρου δὲ τῶν γεναμένων τμαμάτων τὸ μὲν μεῖζον ποτὶ τὸν κῶνον τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα, τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς εὐθείας, ἃ ἐστὶν ἄξων τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τῷ ἄξονι τοῦ ἐλάσσονος τμήματος ποτὶ τὸν ἄξονα τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. τὸ δὲ ἔλασσον τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα, τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς εὐθείας, ἃ ἐστὶν ἄξων τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ μείζονος τμάματος πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ μείζονος τμάματος. καὶ διατί εἴκα τοῦ σφαιροειδέων τι ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ κέντρου μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τῶν γεναμένων τμαμάτων ἑκάτερον διπλάσιον ἐσσεῖται τοῦ σχήματος, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. γίγνεται δὲ τὸ σχῆμα ἀπότμαμα κώνου. εἴκα δὲ μήτε διὰ τοῦ κέντρου, μήτε ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ τμαθῇ τὸ σφαιροειδές, τῶν γεναμένων τμαμάτων, τὸ μὲν μεῖζον ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἕξει λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα τᾷ τε ἡμισέᾳ αὐτᾶς τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν τμαμάτων. καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ ἐλάσσονος τμάματος, ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ ἐλάσσονος τμάματος. τὸ δὲ ἔλασσον τμᾶμα ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ συναμφοτέραις ἴσα τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν τμαμάτων, καὶ τῷ ἄξονι τοῦ μείζονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ μείζονος τμάματος. γίνεται δὲ καὶ ἐν τούτοις τὸ σχῆμα ἀπότμαμα κώνου. ἀποδειχθέντων δὲ τῶν εἰρημένων θεωρημάτων διὰ τούτων εὑρίσκονται θεωρήματά τε πολλὰ καὶ προβλήματα. οἷον καὶ τόδε, ὅτι τὰ ὅμοια σφαιροειδέα, καὶ τὰ ὅμοια τμάματα τῶν τε σφαιροειδέων σχημάτων καὶ τῶν κωνοειδέων, τριπλασίονα λόγον ἔχοντι ποτὶ τὰ ἄλλα τῶν ἀξόνων, καὶ διότι τῶν ἰσοσφαιροειδέων σχημάτων τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων ἀντιπεπόνθασι τοῖς ἀξόνεσσιν. καὶ εἴκα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων ἀντιπεπόνθασι τοῖς ἀξόνεσσιν, ἴσα ἐντὶ τὰ σφαιροειδέα. πρόβλημα δὲ οἷον καὶ τόδε, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σφαιροειδέος τμάματος ἢ κωνοειδέος τμᾶμα, ἀποτεμεῖν ἐπιπέδῳ παρὰ δοθὲν ἐπίπεδον ἀγμένῳ.

μένω. εἰ μὲν δὲ τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ἴσον τῷ δοθέντι κώνῳ, ἢ κυλίνδρῳ, ἢ σφαίρᾳ τᾷ δοθείσᾳ. προγραψάντων οὖν τά τε θεωρήματα καὶ τὰ ἐπιτάγματα τὰ χρείαν ἔχοντα εἰς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν, μετὰ ταῦτα γραψοῦμαί σοι τὰ προβλήματα. εὐτύχει.

Εἴκα κῶνος ἐπιπέδῳ τμαθῇ συμπίπτοντι πάσαις ταῖς τοῦ κώνου πλευραῖς, ἁ τομὰ ἐσσεῖται α
ἤτοι κύκλος, ἢ ὀξυγωνίου κώνου τομά. εἰ μὲν οὖν κύκλος ἁ τομά, δῆλον ὅτι τὸ ἀπολαφθὲν ἀπ' αὐτοῦ τμᾶμα ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾷ τοῦ κώνου κορυφᾷ, κῶνος ἐσσεῖται. εἴκα δὲ ἁ τομὰ γίνηται ὀξυγωνίου κώνου τομά, τὸ ἀπολαφθὲν ἀπὸ τοῦ κώνου σχῆμα ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῇ τοῦ κώνου κορυφᾷ ἀπότμαμα κώνου καλείσθω. τοῦ δ' ἀποτμάματος βάσις μὲν καλείσθω τὸ ἐπίπεδον, τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς. κορυφὰ δὲ τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ κώνου κορυφά. ἄξων δέ, ἁ ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου ἐπὶ τὸ κέντρον τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐπιζευχθεῖσα εὐθεῖα. καὶ εἴκα κύλινδρος δυσὶν ἐπιπέδοισιν παραλλήλοις τμαθῇ, συμπιπτόντεσσι πάσαις ταῖς τοῦ κυλίνδρου πλευραῖς, αἱ τομαὶ ἐσσοῦνται, ἤτοι κύκλοι, ἢ ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ ἴσαι καὶ ὅμοιαι ἀλλήλαις. εἰ μὲν οὖν καὶ αἱ τομαὶ κύκλοι γίνωνται, δῆλον ὅτι τὸ ἀποτμαθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου σχῆμα, μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων κύλινδρος ἐσσεῖται. εἰ δὲ καὶ αἱ τομαὶ γίνωνται ὀξυγωνίων κώνων τομαί, τὸ ἀπολαφθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου σχῆμα μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τόμος κυλίνδρου καλείσθω. τοῦ δὲ τόμου βάσεις μὲν καλείσθω τὰ ἐπίπεδα τὰ περιλαφθέντα ὑπὸ τᾶν ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν. ἄξων δὲ ἁ ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα τὰ κέντρα τᾶν τοῦ ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν. ἐσσεῖται δὲ αὐτὰ ἐπὶ τᾶς αὐτᾶς εὐθείας τῷ ἄξονι τοῦ κυλίνδρου. εἴκα ἐόντι μεγέθεα, ὁποσαοῦν τῷ ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχοντα. ᾖ δὲ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τῷ ἐλαχίστῳ. καὶ ἄλλα μεγέθεα τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, πάντα τὰ μεγέθεα, ὧν ἐστιν ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, πάντων μὲν τῶν τῷ ἴσῳ ὑπερεχόντων ἐλάσσονα ἐσσοῦνται, ἢ διπλάσια. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζονα ἢ διπλάσια. ἁ δὲ ἀπόδειξις τούτου φανερά.

Εἴκα μεγέθεα ὁποσαοῦν τῷ πλήθει, ἄλλοις μεγέθε- β
σιν ἴσοις τῷ πλήθει κατὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι τὰ ὁμοίως τεταγμένα, λέγηται δὲ τά τε πρῶτα μεγέθεα ποτὶ τὰ ἄλλα μεγέθεα, ἢ πάντα, ἢ τινὰ αὐτῶν ἐν λόγοις ὁποιοισοῦν, καὶ τὰ ὕστερον ποτ' ἄλλα μεγέθεα τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, πάντα τὰ πρῶτα μεγέθεα, ποτὶ πάντα ἃ λέγονται, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν ἔχοντι πάντα τὰ ὕστερον μεγέθεα ποτὶ πάντα ἃ λέγονται. ἔστω τινὰ μεγέθεα τὰ α β γ δ ε ζ ἄλλοις μεγέθεσιν ἴσοις τῷ πλήθει τοῖς η θ ι κ λ μ, κατὰ δύο τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον. καὶ ἐχέτω τὸ μὲν α ποτὶ τὸ β τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ η ποτὶ τὸ θ. τὸ δὲ β ποτὶ τὸ γ, ὃν τὸ θ ποτὶ τὸ ι. καὶ τὰ ἄλλα ὁμοίως τούτοις. λεγέσθω δὲ τὰ μὲν α β γ δ ε ζ μεγέθεα, ποτὶ τὰ ἄλλα μεγέθεα τὰ ν ξ ο π ρ σ, ἐν λόγοις ὁποιοισοῦν. τὰ δὲ η θ ι κ λ μ ποτὶ τὰ ἄλλα τὰ τ υ φ χ ψ ω, τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις. ὃν μὲν ἔχει λόγον τὸ α ποτὶ τὸ ν, τὸ η ἐχέτω ποτὶ τὸ τ. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ β ποτὶ τὸ ξ, τὸ θ ἐχέτω ποτὶ τὸ υ. καὶ τὰ ἄλλα ὁμοίως τούτοις. δεικτέον, ὅτι πάντα τὰ α β γ δ ε ζ ποτὶ πάντα τὰ ν ξ ο π ρ σ, τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ὃν πάντα τὰ η θ ι κ λ μ, ποτὶ πάντα τὰ τ υ φ χ ψ ω. ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ν ποτὶ τὸ α τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τ ποτὶ τὸ η, τὸ δὲ α ποτὶ τὸ β ὃν τὸ η ποτὶ τὸ θ, τὸ δὲ β ποτὶ τὸ ξ ὃν τὸ θ ποτὶ τὸ υ, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον τὸ ν ποτὶ τὸ ξ, ὃν τὸ τ ποτὶ τὸ υ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ ξ ποτὶ τὸ ο, ὃν τὸ υ ποτὶ τὸ φ. καὶ τούτοις τὰ ἄλλα ὁμοίως. ἔχοντι δὴ τὰ μὲν α β γ δ ε ζ πάντα ποτὶ τὸ α τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχοντι τὰ η θ ι κ λ μ πάντα ποτὶ τὸ η. τὸ δὲ α ποτὶ τὸ ν, ὃν τὸ η ποτὶ τὸ τ. τὸ δὲ ν ποτὶ πάντα τὰ ν ξ ο π ρ ς, τὸν αὐτὸν λόγον ὃν τὸ τ ποτὶ πάντα τὰ τ υ φ χ ψ ω. δῆλον οὖν, ὅτι

η πάντα

πάντα τὰ α β γ δ ε ζ ποτὶ πάντα τὰ ν ξ ο π ρ ς τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ὃν πάντα τὰ η θ ι κ λ μ ποτὶ πάντα τὰ τ υ φ χ ψ ω. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ εἴκα τῶν τε α β γ δ ε ζ μεγεθέων, τὰ μὲν α β γ δ ε λέγωντι ποτὶ τὰ ν ξ ο π ρ σ. τὸ δὲ ζ μηδὲ ποθὲν λέγηται, καὶ τὰ η θ ι κ λ μ λέγοντι ποτὶ τὰ τ υ φ χ ψ ω, τὰ ὅμοια ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, τὸ δὲ μ μηδὲ ποθὲν λέγηται, ὁμοίως πάντα τὰ α β γ δ ε ζ ποτὶ πάντα τὰ ν ξ ο π ρ σ, τὸν αὐτὸν ἕξοντι λόγον, ὃν πάντα τὰ η θ ι κ λ μ ποτὶ πάντα τὰ τ υ φ χ ψ ω.

γ Εἴκα γραμμαὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἐῶντι, ὁπόσαι οὖν τῷ πλήθει, καὶ παρ᾽ ἑκάσταν αὐτᾶν παρεμπέσῃ τι χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, ἐῶντι δὲ καὶ αἱ πλευραὶ τῶν ὑπερβλημάτων τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τᾷ ἐλαχίστᾳ, ἐῶντι δὲ καὶ ἄλλα χωρία τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ. ποτὶ μὲν πάντα τὰ ἕτερα χωρία ἐλάσσονα λόγον ἕξοντι τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἴσα συναμφοτέραις ταῖς τε τοῦ μεγίστου ὑπερβλήματος πλευραῖς, καὶ μίᾳ τᾶν ἰσᾶν ἐοῦσαν ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις, τῷ τε τρίτῳ μέρει τᾶς τοῦ μεγίστου ὑπερβλήματος πλευρᾶς, καὶ τᾷ ἡμίσεᾳ μιᾶς τᾶν ἰσᾶν ἐουσᾶν. ποτὶ δὲ τὰ λοιπὰ χωρία ἄνευ τοῦ μεγίστου μείζονα λόγον ἕξοντι τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἔστω γὰρ ἴσαι εὐθεῖαι ὁποσαιοῦν τῷ πλήθει ἐφ᾽ ἃν τὰ α, καὶ παραπεπτωκέτω παρ᾽ ἑκάσταν αὐτᾶν χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ. ἔστων δὲ ὑπερβλημάτων πλευραὶ αἱ β, γ, δ, ε, ζ, η τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι. καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἔστω ἴσα τᾷ ἐλαχίστᾳ. καὶ μεγίστα μὲν ἔστω ἁ β, ἐλαχίστα δὲ ἁ η. ἔστω δὲ καὶ ἄλλα χωρία ὧν ἕκαστον τῶν θ ι κ λ τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον ἔστω τῷ μεγίστῳ τῷ παρὰ τὰν α β παρακειμένῳ. ἔστω δὲ ἁ μὲν θ ι γραμμὰ ἴσα τᾷ α. ἁ δὲ κ λ ἴσα τᾷ β. καὶ τᾶν μὲν θ ι γραμμᾶν ἑκάστα ἔστω διπλασία τᾶς ι. τᾶν δὲ κ λ ἑκάστη τριπλασία τᾶς κ. δεικτέον ὅτι τὰ χωρία πάντα ἐν οἷς τὰ θ ι κ λ ποτὲ μὲν πάντα τὰ ἕτερα χωρία τὰ α β, α γ, α δ, α ε, α ζ, α η ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἁ θ ι κ λ εὐθεῖα ποτὶ τὰν ι κ. ποτὶ δὲ τὰ λοιπὰ ἄνευ τοῦ μεγίστου τοῦ α β μείζονα λόγον ἔχοντι τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἔστι γάρ τινα χωρία, ἐν οἷς τὰ α τῷ ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχοντα. καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τῷ ἐλαχίστῳ. ἐπεί τε τὰ παραβλήματα καὶ τὰ πλάτη τῷ ἴσῳ ὑπερέχουσιν, καὶ ἄλλα χωρία, ἐν οἷς τὰ θ ι τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ. σύμπαντα οὖν τὰ χωρία ἐν οἷς τὰ θ ι, πάντων μὲν τῶν ἐν οἷς τὰ α ἐλάσσονα ἐντί, ἢ διπλασίονα. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ μεγίστου μεῖζον ἢ διπλασίονα. αὐτὰ οὖν τὰ χωρία ἐν οἷς τὰ ι, πάντων μὲν τῶν ἐν οἷς τὰ α ἐλάσσονα ἐντί. τῶν δὲ λοιπῶν ἄνευ τοῦ μεγίστου μείζονα. πάλιν ἐντὶ γραμμαί τινες αἱ β γ δ ε ζ η, τῷ ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχουσαι, καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τᾷ ἐλαχίστᾳ, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ ἐφ᾽ ἃν τὰ κ λ, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσαι τᾷ μεγίστᾳ. τὰ οὖν τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶν ἴσαν ἀλλήλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, πάντων

μὲν τῶν

μὲν τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ πάντων τῶν ἴσων ἀλλάλων ὑπερεχουσᾶν, ἐλάσσονα ἐντὶ ἢ τριπλάσια. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου μείζονα ἢ τριπλάσια. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς περὶ τᾶν ἑλικᾶν ἐκδεδομένοις. τὰ οὖν χωρία ἐν οἷς τὸ κ, πάντων μετὰ τοῦ χωρίου ἐν οἷς β γ δ ε ζ η ἐλάσσονα ἐστίν. αὐτῶν δὲ τῶν ἐν οἷς τὰ γ δ ε ζ η μείζονα. ὥστε καὶ πάντα τὰ χωρία ἐν οἷς τὰ ι κ, πάντων μὲν τῶν ἐν οἷς α β, α γ, α δ, α ε, α ζ, α η ἐλάσσονα ἐστί· τῶν δὲ ἐν οἷς α γ, α δ, α ε, α ζ, α η μείζονα. δῆλον οὖν ὅτι πάντα τὰ χωρία ἐν οἷς τὰ θ ι, κ λ, ποτὶ μὲν τὰ χωρία ἐν οἷς τὰ α β, α γ, α δ, α ε, α ζ, α η ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι, τοῦ ὃν ἔχει ἁ θ λ ποτὶ τὰν ι κ. ποτὶ δὲ τὰ λοιπὰ χωρία τῶν ἐν ᾧ τὸ α β μείζω τοῦ αὐτοῦ λόγου.

Εἴκα κώνου τομᾶς ὁποιασοῦν εὐθεῖαι, ἐπιψαύοντι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σαμείου ἀγμέναι, ἔωντι δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι ἐν τᾷ τοῦ κώνου τομᾷ, παρὰ τὰς ἐπιψαυούσας ἀγμέναι, καὶ τέμνουσαι ἀλλάλας, τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον ποτὶ τὰ ἄλλα ὄντα τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ἐπιψαυουσᾶν. ὁμόλογον δὲ ἐσσεῖται τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τᾶς ἑτέρας γραμμᾶς τμαμάτων τετράγωνον, τὸ ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας παραλλήλους αὐτάς. ἀποδέδεικται δὲ τοῦτο ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις.

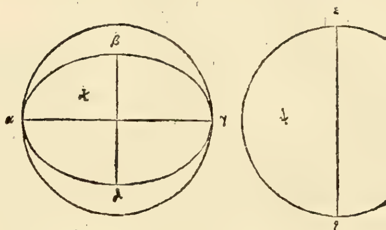
Εἴκα ἀπὸ τᾶς αὐτᾶς ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς δύο τμάματα ἀποτμηθέωντι ὁποσοῦν, ἴσας ἔχον- δ
τα τὰς διαμέτρους, αὐτά τε τὰ τμάματα ἴσα ἐσσοῦνται, καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα εἰς αὐτά, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό. διάμετρον δὲ καλέω παντὸς τμάματος, τὰν δίχα τέμνουσαν τὰς εὐθείας πάσας, τὰς παρὰ τὰν βάσιν αὐτοῦ ἀγομένας. ἔστω ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ α β γ. καὶ ἀποτετμήσθω ἀπ' αὐτᾶς δύο τμάματα, τό, τε α δ ε, καὶ τὸ θ β γ. ἔστω δὲ τοῦ μὲν α δ ε τμάματος διάμετρος ἁ δ ζ, τοῦ δὲ θ β γ ἁ β η. καὶ ἔστω ἴσαι αἱ δ ζ, β η. δεικτέον ὅτι τὰ τμάματα ἴσα ἐντὶ τὰ α δ ε, θ β γ, καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα τὸν εἰρημένον τρόπον ἐν αὐτοῖς. ἔστω δὴ πρότερον ἀποτέμνον τὸ ἕτερον τμᾶμα ἁ θ γ, ποτ' ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. λελάφθω δὲ ἃν δύνανται αἱ ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἁ διπλασία τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος. καὶ ἔστω ἐφ' ᾇ τὸ μ. ἀπὸ δὲ τοῦ α κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν δ ζ ἁ α κ. ἐπεὶ οὖν διάμετρός ἐντι ἁ δ ζ τοῦ τμάματος, ἅτε α ε δίχα τέμνεται κατὰ τὸ ζ, καὶ ἁ δ ζ παρὰ τὰν διάμετρον ἐστὶ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. οὕτω γὰρ δίχα τέμνει πάσας τὰς παρὰ τὰν α ε ἀγομένας. ὃν δὴ λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς α ζ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς α κ, τοῦτον ἐχέτω ἁ ν ποτὶ τὰν μ. αἱ δὴ ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν δ ζ ἀγόμεναι παρὰ τὰν α ε, δύνανται τὰ παρὰ τὰν ἴσαν τᾷ μ παραπίπτοντα πλάτος ἔχοντα, ἃς αὗται ἀπολαμβάνοντι ἀπὸ τᾶς δ ζ ποτὶ τῷ δ πέρας. δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς κωνικοῖς. δύναται οὖν καὶ ἁ α ζ ἴσον τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶς ν, καὶ τᾶς δ ζ. δύναται δὲ καὶ ἁ θ η, ἴσον τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς μ, καὶ ὑπό τε τᾶς β η. ἐπεὶ κάθετός ἐστιν ἁ θ η ἐπὶ τὰν διάμετρον. ἔχοι καὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς α ζ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ η τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ν ποτὶ τὰν μ. ἐπεὶ ἴσαι ὑπόκειντο αἱ δ ζ, β η. ἔχει δὲ τὸ ἀπὸ τᾶς α ζ τετράγωνον, καὶ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς α κ, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ν ποτὶ τὰν μ. ἴσαι ἄρα ἐντὶ αἱ θ η, α κ. ἐντὶ δὲ ἴσαι καὶ αἱ β η, δ ζ. ὥστε ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τᾶν θ η, β η περιεχόμενον, τῷ ὑπὸ τᾶν α κ, δ ζ. ἴσον ἄρα ἐστὶν καὶ τὸ θ η β τρίγωνον τῷ δ α ζ τριγώνῳ, ὥστε καὶ τὰ διπλάσια. ἐστὶ δὲ τοῦ μὲν α δ ε τριγώνου ἐπίτριτον τὸ

α δ ε τμᾶμα. τοῦ δὲ θ β γ τριγώνου, ἐπίτριτον τὸ θ β γ τμᾶμα. δῆλον οὖν ὅτι τὰ τμήματα ἐστὶν ἴσα, καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα εἰς αὐτά. εἰ δὲ μηδέτερα τᾶν τὰ τμήματα ἀποτεμνουσᾶν ποτ' ὀρθὰς ἐντὶ τᾶ διαμέτρω τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἀπολαφθείσας ἀπὸ τᾶς μετὰ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἴσας τᾶ διαμέτρω τᾶς τοῦ ἑνὸς τμάματος, καὶ ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ἀπολαφθείσας ποτ' ὀρθὰς ἀχθείσας τᾶ διαμέτρω τὸ γινόμενον τμᾶμα, ἑκατέρω τῶν τμαμάτων ἴσον ἐσσεῖται. δῆλον οὖν ἐστὶ τὸ προτεθέν.

6 Πᾶν χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα διάμετρον ἴσαν τᾶ μείζονι διαμέτρω τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ἐλάσσων διάμετρος αὐτᾶς ποτὶ τὰν μείζω, τουτέστι ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου διάμετρον. ἔστω γὰρ ὀξυγωνίου κώνου τομά, ἐφ' ἇς τὰ α β γ δ. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μὲν μείζων ἔστω, ἐφ' ἇς τὰ α γ, ἁ δὲ ἐλάσσων ἐφ' ἇς τὰ β δ. ἔστω κύκλος περὶ διάμετρον τὰν α γ, δεικτέον ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ποτὶ τὸν κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ β δ ποτὶ τὰν γ α, τουτέστι τὰν ε ζ. ὃν δὴ λόγον ἔχει ἁ β δ ποτὶ τὰν ε ζ, τοῦτον ἐχέτω ὁ κύκλος ἐν ᾧ τὸ ψ ποτὶ τὸν α ε γ ζ κύκλον. λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ ψ κύκλος τῇ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσος ὁ ψ κύκλος τῷ περιεχομένῳ χωρίῳ ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἔστω πρότερον εἰ δυνατὸν μεῖζον. δυνατὸν δή ἐστιν εἰς τὸν ψ κύκλον πολύγωνον ἐγγράψαι ἀρτιόγωνον, μεῖζον τοῦ α β γ δ χωρίου. νοείσθω δὴ ἐγγεγραμμένον. ἐγγεγράφθω δὴ καὶ εἰς τὸν α ε γ ζ κύκλον εὐθύγραμμον, ὅμοιον τῷ ἐν τῷ ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένῳ. καὶ ἀπὸ τᾶν γωνιᾶν αὐτοῦ κάθετοι ἄχθωσαν ἐπὶ τὰν α γ διάμετρον. ἐπὶ δὲ τὰ σαμεῖα καθ' ἃ τέμνονται αἱ κάθετοι τᾶν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶν, εὐθεῖαι ἐπιζεύχθωσαν. ἐσσεῖται δέ τι εὐθύγραμμον, ἐν τᾶ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶ ἐγγεγραμμένον, καὶ ἕξει τὸ αὐτὸ ποτὶ τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ α ε γ ζ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, τὸν αὐτὸν λόγον ὃν ἁ β δ ποτὶ τὰν ε ζ. ἐπεὶ γὰρ αἱ ε θ, κ λ κάθετοι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τέτμηνται κατὰ τὰ μ β, δῆλον ὅτι τὸ λ ε τραπέζιον ποτὶ τὸ θ μ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ θ ε ποτὶ τὰν β θ. διὰ ταῦτα δὲ καὶ τῶν ἄλλων τραπεζίων ἕκαστον τῶν ἐν τῷ κύκλῳ ποθ' ἕκαστον τῶν τραπεζίων τῶν ἐν τᾶ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ε θ ποτὶ τὰν β θ. ἔχοντι δὲ καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ποτὶ τοῖς α, γ τὰ ἐν τῷ κύκλῳ, ποτὶ τὰ ἐν τῇ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ τοῦτον τὸν λόγον. ἕξει οὖν καὶ ὅλον τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ α ε γ ζ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, ποτὶ ὅλον τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τᾶ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ε ζ ποτὶ τὰν β δ. ἔχει δὲ τὸ αὐτὸ τὸ εὐθύγραμμον καὶ ποτὶ τὸ ἐν τῷ ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, τοῦτον τὸν λόγον, διότι καὶ οἱ κύκλοι τοῦτον ἔχοντι τὸν λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, τῷ εὐθυγράμμῳ τῷ ἐν τᾶ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶ ἐγγεγραμμένῳ, ὅπερ ἀδύνατον. μεῖζον γὰρ ἦν ὅλου τοῦ περιεχομένου χωρίου ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου τομᾶς. ἀλλ' ἔστω εἰ δυνατὸν ἐλάσσων, πάλιν δὴ δυνατὸν εἰς τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν ἐγγράψαι πολύγωνον ἀρτιόπλευρον μεῖζον τοῦ ψ κύκλου. ἐγγεγράφθω οὖν καὶ ἀπὸ τᾶν γωνιᾶν αὐτοῦ κάθετοι, ἀχθεῖσαι ἐπὶ τὰν α γ. ἐκβεβλήσθωσαν ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν. πάλιν οὖν ἐσσεῖται τι ἐν τῷ α ε γ ζ κύκλῳ εὐθύγραμμον ἐγγεγραμμένον, ὃ ἕξει ποτὶ τὸ ἐν τᾶ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶ ἐγγεγραμμένον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ε ζ ποτὶ τὰν β δ. ἐγγραφέντος δὴ καὶ εἰς τὸν ψ κύκλον ὁμοίου αὐτῷ, δειχθήσεται τὸ ἐν τῷ ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον ἴσον ἐὸν τῷ ἐν τᾶ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶ ἐγγεγραμμένῳ, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἔστιν οὖν οὐδὲ ἐλάσσων ὁ ψ κύκλος τοῦ χωρίου, τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς. δῆλον οὖν ὅτι τὸ εἰρημένον χωρίον ποτὶ τὸν α ε γ ζ κύκλον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ β δ ποτὶ τὰν ε ζ.

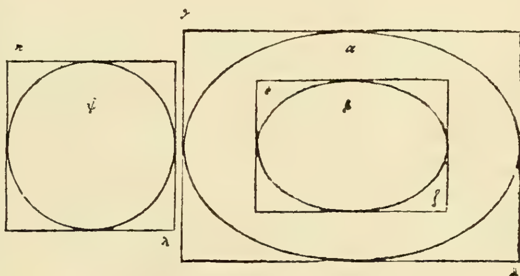
Γᾶν

Παν χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ ταὐτᾶ κύκλον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ϛ
ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τοῦ κύκλου διαμέτρου τετράγωνον. ἔστω γάρ τι χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἐν ᾧ τὸ χ, διάμετροι δὲ ἔστωσαν τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς αἱ α γ, β δ, μείζων δὲ ἁ α γ. καὶ κύκλος ἔστω, ἐν ᾧ τὸ ψ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἁ ε ζ. δεικτέον ὅτι τὸ χ χωρίον ποτὶ τὸν ψ κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν α γ, β δ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ε ζ τετράγωνον. περιγεγράφθω δὴ κύκλος περὶ διάμετρον τὰν α γ. τὸ δὴ χ χωρίον ποτὶ τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἁ α γ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν α γ, β δ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς α γ τετράγωνον. δέδεικται γὰρ ἔχον ὃν ἁ β δ ποτὶ τὰν α γ. ἔχει δὲ καὶ ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἁ α γ, ποτὶ τὸν κύκλον οὗ διάμετρος ἁ ε ζ, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς α γ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ε ζ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ χ χωρίον ποτὶ τὸν ψ κύκλον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν α γ, β δ περιεχόμενον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ε ζ τετράγωνον.



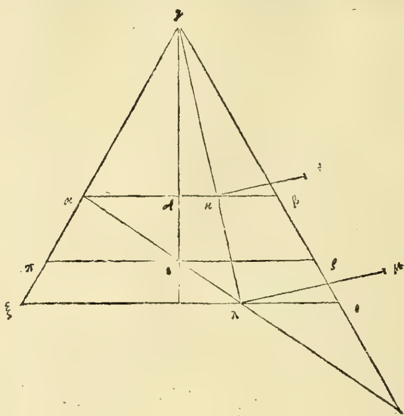
Τα περιεχόμενα χωρία ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ᾽ ἄλλαλα, ὃν τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τᾶν διαμέτρων * τμαμάτων ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν ποτ᾽ ἄλλαλα. ἔστω περιεχόμενα χωρία ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἐν οἷς τὰ α, β. ἔστω δὲ καὶ τὸ μὲν γ δ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τᾶς περιεχούσας τὸ α χωρίον, τὸ δὲ ε ζ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων τᾶς ἑτέρας τομᾶς. δεικτέον ὅτι τὸ α χωρίον ποτὶ τὸ β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ γ δ ποτὶ τὸ ε ζ. λελάφθω δὴ κύκλος τίς, ἐν ᾧ τὸ ψ. ἀπὸ δὲ τᾶς διαμέτρου αὐτοῦ τετράγωνον ἔστω τὸ κ λ. ἔχει δὲ τὸ μὲν α χωρίον, ποτὶ τὸν ψ κύκλον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ γ δ ποτὶ τὸ κ λ. ὁ δὲ ψ κύκλος ποτὶ τὸ β χωρίον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ κ λ ποτὶ τὸ ε ζ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ α χωρίον ποτὶ τὸ β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ γ δ ποτὶ τὸ ε ζ. ἐκ τούτου δὲ φανερόν, ὅτι τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ ὁμοιᾶν ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι δυνάμει ποτ᾽ ἄλλαλα, ὃν αἱ ὁμόλογοι διάμετροι τᾶν τομᾶν.

τὰν τῶν



Οξυγωνίου κώνου τομᾶς δοθείσας, καὶ γραμμᾶς ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἀνεστακούσας ὀρθᾶς ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστὶν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐστι κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ πέρας τᾶς ἀνεστακούσας εὐθείας. οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. δεδόσθω τὶς ὀξυγωνίου κώνου τομά, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτᾶς εὐθεῖα γραμμὰ ἀνεστακοῦσα ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστὶν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. διὰ δὲ τᾶς ἀνεστακούσας εὐθείας, καὶ τᾶς ἐλάσσονος διαμέτρου ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω, καὶ ἔστω ἐν αὐτῷ ἁ μὲν ἐλάσσων διάμετρος ἁ α β. τὸ δὲ κέντρον τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸ δ. ἁ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστακοῦσα ὀρθὰ ἁ γ δ. πέρας δὲ αὐτᾶς τὸ γ. ἁ δὲ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, νοείσθω περὶ διάμετρον τὰν α β ἐγγεγραμμένα ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὰν γ δ. δεῖ δὴ κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ γ σαμεῖον. οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἐπὶ τὰν α β εὐθεῖα ἀχθεῖσα ἐκβεβλήσθω, καὶ ἀπὸ τοῦ α διάχθω ἁ α ζ, ὥστε τὸ περιεχόμενον η

ὑπὸ τῶν α ε, ε ζ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ε γ, τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας μείζονος διαμέτρου, ποτὶ τὸ ἀπὸ δ γ τετράγωνον. δυνατὸν δέ ἐστιν, ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ὁ λόγος τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶς α δ, δ β περιεχόμενον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς δ γ τετράγωνον. ἀπὸ δὲ τᾶς α ζ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ γ α ζ. ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κύκλος γεγράφθω περὶ διάμετρον τὰν α ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τούτου κῶνος ἔστω, κορυφὰν ἔχων τὸ γ σαμεῖον. ἐν δὲ τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, δειχθήσεται οὖσα ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. εἰ μὴ ἐστὶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, ἀναγκαῖον εἶμεν τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ μὴ ἐστὶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. νοείσθω δὴ τι σαμεῖον, λελαμμένον ἐπὶ



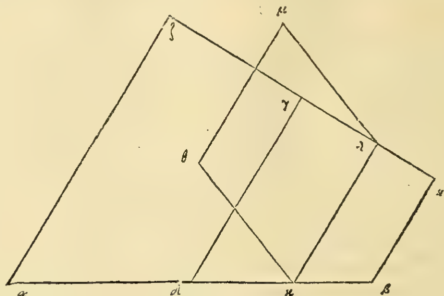
τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸ θ, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. καὶ ἀπὸ τοῦ θ κάθετος ἄχθω ἁ θ κ, ἐπὶ τὰν α β. ἐσσεῖται δὴ αὕτα ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ἐν ᾧ ἐντὶ ἁ γ α ζ. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἐπὶ τὸ κ εὐθεῖα ἀχθεῖσα ἐκβεβλήσθω. συμπιπτέτω δὴ αὕτα τᾷ α ζ, κατὰ τὸ λ. καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τᾷ ζ α, ἁ λ μ, ἐν τῷ κύκλῳ τῷ περὶ τὰν α ζ. τὸ δὲ μ νοείσθω μετέωρον ἐπὶ τᾶς περιφερείας αὐτοῦ. ἄχθω δὲ καὶ παρὰ τὰν α β, διὰ μὲν τοῦ λ ἁ ξ ο. διὰ δὲ τοῦ ε, ἁ π ρ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὑπὸ τὰν ε α, ε ζ περιεχόμενον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ε γ τετράγωνον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας τᾶς μείζονος διαμέτρου, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς δ γ. τὸ δὲ ἀπὸ τᾶς ε γ ποτὶ τὸ ὑπὸ ε π, ε ρ. καὶ ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς δ γ ποτὶ τὸ ὑπὸ ταν α δ, δ β, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον τὸ ὑπὸ ταν α ε, ε ζ ποτὶ τὸ ὑπὸ τὰν π ε, ε ρ, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας τᾶς μείζονος διαμέτρου ποτὶ τὸ ὑπὸ ταν α δ, δ β. ἔστι δὲ ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ταν α ε, ε γ ποτὶ τὸ ὑπὸ ταν ε π, ε ρ. οὕτω τὸ ὑπὸ ταν α λ, λ ζ ποτὶ τὸ ὑπὸ ταν λ ξ, λ ο. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας τᾶς μείζονος διαμέτρου ποτὶ τὸ ὑπὸ ταν α δ, δ β, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ τετράγωνον, ποτὶ τὸ ὑπὸ ταν α κ, κ β. τὸν αὐτὸν ἄρα ἔχει λόγον τὸ ὑπὸ ταν α λ, λ ζ ποτὶ τὸ ὑπὸ τὰν ξ λ, λ ο, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ ταν α κ, κ β. ἔχει δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ταν ξ λ, λ ο ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς γ λ τετράγωνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ ταν α κ, κ β ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς γ κ τετράγωνον. ἔχει ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ταν α λ, λ ζ περιεχόμενον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς γ λ τετράγωνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ γ. τῷ δὲ ὑπὸ ταν α λ, λ ζ περιεχομένῳ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τᾶς λ μ τετράγωνον. ἐν ἡμικυκλίῳ γὰρ τῷ περὶ ταν α ζ κάθετος ἄχθη ἁ λ μ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον τὸ ἀπὸ τᾶς λ μ τετράγωνον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς λ γ, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ γ. ὥστε ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τὰ γ θ μ σαμεῖα. ἁ δὲ γ μ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τοῦ κώνου. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ θ σαμεῖον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται τοῦ κώνου. ὑπέκειτο δὲ μὴ εἶμεν, οὐκ ἄρα ἐστὶ σαμεῖον οὐδὲν ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ προειρημένου κώνου. ὅλα οὖν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ κώνου.

θ Ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς δοθείσας, καὶ γραμμᾶς μὴ ὀρθᾶς ἀνεστακούσας, ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐν ἐπιπέδῳ ἐστὶν ὀρθὸν ἀνεστακός, διὰ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐστὶν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐστι κῶνον εὑρεῖν, κορυφὰν ἔχοντα τὸ πέρας τᾶς ἀνεστακούσας εὐθείας, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἔστω δὲ διάμετρος μὲν τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἁ β α, κέντρον δὲ τὸ δ. καὶ ἁ δ γ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστακοῦσα, ὡς εἴρηται. ἁ δὲ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ νοείσθω περὶ διάμετρον ταν α β ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ α β, γ δ. δεῖ δὴ κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ γ σαμεῖον. οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.

νου τομά. οὗ δὴ ἐντὶ ἴσαι αἱ αγ, γβ. ἐπεὶ ἁ γδ οὐκ ἔστιν ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἔστω συναχθεῖσα ἁ εγ τᾷ γβ. ἁ δὲ ν εὐθεῖα ἴσα ἔστω τᾷ ἡμισείᾳ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου, ἅ ἐστι συζυγὴς ἁ αβ. καὶ διὰ τοῦ δ ἄχθω ἁ ζκ παρὰ τὰν εβ. ἀπὸ δὲ τᾶς εβ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ αγ, γβ. καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ γεγράφθω περὶ διάμετρον τὰν εβ κύκλος, ἢ ἔλλειψις. εἰ μὲν ἴσον ἐστὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ν, τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ζδ, δκ, κύκλος. εἰ δὲ μή ἐστιν ἴσον, ὀξυγωνίου κώνου τομὰ τοιαύτα, ὥστε τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς εβ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζδ, δκ. κῶνος λελάφθω κορυφὰν ἔχων τὸ γ σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσεῖται ὁ κύκλος, ἢ ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν εβ. δυνατὸν δέ ἐστι τοῦτο, ἐπεὶ ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ μέσαν τὰν εβ ἀχθεῖσαι ὀρθά ἐντι ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν εβ. ἐν ταύτῃ δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ καὶ ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν αβ. εἰ γὰρ μή ἐστιν, ἐσεῖται τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ οὐκ ἔσται ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. νοείσθω τι σαμεῖον λελαμμένον τὸ θ, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, καὶ ἀπὸ τοῦ θ κάθετος ἄχθω ἁ κθ ἐπὶ τὰν αβ, ἁ δὲ γκ ἐπιζευχθεῖσα, ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω τᾷ εβ κατὰ τὸ λ. διὰ δὲ τοῦ λ ἄχθω τις ἐν τῷ ὀρθῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰν εβ ποτ' ὀρθὰς τᾷ εβ, ἁ λμ. τὸ δὲ μ νοείσθω μετέωρον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. ἄχθω δὲ καὶ διὰ τοῦ λ παρὰ τὰν αβ ἁ πρ. ἔστιν δὴ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τᾶς ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζδ, δκ, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς λμ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ελ, λβ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τᾶν ζδ, δκ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν αδ, δβ, οὕτως τὸ ὑπὸ ελ, λβ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν πλ, λρ. ἐσεῖται οὖν ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ αδ, δβ περιεχόμενον, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς λμ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν πλ, λρ. ἔχει δὴ ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν αδ, δβ, οὕτω τὸ ἀπὸ τᾶς θκ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τοῦ ακ, κβ. ἐπεὶ ἐν τᾷ αὐτᾷ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ κάθετοί ἐντι ἀγμέναι ἐπὶ διάμετρον τὰν αβ, τὸν αὐτὸν ἄρα ἔχει λόγον τὸ ἀπὸ τᾶς λμ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν πλ, λρ, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θκ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶς ακ, κβ. ἔχει δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν πλ, λρ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς γλ τετράγωνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ακ, κβ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κγ. τὸν αὐτὸν οὖν λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς λμ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς λγ τετράγωνον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θκ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κγ. ὥστε ἐπ' εὐθείας ἐντὶ τὰ γ θ μ σαμεῖα. ἁ δὴ γμ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ θ σαμεῖον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τοῦ κώνου. ὑπέκειτο δὴ μὴ εἶμεν, φανερὸν οὖν ἐστιν ὃ ἔδει δεῖξαι.

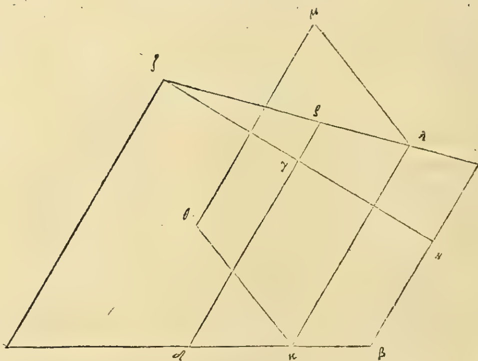
Ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς δοθείσας, καὶ γραμμᾶς ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἀνεστακούσας ἐν ἐπιπέδῳ, ὅ ἐστιν ἀπὸ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ὀρθὸν ἀνεστακὸς ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐντι κύλινδρον εὑρεῖν τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ' εὐθείας τᾷ ἀνεστακούσᾳ γραμμᾷ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἔστω τᾶς δοθείσας τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἑτέρα διάμετρος ἁ βα. κέντρον δὲ τὸ δ. ἁ δὲ γδ γραμμὰ ἔστω ἀνεστακοῦσα ἀπὸ τοῦ κέντρου, ὡς εἴρηται. ἁ δὲ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, νοείσθω περὶ διάμετρον τὰν αβ ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ, ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐντι αἱ αβ, γδ. δεῖ δὴ κύλιν-

δὴ κύλινδρον εὑρεῖν, τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ' εὐθείας τᾶς γδ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἀπὸ δὴ τῶν α, β σαμείων ἄχθω παρὰ τὰν γδ αἱ αζ, βη. ἁ δὴ ἑτέρα διάμετρος τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἤτοι ἴσα ἐντὶ τῷ διαστήματι τῶν αζ, βη, ἢ μείζων ἢ ἐλάσσων. ἔστω δὴ πρότερον ἴσα τᾷ ζη. ἁ δὲ ζη ἔστω ποτ' ὀρθὰς τᾷ γδ. ἀπὸ δὲ τᾶς ζη, ἀνεστακέτω ἐπίπεδον ὀρθὸν ποτὶ τὰν γδ. καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κύκλος, ἔστω περὶ διάμετρον τὰν ζη. καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἔστω, ἄξονα ἔχων τὰν γδ. ἐν δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ



τοῦ κυλίνδρου τούτου ἐστὶν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. εἰ γὰρ μὴ ἐστίν, ἐσσεῖταί τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. νοείσθω δή τι σαμεῖον λελαμμένον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸ θ, ὃ οὐκ ἐστὶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. καὶ ἀπὸ τοῦ θ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν αβ ἁ θκ. ἐσσεῖται δὲ αὐτὰ ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ αβ, γδ. ἀπὸ δὲ τοῦ κ ἄχθω παρὰ τὰν γδ ἁ κλ, καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἀνεστακέτω ἁ λμ ποτ' ὀρθὰς τᾶς ζη. ἐν τῷ κύκλῳ τῷ περὶ τὰν ζη. τὸ δὲ μ νοείσθω μετέωρον ἐν τᾷ περιφερείᾳ τοῦ ἡμικυκλίου τοῦ περὶ διάμετρον τὰν ζη. τὸ αὐτὸ δὴ ἔχει λόγον τὸ τετράγωνον, τὸ ἀπὸ τᾶς θκ καθέτου, ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν ακ, κβ περιεχόμενον. ὃ τὸ ἀπὸ ζγ ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν αδ, δβ περιεχόμενον. ἐπεὶ ἴσα ἐστὶν ἁ ζη τᾷ ἑτέρᾳ διαμέτρῳ. ἔχει δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζλ, λη περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ ακ, κβ περιεχόμενον λόγον ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ζγ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ αδ διὰ ἐλλείψεως. ἴσον οὖν ἐντὶ τὸ ὑπὸ τᾶς ζλ, λη περιεχόμενον, τῷ ἀπὸ τᾶς θκ τετραγώνῳ. ἔστι δὲ ἴσον καὶ τῷ ἀπὸ λμ, ἴσαι ἄρα ἐντὶ αἱ θκ, μλ κάθετοι. παράλληλοι οὖν ἐντὶ αἱ λκ, μθ. ὥστε καὶ αἱ δγ, μθ παράλληλοι ἐόντι. καὶ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἄρα ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου ἁ θμ. ἐπεὶ ἀπὸ τοῦ μ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐόντος ἆκται περὶ τὸν ἄξονα. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ θ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶν αὐτοῦ. ὑπέκειτο δὲ μὴ εἶμεν. φανερὸν οὖν ἐστὶν ὃ ἔδει δεῖξαι. δῆλον δή, ὅτι καὶ ὁ κύλινδρος ὁ περιλαμβάνων τὰν ἔλλειψιν, ὀρθὸς ἐσσεῖται. εἴκα ἡ ἑτέρα διάμετρος ἴσα τῷ διαστήματι τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ἀγμένας παρὰ τὰν ἀνεστακοῦσαν εὐθεῖαν.

Ἔστω πάλιν ἑτέρα διάμετρος μείζων τᾶς ζη, καὶ ἴσα ἔστω ἁ πζ τᾷ ἑτέρᾳ διαμέτρῳ. ἀπὸ δὲ τᾶς πζ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθόν, ποτὶ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐντὶ ἁ βγδ. καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κύκλος ἔστω περὶ διάμετρον τὰν πζ. ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἔστω, ἄξονα ἔχων τὰν δρ. ἐν



δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τούτου, διὰ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται οὖσα ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.

Ἀλλ' ἔστω ἐλάσσων ἁ ἑτέρα διάμετρος τᾶς ζη, ᾧ δὴ μείζων δύναται ἁ ζγ τᾶς ἡμισείας τᾶς

ἑτέρας

ἑτέρας διαμέτρου. ἔστω τὸ ἀπὸ τᾶς γξ τετράγωνον. καὶ ἀπὸ τοῦ ξ ἀνεστακέτω γραμμὰ ἴσα τᾷ ἡμισείᾳ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου, ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ αβ, γδ, ἁ ξν. τὸ δὲ ν νοείσθω μετέωρον. ἁ οὖν γν ἴσα ἐντὶ τᾷ γζ. ἐν δὴ τῷ ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ ζη, γν κύκλος γεγράφθω περὶ διάμετρον τὰν ζη. ἥξει δὲ οὗτος διὰ τοῦ ν, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου κύλινδρος ἔστω ἄξονα ἔχων τὸν γδ. ἐν δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τοῦτο ἐστὶν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. εἰ γὰρ μὴ ἐστίν, ἐσεῖται τι σαμεῖον ἐπ' αὐτᾶς, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. λελάφθω δή τι σαμεῖον ἐπ' αὐτᾶς τὸ θ. καὶ ἁ θκ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν αβ. καὶ ἀπὸ τοῦ κ παρὰ τὰν γδ ἔστω ἁ κλ, καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τᾷ ζη ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ τῷ περὶ διάμετρον τὰν ζη, ἁ λμ. νοείσθω δὲ τὸ μ ἐπὶ τᾶς τοῦ ἡμικυκλίου τοῦ περὶ τὰν ζη. καὶ ἀπὸ τοῦ μ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν κλ ἐκβληθεῖσαν, ἁ μο. ἐσεῖται δὲ αὕτα ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ αβ, γδ. ἐπεὶ ποτ' ὀρθάς ἐντὶ ἁ κλ τᾷ ζη, ἐστὶν δὴ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τᾶς μο ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς μλ, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς ξν ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς νγ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τᾶς μλ ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν ακ, κβ, οὕτως τὸ ἀπὸ γν ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς αδ. ἐπεὶ τὸ μὲν ἀπὸ τᾶς μλ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τᾶν λζ, λη περιεχομένῳ. τῷ δὲ ἀπὸ τᾶς γν τὸ ἀπὸ τᾶς γζ. ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς μο τετράγωνον ποτὶ ὑπὸ τᾶν ακ, κβ, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς νξ ποτὶ ἀπὸ τᾶς αδ. ἐντὶ δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κθ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ακ, κβ, ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς ξν ποτὶ ἀπὸ τᾶς αδ. ἐπεὶ ἴσα ἐστὶν ἁ ξν τᾷ ἡμισείᾳ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου. δῆλον οὖν ὅτι ἴσαι ἐντὶ αἱ μο, θκ κάθετοι. ὥστε ἴσαι αἱ κθ, θμ. ἐπεὶ δὲ ἁ μθ παρὰ τὸν ἄξονα ἐντὶ τοῦ κυλίνδρου, καὶ τὸ μ σαμεῖον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ, ἀναγκαῖον καὶ τὰν μθ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ εἶμεν τοῦ κυλίνδρου. φανερὸν οὖν ὅτι καὶ τὸ θ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐντὶ αὐτοῦ. οὐκ ἦν δέ. δῆλον οὖν ὅτι ἀναγκαῖον ἐστὶ τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ εἶμεν τοῦ κυλίνδρου.

ια Ὅτι μὲν πᾶς κῶνος ποτὶ κῶνον τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ τῶν βάσεων λόγου, καὶ ἐκ τῶν ὑψέων, ἀποδείκνυται ὑπὸ τῶν πρότερον. ἁ αὐτὰ δὲ ἀπόδειξις ἐντί. καὶ διότι πᾶν ἀπότμαμα κώνου ποτὶ ἀπότμαμα κώνου τὸν συγκείμενον λόγον ἔχει, ἔκ τε τοῦ τῶν βασίων λόγου, καὶ ἐκ τοῦ τῶν ὑψέων. καὶ ὅτι πᾶς τόμος κυλίνδρου, τριπλασίων ἐστὶ τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τόμῳ, καὶ ὕψος ἴσον, ἁ αὐτὰ ἀπόδειξις, ἅπερ καὶ ὅτι ὁ κύλινδρος τριπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ κυλίνδρῳ, καὶ ὕψος ἴσον.

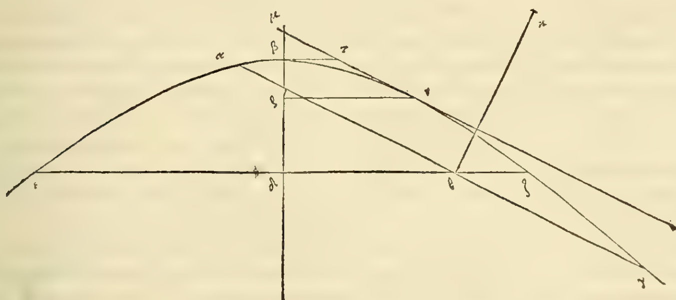
ιβ Εἴκα τὸ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ἢ παρὰ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ ἐσεῖται ὀρθογωνίου κωνοειδέος τομὰ αὐτὰ ἁ περιλαμβάνουσα τὸ σχῆμα. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἐσσεῖται, ἁ κοινὰ τομὰ τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα, καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἀχθέντος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ τέμνον. εἰ δέ κα τμαθῇ τῷ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ κύκλος ἐσεῖται, τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος. εἴκα τὸ ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ἢ παρὰ τὸν ἄξονα διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, ἁ τομὰ ἐσεῖται ἀμβλυγωνίου κώνου τομά. εἰ μὲν διὰ τοῦ ἄξονος αὐτὰ ἁ περιλαμβάνουσα τὸ σχῆμα, εἰ δὲ καὶ παρὰ τὸν ἄξονα ὁμοία αὐτᾷ. εἰ δὲ καὶ διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, οὐχ ὁμοία. διάμετρος δὲ τᾶς τομᾶς ἐσεῖται, ἁ κοινὰ τομὰ τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα, καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. εἴκα τμαθῇ ὀρθῷ τῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸν ἄξονα ἁ τομὰ κύκλος ἐσεῖται, τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος. εἴκα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτερονοῦν ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ἢ παρὰ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ ἐσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. εἰ μὲν καὶ διὰ τοῦ ἄξονος, αὐτὰ ἁ περιλαμβάνουσα τὸ σχῆμα. εἰ δὲ καὶ παρὰ τὸν ἄξονα ὁμοία αὐτᾷ, διάμετρος δὲ τᾶς τομᾶς ἐσεῖται ἁ κοινὰ τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα, καὶ τοῦ ἀχθέν-

τος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. εἰ δὲ καὶ τμηθῇ τῷ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα κύκλος ἐσσεῖται, τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος. εἴκα τῶν εἰρημένων σχημάτων ὁποιονοῦν ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, αἱ ἀπὸ τῶν σαμείων τῶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος μὴ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐόντων κάθετοι ἀγόμεναι ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, ἐντὸς πεσοῦνται τᾶς τοῦ σχήματος τομᾶς. τούτων δὲ πάντων φανερόν ἐντι αἱ ἀποδείξιες.

ιγ Εἴκα τὸ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμηθῇ, μήτε διὰ τοῦ ἄξονος, μήτε παρὰ τὸν ἄξονα, μήτε ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἐσσεῖται ἁ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ κωνοειδεῖ, ἀπὸ τᾶς γενομένας τομᾶς τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα, καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. ἁ δὲ ἐλάσσων διάμετρος ἴσα ἐσσεῖται τῷ διαστήματι τᾶν ἀχθεισᾶν παρὰ τὸν ἄξονα, ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς μείζονος διαμέτρου. τετμάσθω γὰρ τὸ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ, ὡς εἴρηται. τμηθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ἄλλῳ, διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. ἔστω τοῦ μὲν κωνοειδέος τομὰ ἁ αβγ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα ἁ γα εὐθεῖα. ἄξων δὲ ἔστω τοῦ κωνοειδέος, καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ βδ. δεικτέον ὅτι ἁ τομὰ τοῦ κωνοειδέος, ἁ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου κατὰ τὰν ἁ αγ, ὀξυγωνίου ἐστὶ κώνου τομά. καὶ διάμετρος αὐτᾶς ἁ μείζων ἐστὶν ἁ αγ. ἁ δὲ ἐλάσσων διάμετρος ἴσα ἐντὶ ἁ λα, τᾶς μὲν γλ παρὰ τὰν βδ ἐούσας, τᾶς δὲ αλ καθέτου ἐπὶ τὰν γλ. νοείσθω τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τομᾶς λελαμμένον τὸ κ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ κάθετος ἤχθω ἐπὶ τὰν γα, ἁ κθ. ἐσσεῖται οὖν ἁ κθ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐστιν ἁ αγβ ὀρθογωνίου κώνου τομά. διότι καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. διὰ δὲ τοῦ θ ἄχθω ἁ εζ ὀρθὰς ποιοῦσα γωνίας ποτὶ τὰν βδ. καὶ διὰ τᾶν εζ, κθ εὐθειᾶν ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω. ἐσσεῖται δὲ τοῦτο ὀρθὸν ποτὶ τὰν βδ. τετμήσεται δὲ τὸ κωνοειδὲς σχῆμα ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ὥστε ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ δ. ἁ ἄρα κθ ἴσον δυνασεῖται τῷ ὑπὸ ζθ, θε. ἡμικύκλιον γὰρ ἐστὶ τὸ ἐπὶ τᾶς εζ. καὶ ἁ κθ κάθετος οὖσα, μέση γίνεται ἀνὰ λόγον τῶν ὑπὸ τᾶν εθ, θζ περιεχομένων. ἄχθω δὴ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἁ μὲν μν παρὰ τὰν αγ, ἐπιψαυέτω δὴ κατὰ τὸ ν. ἁ δὴ βτ παρὰ τὰν εζ. τὸ δὴ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν αθ, θγ, ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν εθ, θζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶν ντ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς βτ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. τᾷ δὲ ντ ἴσα ἐντὶ ἁ τμ. διότι καὶ ἁ βρ τᾷ βμ. ἔχει οὖν καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν αθ, θγ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κθ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς τμ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τβ. ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θκ καθέτου τετράγωνον, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν αθ, θγ περιεχόμενον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς βτ τετράγωνον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τμ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐντι τὰ γαλ, τμβ τρίγωνα * ὁμοίως δειχθήσονται καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἄλλαν καθέτων τετράγωνα, τᾶν ἀγομένων ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν αγ, ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τᾶς αγ τμαμάτων, τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς αλ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς αγ. δῆλον οὖν ὅτι ἁ τομὰ ἐστὶν ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς εἰσὶν ἁ μὲν μείζων ἁ αγ, ἁ δὲ ἐλάσσων ἴσα τᾷ αλ.

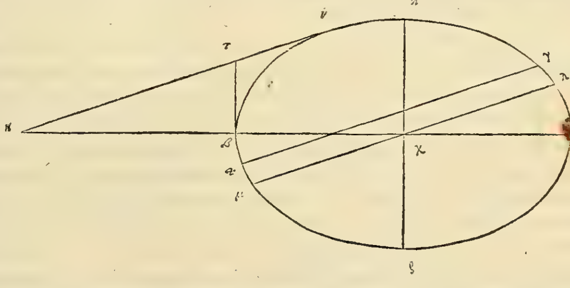
ιδ Εἴκα τὸ ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμηθῇ συμπίπτοντι πάσαις ταῖς τοῦ κώνου πλευραῖς τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, μὴ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. διά-

μά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἐσσεῖται, ἁ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀπὸ τᾶς γενομένας τομᾶς τῶν ἐπιπέδων, τοῦ τε τέμνοντος τὸ σχῆμα καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. τεμνέσθω γὰρ τὸ ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ, ὡς εἴρηται. καὶ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ τμηθέντος αὐτοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν κωνοειδέος τομὰ ἔστω ἁ α β γ ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ τέμνοντος τὸ σχῆμα ἐπιπέδου ἁ α γ εὐθεῖα, ἄξων δὲ τοῦ κωνοειδέος,



καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ β δ. νοείσθω δή τι ἐπὶ τᾶς τομᾶς λελαμμένον σαμεῖον τὸ κ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ καθετὸς ἄχθω ἐπὶ τὰν α γ, ἁ κ θ. ἐσσεῖται δὴ αὕτα ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐντὶ ἁ α β γ κώνου τομά. διὰ δὲ τοῦ θ ἄχθω ἁ ε ζ ποτ' ὀρθὰς τᾷ β δ. καὶ διὰ τᾶν ε ζ, κ θ εὐθειᾶν ἐπίπεδον ἄχθω, τέμνον τὸ κωνοειδές. τετμάσεται δὴ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ὥστε ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ δ. ἁ ἄρα καθετὸς ἁ κ θ ἴσον δυνασεῖται τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ε θ, θ ζ. ἄχθω δὴ πάλιν ἁ μὲν μ ν παρὰ τὰν α γ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ ν. ἁ δὲ β τ παρὰ τὰν ε ζ. τὸ δὴ περιεχόμενον ὑπὸ ε θ, θ ζ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν α θ, θ γ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς β τ πρὸς τὸ ἀπὸ τᾶς τ ν. ὥστε τὸ ἀπὸ τᾶς κ θ καθέτου τετράγωνον ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν α θ, θ γ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς β τ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τ ν. ὁμοίως οὖν δειχθησοῦντι, καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἄλλαν καθετᾶν τᾶν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἀγομένων, ἐπὶ τὰν α γ ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς α γ, ὧν αἱ καθετοὶ ποιοῦντι τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς β τ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τ ν. καί ἐστιν ἐλάσσων ἁ β τ τᾶς τ ν. διότι καὶ ἁ μ τ ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς τ ν. καὶ γὰρ ἁ μ β, ἐλάσσων τᾶς β ρ. τοῦτο γάρ ἐστιν ἐν ταῖς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομαῖς συμπίπτοντι. δῆλον ὅτι ἁ τομά, ὀξυγωνίου κώνου τομά. καὶ διάμετρος αὐτᾶς μείζων ἁ α γ. ὁμοίως καθέτου οὔσης τᾶς ν ρ ἐν τᾷ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾷ, διάμετρος ταύτας μείζων ἐστὶν ἁ γ λ.

Εἴκα καὶ τὸ παραμακὲς σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ τμηθῇ, μὴ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἐσσεῖται, ἁ ἐναπολαφ- ιε
θεῖσα ἐν τῷ σφαιροειδεῖ ἀπὸ τᾶς γενομένας τομᾶς τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα, καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. εἰ μὲν οὖν κατμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ἢ παρὰ τὸν ἄξονα δῆλον. τετμάσθω δὲ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ. τμηθέντος δὲ αὐτοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον τοῦ σφαιροειδέος τομά. ἔστω ἁ α β γ δ ὀξυγωνίου κώνου τομά. τοῦ δὲ τέμνοντος αὐτὸ ἐπίπεδον, ἁ γ α εὐθεῖα. ἄξων δὲ ἔστω



τοῦ σφαιροειδέος, καὶ διάμετρος τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἁ β δ. κέντρον δὲ τὸ χ. καὶ ἐλάσ-

σων διάμετρος ἔστω ἁ π ρ. ἄχθω δὲ ἁ μὲν β τ ποτ' ὀρθὰς τᾶ β δ, ἁ δὲ ξ ν παρὰ τὰν α γ, ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὸ ν. ἄχθω δὴ καὶ ἁ ν λ διὰ τοῦ χ παρὰ τὰν α γ. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθησοῦντι τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν καθέτων τᾶν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν α γ, ἀγομένας ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τᾶς α γ τμαμάτων, τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς β τ τετράγωνον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τ ν. ὅτι μὲν οὖν ἁ τομὰ ἐστὶν ὀξυγωνίου κώνου τομά, καὶ διάμετρος αὐτᾶς ἁ γ α, δῆλον. ὅτι δὲ μείζων, δεικτέον. τὸ γὰρ ὑπὸ τᾶν π χ, χ ρ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ μ χ, χ λ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς β τ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ν τ. ἐπεὶ παρὰ τὰς ἐπιψαυούσας ἐντὶ αἱ π ρ, μ λ. ἔλασσον δέ ἐστι τὸ ὑπὸ τᾶν π χ, χ ρ περιεχόμενον τοῦ ὑπὸ τᾶν μ χ, χ λ. ἐπεὶ καὶ ἡ χ π τᾶς χ λ. ἔλασσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς β τ τετράγωνον, τοῦ ἀπὸ τᾶς τ ν. ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν καθέτων τετράγωνα τῶν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν α γ ἀγομενᾶν ἐλάσσων ἐντὶ τῶν ὑπὸ τᾶν τμαμάτων τᾶς α γ περιεχόμενα. δῆλον οὖν ὅτι μείζων ἐντὶ διάμετρος ἁ γ α, εἴκα τὸ ἐπιπλατυσφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ, τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτὰ ἐσσεῖται. τᾶν δὲ διαμέτρων ἐλάσσων ἐσσεῖται ἁ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ σφαιροειδεῖ. ἐξ αὐτῶν δὲ φανερόν ἐντι πᾶσι τοῖς σχημάτεσσιν, ὅτι εἴκα παραλλήλοις ἐπιπέδοις τμαθῇ, αἱ αὐτῶν τομαὶ ὁμοῖαι ἐσσοῦνται. τὰ γὰρ τετράγωνα τᾶν ἀπὸ τῶν καθέτων ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων τοὺς αὐτοὺς λόγους ἑξοῦντι.

ιε Εἴκα τῷ ὀρθογωνίῳ κωνοειδεῖ ἀπὸ παντὸς ὁτουοῦν σαμείου τῶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κωνοειδέος ταὶ ἀγόμεναι εὐθεῖαι παρὰ τὸν ἄξονα, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι, ἐφ' ἃ ἐντὶ τὰ κυρτὰ αὐτοῦ ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ κωνοειδέος, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός. ἀχθέντος γὰρ ἐπιπέδου διά τε τοῦ ἄξονος καὶ τοῦ σαμείου, ἀφ' οὗ ἁ παράλληλος ἄγεται τῷ ἄξονι τομὰ ἐσσεῖται ὀρθογωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ὁ ἄξων τοῦ κωνοειδέος. ἐν δὲ τᾷ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ, ἀπὸ παντὸς σαμείου τοῦ ἐπὶ τᾶς τομᾶς ἀγομέναν παρὰ τὰν διάμετρον εὐθεῖαν, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι ἐφ' ἃ ἐντὶ τὰ κυρτὰ αὐτῆς, ἐκτὸς πίπτοντι, αἱ δὲ ἐπὶ τὰ θάτερα ἐντός. δῆλον οὖν τὸ προτεθέν. ἐν τῷ ἀμβλυγωνίῳ κωνοειδεῖ ἀπὸ παντὸς σαμείου τῶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ ταὶ ἀγόμεναι εὐθεῖαι παρά τινα γραμμάν, ἅ ἐστιν ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀγομένας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι, ἐφ' ἃ ἐντὶ τὰ κυρτὰ αὐτοῦ ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ κωνοειδέος· αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός. ἀχθέντος γὰρ ἐπιπέδου διά τε τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀγομένας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, καὶ διὰ τοῦ σαμείου ἀφ' οὗ ἄγεται ἁ εὐθεῖα, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ἀμβλυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀγομένα. ἐν δὲ τᾷ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾷ ἀπὸ παντὸς σαμείου τοῦ ἐπὶ τᾶς τομᾶς τὰν ἀγομέναν εὐθεῖαν παρὰ τὰν οὕτως ἀγομέναν γραμμάν, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι, ἐφ' ἃ ἐστὶν αὐτᾶς τὰ κυρτὰ ἐκτὸς πίπτοντι, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός. εἴκα τῶν κωνοειδέων σχημάτων ἐπίπεδον ἐφάπτηται, μὴ τέμνον τὸ κωνοειδές, καθ' ἓν μόνον ἅψεται σαμεῖον. καὶ τὸ διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον. ἐφαπτέσθω γὰρ εἰ δυνατὸν κατὰ πλείονα σαμεῖα. λαφθέντων δὲ δύο σαμείων καθ' ἃ ἅπτεται τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον τοῦ κωνοειδέος, καὶ ἀφ' ἑκατέρου παρὰ τὸν ἄξονα εὐθεῖαν ἀχθεισᾶν. ἀπὸ δὲ τᾶν ἀχθεισᾶν παρὰ τὸν ἄξονα ἐπίπεδον ἐκβληθέν, ἤτοι διὰ τοῦ ἄξονος, ἢ παρὰ τὸν ἄξονα ἐσσεῖται ἀγμένον. ὥστε τὰν τομὰν ποιήσει κώνου τομάν, καὶ τὰ σαμεῖα ἐσσοῦνται ἐν τᾷ τοῦ κώνου τομᾷ. ἐπεὶ οὖν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐντί, καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. ἁ οὖν μεταξὺ τῶν σαμείων εὐθεῖα ἐντὸς ἐσσεῖται τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ὥστε καὶ τᾶς τοῦ κωνοειδέος ἐπιφανείας ἐντὸς ἐσσεῖται. ἔστι δὲ ἁ εὐθεῖα αὐτὰ ἐν τῷ ἐπιψαύοντι ἐπιπέδῳ. διότι καὶ τὰ σαμεῖα. τοῦ ἄρα ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου ἐσσεῖταί τι ἐντὸς τοῦ κωνοειδέος, ὅπερ ἀδύνατον. ὑπέκειτο γάρ, μὴ τέμνειν. καθ' ἓν ἄρα μόνον ἅψεται σαμεῖον. ὅτι δὲ καὶ διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπιψαῦον κατὰ τὰν κορυφὰν τοῦ κωνοειδέος, ἐφάπτεται δῆλον. ἀχθέντων γὰρ διὰ τοῦ ἄξονος

δύο ἐπι-

δύο ἐπιπέδων τοῦ κωνοειδέος αἱ τομαὶ ἐσσοῦνται κώνων τομαί, διαμέτρους ἔχουσαι τὸν ἄξονα. τοῦ δὲ ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου αἱ εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι τᾶν τῶν κώνων τομᾶν κατὰ τὸ πέρας τᾶς διαμέτρου ὀρθὰς ποιοῦντι γωνίας ποτὶ τὰν διάμετρον. ἐσσοῦνται οὖν ἐν τῷ ἐπιψαύοντι ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ὀρθὸν οὖν ἐσσεῖται ποτὶ τὸν ἄξονα τὸ ἐπίπεδον. ὥς τε καὶ πρὸς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος. ἀλλὰ ἔστω μὴ κατὰ τὰν κορυφὰν τοῦ κωνοειδέος ἐπιψαῦον τὸ ἐπίπεδον. ἄχθω δὴ ἐπίπεδον διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος. καὶ τοῦ μὲν κωνοειδέος τομὰ ἔστω ἁ β γ κώνου τομά. ἄξων δὲ ἔστω καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ β δ. τοῦ δὲ ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου τομά, ἔστω ἁ ε θ ζ εὐθεῖα, τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς ἁπτομένα κατὰ τὸ θ. ἀπὸ δὲ τοῦ θ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν β δ, ἁ θ κ καὶ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθὸν ἐπὶ τὸν ἄξονα. ποιήσει δὲ τοῦτο τὰν τομὰν κύκλον, οὗ κέντρον τὸ κ. ἁ δὲ τομὰ τούτου τοῦ ἐπιπέδου καὶ τοῦ ἐπιψαύοντος ἐσσεῖται ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου, ὀρθὰς ἄρα ποιήσει γωνίας ποτὶ τὰν θ κ. ὥς τε ὀρθὰ ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, τῷ ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ κ θ, β δ. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ἐπεὶ καὶ αἱ ἐν αὐτῷ εὐθεῖαι.

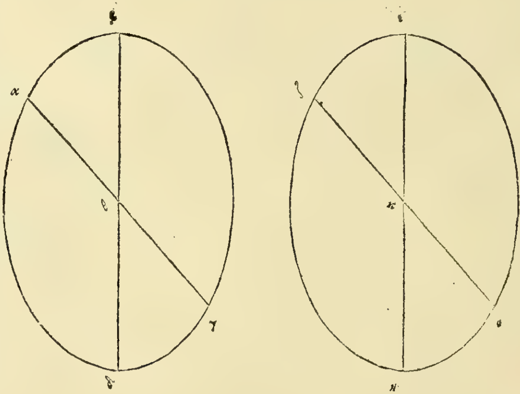
Εἴκα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτερονοῦν ἐπίπεδον ἅπτηται μὴ τέμνον τὸ σχῆμα, καθ' ἓν μόνον ἅψεται σαμεῖον, καὶ τὸ διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον. ἁπτέσθω γὰρ κατὰ πλείονα σαμεῖα. λαφθέντων δὲ τῶν σαμείων καθ' ἃ ἅπτεται τὸ ἐπίπεδον τοῦ σφαιροειδέος, καὶ ἀφ' ἑκατέρου αὐτῶν παρὰ τὸν ἄξονα εὐθεῖαι ἀχθῶσι, καὶ διὰ τῶν ἀχθεισῶν ἐπιπέδου ἐκβληθέντος ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. καὶ τὰ σαμεῖα ἐσσοῦνται ἐν τᾷ τοῦ κώνου τομᾷ. ἁ οὖν μεταξὺ τῶν σαμείων εὐθεῖα ἐντὸς ἐσσεῖται τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς. ὥς τε καὶ τᾶς τοῦ σφαιροειδέος ἐπιφανείας ἐντὸς ἐσσεῖται. ἔστι δὲ ἁ εὐθεῖα ἐν τῷ ἐπιψαύοντι ἐπιπέδῳ, διότι καὶ τὰ σαμεῖα. τοῦ οὖν ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου ἐσσεῖταί τι ἐντὸς τοῦ σφαιροειδέος. οὐκ ἔστι δέ, ὑπέκειτο γὰρ μὴ τέμνειν. δῆλον οὖν ὅτι καθ' ἓν σαμεῖον μόνον ἅψεται. ὅτι δὲ τὸ διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐπιψαῦον, ὁμοίως τοῖς περὶ τῶν κωνοειδέων σχημάτων. εἴκα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποιονοῦν ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ τᾶς γενομένας τομᾶς ἐπιψαύουσά τις ἀχθῇ εὐθεῖα, καὶ διὰ τᾶς ἐπιψαυούσας ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν ποτὶ τὸ τέμνον, ἐπιψαύσει τοῦ σχήματος κατὰ τὸ αὐτὸ σαμεῖον, καθ' ὃ καὶ ἁ εὐθεῖα ἐπιψαύει τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς. οὐ γὰρ ἅψεται κατ' ἄλλο σαμεῖον τᾶς ἐπιφανείας αὐτοῦ. εἰ δὲ μή, ἁ ἀπὸ τοῦ σαμείου κάθετος ἀγομένα ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον πεσεῖται ἐντὸς τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς. ἐπεὶ γὰρ τὰν ἐπιψαύουσαν πεσεῖται, ἐπεὶ ὀρθὰ ποτ' ἄλλαλα ἐντὶ τὰ ἐπίπεδα, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ ὅτι ἐντὸς πεσεῖται. ιζ

Εἴκα τῶν σφαιροειδέων τινὸς σχημάτων δύο ἐπίπεδα παράλληλα ἐπιψαύοντι, ἁ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος πορεύσεται. ὅτι μὲν οὖν κατ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι τὰ ἐπίπεδα ἐντὶ δῆλον. ἀλλ' ἔστω μὴ ποτ' ὀρθάς. τὸ δὴ ἐπίπεδον τὸ ἀχθὲν διὰ τοῦ ἄξονος καὶ τᾶς ἁφᾶς τᾶς ἑτέρας, ὀρθὸν ἐσσεῖται πρὸς τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον. ὥς τε καὶ ποτὶ τὸ παράλληλον αὐτῷ. ἀναγκαῖον ἄρα τὸ αὐτὸ εἶμεν ἐπίπεδον, ὃ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ἑκατέρας ἁφᾶν ἀγμένον. εἰ δὲ μή, ἐσσοῦνται δύο ἐπίπεδα ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ὀρθὰ διὰ τᾶς αὐτᾶς γραμμᾶς ἀγμένα. οὐκ ἐούσας ὀρθᾶς ποτὶ τὸ ἐπίπεδον. ὑπέκειτο γὰρ ὁ ἄξων μὴ εἶμεν ὀρθὸς ποτὶ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα. ἐν τῷ αὐτῷ ἄρα ἐσσοῦνται ἐπιπέδῳ ὅ τε ἄξων καὶ αἱ ἁφαί, καὶ τετμηκὸς ἐσσεῖται τὸ σφαιροειδὲς διὰ τοῦ ἄξονος. ἁ οὖν τομὰ ἐσσεῖται, ὀξυγωνίου κώνου τομά. αἱ δὲ τῶν ἐπιψαυουσῶν ἐπιπέδων τομαὶ παράλληλοι ἐσσοῦνται αἱ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὰς ἁφὰς τῶν ἐπιπέδων. εἰ δέ κα δύο εὐθεῖαι ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐπιψαύοντι παράλληλοι ἐοῦσαι, τό τε κέντρον τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, καὶ αἱ ἁφαὶ ἐπ' εὐθείας ἐντί. ιη

Εἴκα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτερονοῦν δύο παράλληλα ἐπίπεδα ἀχθῇ ἐπιψαύοντα, ἀχθῇ δέ τι ἐπίπεδον διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος παρὰ τὰ ἐπιψαύοντα, αἱ διὰ τᾶς γενομένας τομᾶς ἀγόμεναι παρὰ τὰν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ σφαιροειδέος. ὑποκείσθω τὰ εἰρημένα, καὶ λελάφθω τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς γενομένας τομᾶς. καὶ διὰ τοῦ γενομένου σαμείου, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσας ἐπίπεδον ἄχθω. τέμνει δὲ τοῦτο τὸ σφαιροειδὲς καὶ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα. ἔστω οὖν ἁ μὲν τοῦ ιθ

σφαιροειδέος τομὰ ἁ α β γ δ ὀξυγωνίου κώνου τομά. αἱ δὲ τῶν ἐπιπέδων τῶν ἐφαπτομένων τομαί, αἱ ε ζ, η θ εὐθεῖαι. τὸ δὴ λαφθὲν σαμεῖον, τὸ α. ἁ δὲ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα ἔστω ἁ β δ. πεσεῖται δὴ αὐτὰ διὰ τοῦ κέντρου. ἁ δὲ τοῦ παραλλήλου ἐπιπέδου τοῖς ἐπιψαυόντεσσιν ἐπιπέδοις τομὰ ἁ γ α. ἐσσεῖται δὲ αὐτὰ διὰ τοῦ κέντρου ἀγομένα, ἐπεὶ καὶ τὸ ἐπίπεδον. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ἁ α β γ δ, ἤτοι κύκλος ἢ ὀξυγωνίου κώνου τομά. καὶ ἐπιψαύοντι αὐτᾶς αἱ δύο εὐθεῖαι αἱ ε ζ, η θ. διὰ δὲ τοῦ κέντρου παράλληλος αὐταῖς ἁ α γ. δῆλον ὡς αἱ ἀπὸ τῶν α γ ἀγόμεναι σαμείων παρὰ τὰν β δ ἐπιψαύοντι τᾶς τομᾶς, ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ σφαιροειδέος. εἰ δὲ καὶ τὸ παράλληλον ἐπίπεδον τοῖς ἐπιψαύοντεσσι σαμείοις, μὴ διὰ τοῦ κέντρου ἀγμένον, ἢ ὡς τὸ κ λ. δῆλον ὡς τὰν ἀπὸ τᾶς τομᾶς τὰν γενομέναν εὐθεῖαν, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ γενόμεναι τῷ ἐλάσσονι τμάματι, ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ σφαιροειδέος, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός.

κ Πᾶν σχῆμα σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθὲν διὰ τοῦ κέντρου, δίχα τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου, καὶ αὐτὸ καὶ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ. τετμάσθω γὰρ τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου, ἤτοι δὴ καὶ διὰ τοῦ ἄξονος ἐσσεῖται τετμημένον, ἢ ποτ᾽ ὀρθὰς τῷ ἄξονι. εἰ μὲν οὖν διὰ τοῦ ἄξονος τέμνεται, ἢ ποτ᾽ ὀρθὰς τῷ ἄξονι, δῆλον ὡς δίχα τέμνεται τὸ αὐτὸ καὶ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ. φανερὸν γὰρ ὅτι ἐφαρμόζει τὸ ἕτερον μέρος αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἕτερον, καὶ ἁ ἐπιφάνεια τοῦ ἑτέρου μέρεος ἐπὶ τὰν ἑτέρου. ἀλλ᾽ ἔστω μὴ διὰ τοῦ ἄξονος τετμημένον, μήτε ποτ᾽ ὀρθὰς τῷ ἄξονι. τμαθέντος δὴ τοῦ σφαιροειδέος ἐπιπέδῳ ὀρθῷ, ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον διὰ τοῦ ἄξονος, αὐτοῦ μὲν τοῦ σχήματος τομὰ ἔστω ἁ α β γ δ ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἔστω καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδέος, ἁ β δ. καὶ κέντρον τὸ θ. τοῦ δ᾽ ἐπιπέδου τοῦ τετμηκότος διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος, ἔστω τομὰ ἁ α γ εὐθεῖα. λελάφθω δὴ καὶ ἄλλο σφαιροειδές, ἴσον καὶ ὅμοιον τούτῳ. καὶ τμαθέντος αὐτοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ τομά, ἔστω ἁ ε ζ η ν ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδέος ἁ ε η, καὶ κέντρον τὸ κ. καὶ διὰ τοῦ κ ἄχθω ἁ ζ ν γωνίαν ποιοῦσα τὰν κ, ἴσαν τᾷ θ.



ἀπὸ δὲ τᾶς ζ ν ἐπίπεδον ἔστω ἀνεστακὸς ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ ε ζ η ν τομά. ἐντὶ διὰ τῶν ὀξυγωνίων κώνων τομαί, αἱ α β γ δ, ε ζ η ν, ἴσαι καὶ ὅμοιαι ἀλλήλαις. ἐφαρμόζοντι οὖν ἐπ᾽ ἀλλάλας τεθείσας τὰς ε η ἐπὶ τὰν β δ, καὶ ἁ ζ ν ἐπὶ τὰν α γ. ἐφαρμόζει δὲ καὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν ν ζ τῷ ἐπιπέδῳ τῷ κατὰ τὰν α γ. ἐπεὶ ἀπὸ τᾶς αὐτᾶς γραμμᾶς ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἀμφότερα ἐντί, ἐφαρμόζει οὖν καὶ τὸ τμᾶμα τὸ ὑπὸ ἐπιπέδου ἀποτεμνόμενον τοῦ κατὰ τὰν ν ζ, ἀπὸ τοῦ σφαιροειδέος τὸ ἐπὶ τὰς τῷ ἑτέρῳ τμάματι τῷ ἀποτεμνομένῳ ἀπὸ τοῦ ἑτέρου σφαιροειδέος, ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὰν α γ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ β. καὶ λοιπὸν τμᾶμα ἐπὶ τὸ λοιπόν. καὶ ἁ ἐπιφάνεια τῶν τμαμάτων ἐπὶ τὰς ἐπιφανείας. πάλιν δὲ καὶ τεθείσας τᾶς ε η ἐπὶ τὰν β δ οὕτως, ὥστε τὸ μὲν ε κατὰ τὸ δ κεῖσθαι. τὸ δὲ η κατὰ τὸ β. τὰ δὲ μεταξὺ τῶν ν ζ σαμείων γραμμὰν ἐπὶ τὰν μεταξὺ τῶν α γ σαμείων. δῆλον ὡς αἵ τε τῶν ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ ἐφαρμόζοντι ἐπ᾽ ἀλλάλας. καὶ τὸ μὲν ζ ἐπὶ τὸ γ πεσεῖται, τὸ δὲ ν ἐπὶ τὸ α. ὁμοίως καὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν ν ζ, ἐφαρμόζει τῷ ἐπιπέδῳ τῷ κατὰ τὰν α γ, καὶ τῶν τμαμάτων τῶν ἀποτεμνομένων ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὰν ν ζ. τὸ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ η ἐφαρμόζει τῷ τμάματι, τῷ ἀποτεμνομένῳ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὰν α γ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ β. τὸ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ ε τῷ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ δ. ἐπεὶ δὲ τὸ αὐτὸ τμᾶμα ἑκατέρον τῶν τμαμάτων ἐφαρμόζει, δῆλον ὅτι ἴσα ἐντὶ τὰ τμάματα. διὰ ταῦτα δὲ καὶ αἱ ἐπιφάνειαι.

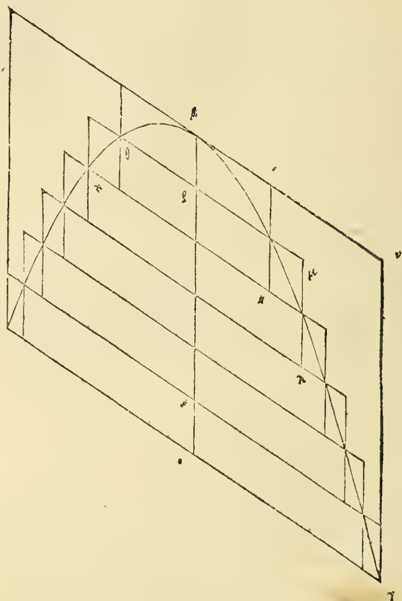
Τμάματος

Τμάματος δοθέντος ὁποτερουοῦν τῶν κωνοειδέων, ἀποτεμνομένου ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἢ τῶν σφαιροειδέων ὁποτερουοῦν, μὴ μείζονος ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, ὁμοίως ἀποτεμνομένου, δυνατόν ἐστι τμᾶμα στερεὸν ἐγγράψαι, καὶ ἄλλο περιγράψαι ἐκ κυλίνδρων ἴσον ὕψος ἐχόντων τῶν συγκειμένων. ὥστε τὸ περιγραφόμενον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ἐλάσσονι ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. δεδόσθω τμᾶμα, οἷον ἐστὶ τὸ α β γ. τμηθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος τμάματος, τομὰ ἔστω ἁ α β γ κώνου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμᾶμα ἁ α γ εὐθεῖα. ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμάματος καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς, ἁ β δ. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται τὸ ἀποτέμνον ἐπίπεδον ὀρθὸν εἶμεν ἐπὶ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ κύκλος ἐστί, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἁ γ α. ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἔστω, ἄξονα ἔχων τὸν β δ. πεσεῖται δὲ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἐκτὸς τοῦ τμάματος. ἐπεὶ ἐστὶ δὲ ἤτοι κωνοειδές, ἢ σφαιροειδὲς μὴ μεῖζον τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, τοῦ δὴ κυλίνδρου τούτου ἀεὶ δίχα τεμνομένου ἐπιπέδοις ὀρθοῖς ποτὶ τὸν ἄξονα, ἐσσεῖται ποτὲ τὸ καταλειπόμενον ἔλασσον τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. ἔστω δὲ τὸ καταλελειμμένον ἀπ' αὐτοῦ κύλινδρος, ἔχων βάσιν τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὸν ε δ, ἔλασσον τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. διαιρήσθω δὴ ἁ β δ ἐς τὰς ἴσας τὰς ε δ, κατὰ τὰ ρ ο, π ξ. καὶ ἀπὸ τῶν διαιρεσίων ἄχθων εὐθεῖαι παρὰ τὰν α γ. ἔσαι ποτὶ τὰν τοῦ κώνου τομάν. ἀπὸ δὲ τᾶν ἀχθεισᾶν ἐπίπεδα ἀνεστακέτω ὀρθὰ ποτὶ τὰν β δ. ἐσσοῦνται δὴ αἱ τομαὶ κύκλοι, τὰ κέντρα ἔχοντες ἐπὶ τᾶς β δ. ἐφ' ἑκάστου δὴ τῶν κύκλων δύο κύλινδροι ἀναγεγράφθω, ἑκάτερος ἔχων ἄξονα ἴσον τῷ ε δ, ὁ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τοῦ κυλίνδρου ἐφ' ἃ ἐστὶ τὸ δ, ὁ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἐφ' ἃ ἐστὶ τὸ β. ἐσσεῖται δή τι ἐν τῷ τμάματι σχῆμα στερεὸν ἐγγεγραμμένον ἐκ τῶν κυλίνδρων συγκείμενον τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀναγραφέντων, ἐφ' ἃ ἐστὶ τὸ δ. καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον, καὶ συγκείμενον ἐκ τε τῶν κυλίνδρων τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀναγραφέντων τῶν ἐφ' ἃ τὸ β ἐστί. λοιπὸν δὲ δεῖξαι, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου ὑπερέχει ἐλάσσονι τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος, ἕκαστος δὴ τῶν κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι ἴσος ἐστὶ τῷ κυλίνδρῳ τῷ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἀναγραφομένῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὸ β, ὡς ὁ μὲν θ π τῷ θ ι, ὁ δὲ κ λ τῷ κ μ. καὶ οἱ ἄλλοι ὡσαύτως. καὶ πάντες δὲ οἱ κύλινδροι πᾶσιν ἴσοι εἰσίν. δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ὑπερέχει τῷ κυλίνδρῳ, τῷ βάσιν ἔχοντι τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν ε δ. οὗτος δὲ ἐστὶν ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. κα

Τμάματος δοθέντος ὁποτερουοῦν τῶν κωνοειδέων ἀποτετμημένου ἐπιπέδῳ μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἢ τῶν σφαιροειδέων ὁποτερουοῦν μὴ μείζονος ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, ὁμοίως ἀποτετμημένου, δυνατόν ἐστιν εἰς τὸ τμᾶμα στερεὸν ἐγγράψαι ἐκ κυλίνδρων τομῶν ὕψος ἴσον ἐχόντων τὸ συγκείμενον. ἔστω τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. δεδόσθω τμᾶμα οἷον εἴρηται. τμηθέντος δὲ τοῦ σχήματος ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ, ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμηκὸς τὸ δοθὲν τμᾶμα. τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ α β γ δ κώνου τομά. τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμηκότος τὸ τμᾶμα, ἁ γ α εὐθεῖα. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμηκὸς τὸ τμᾶμα μὴ εἶμεν ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ δ γ. *ἁ φ υ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἐπιψαυέτω δὲ κατὰ τὸ β, καὶ ἀπὸ τᾶς φ υ ἀνεστακέτω ἐπίπεδον παράλληλον τῷ κατὰ τὰν α γ, ἐπιψαύσει δὴ τοῦ σχήματος κατὰ τὸ β. καὶ εἰ μὲν ἐστὶ τὸ τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ἀπὸ τοῦ β ἄχθω παρὰ τὸν ἄξονα ἁ β δ. εἰ δὲ ἀμβλυγωνίου ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδὲς εὐθεῖα ἀχθεῖσα ἐπὶ τὸ β ἐκβεβλήσθω, ἁ β δ. εἰ δὲ σφαιροειδέος ἐπὶ τὸ β ἀχθεῖσα εὐθεῖα ἀπολελάφθω ἁ β δ. δῆλον δὲ ὅτι τέμνει ἁ β δ δίχα τὰν α γ. ἔστιν οὖν τὸ μὲν β κορυφὰ τοῦ τμάματος, ἁ δὲ β δ, κβ

εὐθεῖα

εὐθεῖα ἄξων. ἔστι δὴ τᾶς ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν α γ. ἁ γραμμὰ ἁ β δ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστακοῦσα ἐν ὀρθῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, διὰ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ἐόντος τοῦ ἐπιπέδου. δυνατὸν οὖν ἐστι κύλινδρον εὑρεῖν ἄξονα ἔχοντα τὰν β δ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν α γ. πεσεῖται δὲ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἐκτὸς τοῦ τμάματος. ἐπεὶ ἐστιν ἤτοι κωνοειδέος ἢ σφαιροειδέος τμᾶμα, καὶ οὐ μεῖζον ἐστὶν ἡμίσεως τοῦ σφαιροειδέος. ἐσσεῖται δέ τις κυλίνδρου τόμος, βάσιας μὲν ἔχων τὰς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομάς, τὰν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν β δ. τοῦ μὲν τόμου δίχα τεμνομένου ἐπιπέδοις παραλλήλοις τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰν α γ, ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον ἔλασσον τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. Ἔστω τόμος βάσιν μὲν ἔχων τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν ε δ, ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. διῃρήσθω δὴ ἁ α β εἰς τὰς ἴσας τᾷ δ ε. καὶ ἀπὸ τᾶν διαιρέσεων ἄχθων εὐθεῖαι παρὰ τὰν α γ, ἔστε ποτὶ τὰν τοῦ κώνου τομάν. ἀπὸ δὲ τᾶν ἀχθεισᾶν ἐπίπεδα ἀνεστακότων παράλληλα τῷ κατὰ τὰν α γ ἐπιπέδῳ, τέμνοντι δὴ ταῦτα τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ τμάματος, καὶ ἐσσοῦνται ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ ὅμοιαι τᾷ περὶ τὰν α γ διάμετρον. ἐπεὶ παράλληλα ἐντὶ τὰ ἐπίπεδα. ἐφ' ἑκάστης δὴ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἀναγεγράφθωντι κυλίνδρου τομοὶ δύο, ὁ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸ δ, ὁ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ β, ἄξονα ἔχοντες ἴσον τῷ δ ε. ἐσσοῦνται δὴ τινὰ σχήματα στερεὰ τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμήματι, τὸ δὲ περιγεγραμμένον ἐκ κυλίνδρου τομῶν ἴσον ὕψος ἐχόντων συγκείμενα. λοιπὸν δέ ἐστιν δεῖξαι, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ἔλασσον ὑπερέχει τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. δειχθήσεται δὲ ὁμοίως τῷ προτέρῳ, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ὑπερέχει τῷ τόμῳ, τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομάν, τὰν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν ε δ. οὗτος δέ ἐστιν ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος.



κγ Τούτων προγεγραμμένων ἀποδεικνύωμες τὰ προβεβλημένα τῶν σχημάτων. πᾶν τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος ἀποτετμημένον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα. ἔστω γὰρ τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ἀποτετμημένον ὀρθῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸν ἄξονα, καὶ τμηθέντος αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος, τᾶς μὲν ἐπιφανείας τομὰ ἔστω ἁ α β γ ὀρθογωνίου κώνου τομά. τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμᾶμα ἁ γ α εὐθεῖα. ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμάματος ἁ β δ. ἔστω δὲ καὶ κῶνος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. οὗ κορυφὰ τὸ β. δεικτέον ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ κώνου τούτου. ἐκκείσθω γὰρ κῶνος ὁ ψ, ἡμιόλιος ὢν τοῦ κώνου, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν β δ. ἔστω δὲ καὶ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν β δ. ἐσσεῖται οὖν ὁ ψ κῶνος ἥμισυς ὅλου τοῦ κυλίνδρου. ἐπείπερ ἡμιόλιός ἐστιν ὁ ψ κῶνος τοῦ αὐτοῦ κώνου. λέγω, ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος ἴσον ἐστὶ τῷ ψ κώνῳ. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζον ἐντὶ ἢ ἔλασσον. ἔστω δὴ πρότερον εἰ δυνατόν, μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ σχῆμα στερεὸν εἰς τὸ τμᾶμα, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων, ὕψος ἴσον ἐχόντων τῶν συγκειμένων, ὥστε τὸ περιγραφὸν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι τηλίκῳ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ

μα τοῦ τοῦ κώνου. καὶ ἔστω τῶν κυλίνδρων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγραφὲν σχῆμα, μέγιστος μὲν, ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν α γ, ἄξονα δὲ τὰν ε δ. ἐλάχιστος δὲ, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ς τ, ἄξονα δὲ τὰν β θ. τῶν δὲ κυλίνδρων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγραφὲν σχῆμα, μέγιστος μὲν ἔστω, ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, τὸν περὶ διάμετρον τὰν κ λ, ἄξονα δὲ τὰν δ ε. ἐλάχιστος δὲ ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ς τ, ἄξονα δὲ τὰν θ ι. ἐκβεβλήσθω δὲ τὰ ἐπίπεδα πάντων τῶν κυλίνδρων ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν β δ. ἐσσεῖται δὴ ὅλος κύλινδρος διῃρημένος εἰς κυλίνδρους, τῷ μὲν πλήθει ἴσους τοῖς κυλίνδροις τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τῷ δὲ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν. καὶ ἐπεὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τὸ τμᾶμα, ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ τοῦ κώνου, δῆλον ὅτι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ τμάματι μεῖζόν ἐστι τοῦ τοῦ κώνου. ὁ δὴ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἔχων ἄξονα τὰν δ ε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δ ε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἁ δ α ποτὶ τὰν κ ε δυνάμει. οὗτος δέ ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει ἁ β δ ποτὶ τὰν β ε, καὶ τῷ ὃν ἔχει ἁ δ α ποτὶ τὰν ε ξ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ὁ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὸν ε ζ, ποτὶ τὸν δεύτερον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἁ π ε, τουτέστιν ἁ δ α ποτὶ τὰν ζ ε. καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων τὸν αὐτὸν, ἕξει πρὸς τὸν λόγον ὃν ἁ ἡμίσεια τᾶς διαμέτρου τᾶς βάσεως αὐτῶν ποτὶ τὰν ἀπολελαμμέναν ἀπ' αὐτᾶς μεταξὺ τῶν α β, β δ εὐθειᾶν. καὶ πάντες οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ κυλίνδρῳ, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξων δέ ἐστιν ἁ δ γ εὐθεῖα ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον, ὃν πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἱ ἐν τῇ βάσει εἰσὶ τῶν εἰρημένων κυλίνδρων, ποτὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἀπολελαμμένας ἀπὸ τᾶς μεταξὺ τᾶν α β, β δ. αἱ δὲ εἰρημέναι εὐθεῖαι τῶν εἰρημένων χωρὶς τᾶν α δ μείζων ἐντὶ ἢ διπλάσιαι. ὥστε καὶ οἱ κύλινδροι πάντες οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, οὗ ὁ ἄξων ὁ δ ι μείζονές ἐντι ἢ διπλάσιοι τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. πολλῷ ἄρα καὶ ὁ ὅλος κύλινδρος, οὗ ὁ ἄξων ἁ δ β, μείζων ἐντὶ ἢ διπλασίων τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. τοῦ δὲ τοῦ κώνου ἦν διπλασίων. ἔλασσον ἄρα τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τοῦ κώνου, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ μεῖζον. οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ κωνοειδὲς τοῦ τοῦ κώνου. ὁμοίως δὲ οὐδὲ ἔλασσον. πάλιν γὰρ ἐγγεγράφθω τὸ σχῆμα, καὶ περιγεγράφθω, ὥστε ὑπερέχειν ἕκαστον ἔλασσον. ἢ πάλιν ὧν ὑπερέχει ὁ τοῦ κῶνος τοῦ κωνοειδέος. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος, καὶ τὸ ἐγγραφὲν τοῦ περιγραφέντος ἐλάσσονι λείπεται, ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ τοῦ κώνου, δῆλον ὡς ἔλασσόν ἐστι τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ τοῦ κώνου. πάλιν δὲ ὁ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δ ε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ε δ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς α δ τετράγωνον ποτὶ τὸ αὐτό. ὁ δὲ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ε ζ, ποτὶ τὸν δεύτερον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ε ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ δ α ποτὶ τὰν κ ε δυνάμει. οὗτος δέ ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει ἁ β δ ποτὶ τὰν β ε, καὶ τὸ ὃν ἔχει ὁ δ α ποτὶ τὰν ε ξ, καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος

τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ δ ε, ποτὶ ἕκαστον τῶν κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, ἄξονα ἐχόντων τὸν αὐτὸν, ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ ἡμίσεια τᾶς βάσεως αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἀπολελαμμέναν ἀπ' αὐτᾶς μεταξὺ τᾶν α β, β δ εὐθειᾶν. καὶ πάντες γοῦν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὧν ἄξων ἐστὶν ἁ β δ εὐθεῖα, ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον ὃν πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι ποτὶ πάσας τὰς εὐθείας. αἱ δὲ εὐθεῖαι πᾶσαι αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων οἱ βάσιες ἐντὶ τῶν κυλίνδρων πρὸς τὰν εὐθεῖαν πᾶσαν τὰν ἀπολελαμμέναν ἀπ' αὐτᾶν σὺν τᾷ α δ ἐλάσσονες ἐντὶ, ἢ διπλάσιαι. δῆλον οὖν ὅτι καὶ οἱ κύλινδροι πάντες οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ἐλάσσονές ἐντι ἢ διπλάσιοι τῶν κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν β δ, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασίων τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δὲ, ἀλλὰ μείζων ἢ διπλάσιος. τοῦ γὰρ ψ κώνου διπλάσιον ἐστὶ. τὸ δὲ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλαττον ἐδείχθη τοῦ ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ ἔλασσον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ ψ κώνου. ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὔτε μεῖζον, ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

κδ Καὶ τοίνυν εἴκα μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα ἐπιπέδῳ ἀποτμαθῇ τὸ τμᾶμα ἀπὸ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὁμοίως ἡμιόλιον ἔσται τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἔστω τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος ἀποτετμημένον ὡς εἴρηται. καὶ τμηθέντος αὐτοῦ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμηκὸς τὸ σχῆμα, τοῦ μὲν σχήματος ἔστω ἁ α β γ ὀρθογωνίου τομὰ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμηκότος τὸ τμᾶμα ἁ α γ εὐθεῖα. παρὰ δὲ τὰν α γ ἁ φ υ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὸ β, καὶ ἁ β δ ἄχθω παρὰ τὸν ἄξονα. τέμνει δὴ αὐτὰ δίχα τὰν α γ. ἀπὸ δὲ τᾶς φ υ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω παρ' ἄλληλον κατὰ τῷ τὰν α δ. ἐπιψαύει δὲ τοῦτο τὸ κωνοειδὲς κατὰ τὸ β. καὶ ἐσσεῖται τοῦ τμήματος κορυφὰ τὸ β σαμεῖον, ἄξων δὲ ἁ β δ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν α γ, οὐ ποτ' ὀρθὰς ἐὸν τῷ ἄξονι τετμήκει τὸ κωνοειδὲς, ἁ τομὰ ἐστὶν ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἁ α γ, ἐούσας δὴ ὀξυγωνίου τομᾶς περὶ διάμετρον τὰν γ α, καὶ γραμμᾶς τᾶς β δ, ἃ ἐστὶν ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἀνεστηκούσας ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ἀνεστακότι ἀπὸ διαμέτρου ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐστὶν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, δυνατόν ἐστι κύλινδρον εὑρεῖν τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ' εὐθείας τᾷ β δ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. δυνατὸν δὲ ἐστὶ καὶ κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ β σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἐσσεῖται. τόμος κυλίνδρου τὶς, βάσιν ἔχων τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν, τὰν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν β δ. καὶ ἀπότμημα κώνου βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τε τόμῳ καὶ τῷ τμήματι, ἄξονα δὲ τὸν αὐτόν. δεικτέον ὅτι τὸ κωνοειδὲς τμῆμα, ἡμιόλιον ἐστὶ τούτου τοῦ κώνου. ἔστω δὴ ὁ ψ κῶνος ἡμιόλιος τοῦ ἀποτμήματος τούτου. ἐσσεῖται δὴ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου, ὁ βάσιν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, διπλάσιος τοῦ ψ κώνου. οὗτος γὰρ ἡμιόλιος ἐστὶ τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. τὸ δὲ ἀπότμημα τοῦ κώνου, τὸ εἰρημένον τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τόμου τοῦ κυλίνδρου, τοῦ βάσιν μὲν

ἔχον

τος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἀναγκαῖον δέ ἐστι τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα ἴσον ἦμεν τῷ τοῦ κώνω. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζον ἐστὶν ἢ ἔλασσον. ἔστω δὴ πρότερον εἰ δυνατὸν μεῖζον. ἐγγεγράφθω δή τι εἰς τὸ τμᾶμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων τμαμάτων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενα. ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἀλίκῳ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ κώνου. καὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν τομῶν ἐσσεῖται ποτὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τόμου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. πάλιν δὴ ὁ πρῶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δε, ποτὶ τὸν πρῶτον τόμον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς αδ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κε. οἱ γὰρ τόμοι οἱ ἴσον ὕψος ἔχοντες τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ᾽ ἀλλάλους ταῖς βάσεσιν. αἱ δὲ βάσιες αὐτῶν ἐπεὶ ὁμοῖαι ἐντὶ ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ὃν αἱ ὁμόλογοι διάμετροι αὐτᾶν δυνάμει. ἡμίσεαι δ᾽ ἐντὶ τῶν ὁμολόγων διαμέτρων, αἱ αδ, κε. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ αδ ποτὶ τὰν κε δυνάμει, τοῦτον ἔχει ἁ βδ ποτὶ τὰν βε δυνάμει. ἐπεὶ ἁ μὲν βδ παρὰ τὰν διάμετρον ἐστιν. αἱ δὲ αδ, κε παρὰ τὰν κατὰ τὰν β ἐπιψαύουσαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ βδ ποτὶ τὰν βε, τοῦτον ἔχει ἁ αδ ποτὶ τὰν εξ. ἕξει οὖν ὁ πρῶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ποτὶ τὸν πρῶτον τόμον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ αδ ποτὶ τὰν εξ, καὶ τῶν ἄλλων τομῶν ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ἄξονα ἴσον ἔχοντα τᾷ δε, πρὸς ἕκαστον τῶν τομῶν τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἄξονα ἐχόντων, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ἡμίσεια τᾶς διαμέτρου τῶν βάσιων αὐτῶν ποτὶ τὰν ἀπολελαμμέναν ἀπ᾽ αὐτᾶς μεταξὺ τῶν αβ, βδ. δειχθήσεται οὖν ὁμοίως τοῖς πρότερον τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐὸν τοῦ κώνου, ὁ δὲ τοῦ κυλίνδρου τόμος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, μείζων ἐὼν ἢ διπλασίων τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. ὥστε καὶ τοῦ κώνου μείζων ἐσσεῖται ἢ διπλασίων. οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ διπλασίων. οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ κώνου. διὰ τῶν αὐτῶν δὲ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἔλασσον ἐστί. δῆλον οὖν ὅτι ἴσον. ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

Εἴκα ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα ἀποτμηθέωντι ἐπιπέδοις, τὸ μὲν ἑτέρῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ δὲ ἑτέρῳ μὴ ὀρθῷ. ἐῶντι δὲ οἱ τῶν τμαμάτων ἄξονες ἴσοι, ἴσα ἐσσοῦνται τὰ τμάματα. ἀποτετμήσθω γὰρ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα, ὡς εἴρηται. τμαθέντος δὲ τοῦ κωνοειδέος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τοῦ μὲν κωνοειδέος ἔστω τομὰ ἁ βγ ὀρθογωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ βδ. τῶν δὲ ἐπιπέδων αἱ αζ, εγ εὐθεῖαι, τοῦ μὲν ὀρθοῦ ποτὶ τὸν ἄξονα ἁ εγ. τοῦ δὲ μὴ ὀρθοῦ ἁ ζα. ἄξονες δὲ ἔστω τῶν τμαμάτων αἱ βθ, κλ ἴσαι ἀλλήλαις, κορυφαὶ δὲ τὰ β λ. δεικτέον ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ τμᾶμα κωνοειδέος, οὗ κορυφὰ τὸ β, τῷ τμάματι τοῦ κωνοειδέος οὗ κορυφὰ τὸ λ. ἐπεὶ γὰρ ἀπὸ τᾶς αὐτᾶς ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, δύο τμάματα ἐντὶ ἀφῃρημένα, τό τε αλζ, καὶ τὸ εβγ. καὶ ἐντὶ αὐτῶν διάμετροι ἴσαι αἱ κλ θβ, ἴσον ἐστὶ τὸ τρίγωνον τὸ αλκ τῷ εθβ. δέδεικται γὰρ ὅτι τὸ αλζ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ εβγ τριγώνῳ. ἄχθω δὴ ἁ αχ κάθετος ἐπὶ τὰν κλ ἐκβληθεῖσαν. καὶ ἐπεὶ ἴσαι αἱ βθ, κλ, ἴσαι καὶ αἱ εθ, αχ. ἔστω δὴ ἐν τῷ τμάματι οὗ κορυφὰ τὸ β κῶ-

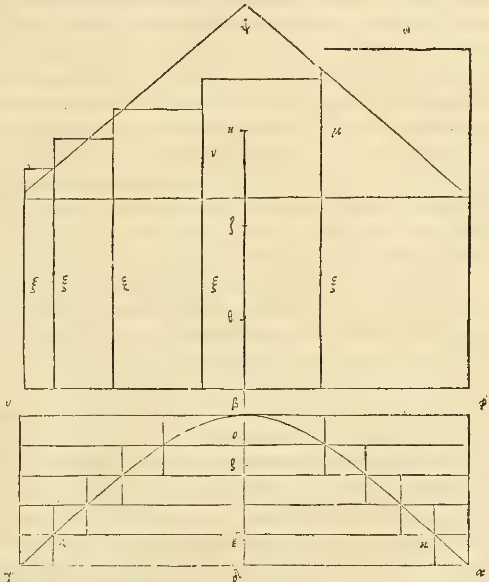
νος ἐγγεγραμμένος ταὺ αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. γίνεται δὲ τῷ τμήματι οὗ κορυφὰ τὸ λ, ἀπότμημα κώνου τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἄχθω δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ λ κάθετος ἐπὶ τὰν δ ζ ἁ λ μ, ἐσσεῖται διὰ ταῦτα ὕψος τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου οὗ κορυφὰ τὸ λ. τὸ δὲ ἀπότμαμα τοῦ κώνου, οὗ κορυφὰ τὸ λ, καὶ ὁ κῶνος οὗ κορυφὰ τὸ β τὸν συγκείμενον λόγον ἔχοντι ποτ᾽ ἄλλαλα ἔκ τε τοῦ τῶν βάσεων λόγου, καὶ ἐκ τοῦ τῶν ὑψέων. τὸν συγκείμενον οὖν ἔχοντι λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ περιεχόμενον χωρίον, ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, τᾶς περὶ διάμετρον τὰν α ζ ποτὶ τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ε γ. καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἁ λ μ ποτὶ ταὺ β θ. τὸ δὲ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ τὸν αὐτὸν κύκλον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταῦν διαμέτρων ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ε γ. ἔχει καὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου οὗ κορυφὰ τὸ λ, πρὸς τὸν κῶνον οὗ κορυφὰ τὸ β τὸν συγκείμενον λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἁ κ α ποτὶ ταὺ ε θ. καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ λ μ, ποτὶ τὰν β θ. ἁ μὲν γὰρ κ α ἡμίσεα ἐντὶ ταῦν διαμέτρων τᾶς βάσιας τᾶς τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου, οὗ κορυφὰ τὸ λ. ἁ δὲ ε θ ἡμίσεα τᾶς διαμέτρου τᾶς βάσεως τοῦ κώνου. αἱ δὲ λ μ, β θ ὕψεα ἐντὶ αὐτῶν. ἔχει δὲ ἁ λ μ ποτὶ ταὺ β θ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ ποτὶ τὰν κ λ. ἐπεὶ ἁ β θ ἴσα ἐστὶ τᾶ κ λ. ἔχει δὲ καὶ ἁ λ μ ποτὶ ταὺ κ λ, ὃν ἁ χ α ποτὶ ταὺ α κ ἔχοι, καὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου ποτὶ τὸν κῶνον τὸν συγκείμενον λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἁ α κ ποτὶ τὰν α χ. ἴσα γάρ ἐστιν ἁ α χ τᾶ ε θ. καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἁ λ μ ποτὶ ταὺ β θ. ὁ δὲ ἐκ τῶν εἰρημένων λόγος ὁ τοῦ α κ πρὸς α χ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τᾶς λ κ πρὸς λ μ. τὸ ἄρα ἀπότμαμα πρὸς τὸν κῶνον λόγον ἔχει, ὃν ἁ λ κ ποτὶ ταῦ λ μ. καὶ τῷ ὃν ἔχει ἁ λ μ ποτὶ ταὺ β θ. ἴση δὲ ἁ β θ τᾶ κ λ. δῆλον οὖν, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου οὗ κορυφὰ τὸ λ, τῷ κώνῳ οὗ κορυφὰ τὸ β. φανερὸν οὖν ὅτι καὶ τὰ τμάματα ἴσα ἐντὶ ἑτέρον αὐτῶν. ἐπεὶ τὸ μὲν ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ κώνου, τὸ δὲ ἕτερον ἡμιόλιον τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου ἴσων ἐόντων.

κϛ Εἶκα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα ἀποτμηθέοντι ἐπιπέδοις ὁπωσοῦν ἀγμένου, τὰ τμάματα ποτ᾽ ἄλληλα τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ τῶν ἀξόνων αὐτοῖς. ἀποτετμήσθω γὰρ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα, ὡς ἔτυχεν. ἔστω δὲ τῷ μὲν τοῦ ἑτέρου τμάματος ἄξονι ἴσα ἁ κ, τῷ δὲ τοῦ ἑτέρου ἴσα ἁ λ. δεικτέον ὅτι τὰ τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ᾽ ἄλλαλα τοῖς ἀπὸ ταῦν κ, λ τετραγώνοις. τμηθέντος δὴ τοῦ κωνοειδέος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ τμήματος, ἔστω τομὰ ἁ α β γ ὀρθογωνίου κώνου τομά, ἄξων δὲ ἁ β δ. καὶ ἀπολελάφθω ἁ β δ τᾶ κ ἴσα. καὶ διὰ τοῦ δ ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα. τὸ δὲ τμῆμα τοῦ κωνοειδέος, τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον ταὺ α γ, ἄξονα δὲ ταὺ β δ, ἴσον ἐντὶ τῷ τμάματι τῷ ἄξονα ἔχοντι ἴσον τᾶ κ. εἰ μὲν οὖν καὶ ἁ κ ἴσα ἐστὶ τᾶ λ, φανερὸν ὅτι καὶ τὰ τμάματα ἴσα ἐσοῦντι ἀλλάλοις. ἑκάτερον γὰρ αὐτῶν καὶ τῷ αὐτῷ καὶ τὰ τετράγωνα, τὰ ἀπὸ τῶν κ, λ ἴσα, ὥστε τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον τὰ τμάματα τοῖς τετραγώνοις, τοῖς ἀπὸ τῶν ἀξόνων. εἰ δὲ μὴ ἴσα ἐστὶν ἁ λ τᾶ κ, ἔστω ἁ λ ἴσα τᾶ β θ. καὶ διὰ τοῦ θ ἐπίπεδον ἄχθω ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα. τὸ δὲ τμῆμα τὸ βάσιν ἔχον τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ε ζ, ἄξονα δὲ ταὺ β θ, ἴσον ἐστὶ τῷ τμήματι τῷ ἔχοντι ἄξονα ἴσον τῷ λ. ἐγγεγράφθωσαν δύο κῶνοι βάσιν μὲν ἔχοντες τοὺς κύκλους τοὺς περὶ διαμέτρους τὰς α γ, ε ζ, κορυφὰν δὲ τὸ β σαμεῖον. ὁ δὲ κῶνος ὁ ἔχων ἄξονα τὰν β δ, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα ἄξονα ταὺ β θ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἁ α δ ποτὶ τὰν θ ε δυνάμει. καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἁ β δ ποτὶ τὰν β θ μήκει. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ δ α ποτὶ τὰν θ ε δυνάμει, τοῦτον ἔχει ἁ β δ ποτὶ τὰν β θ μάκει. ὁ ἄρα κῶνος ὁ ἔχων ἄξονα τὰν β δ ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν β θ, τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἁ δ β ποτὶ τὰν θ β, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἁ δ β ποτὶ τὰν β θ. οὗτος δὲ ἐστὶν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς δ β, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ β. ὃν δὲ λόγον ἔχει ὁ κῶνος ἄξονα ἔχων τὰν β δ, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἄξονα ἔχοντα τὰν θ β, τοῦτον ἔχει

τὸν

τὸν λόγον τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον τὰν δβ, ποτὶ τὸ τμῆμα τὸ ἄξονα ἔχον τὰν θβ. ἑκάτερον γὰρ ἡμιόλιόν ἐστι. καὶ ἔστι τῷ μὲν τμήματι τῷ ἄξονα ἔχοντι τὰν βδ, ἴσον τμῆμα τοῦ κωνοειδέος, τὸ ἄξονα ἔχον ἴσον τᾷ κ. τῷ δὲ τμήματι τῷ ἄξονα ἔχοντι τὰν θβ, ἴσον τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον ἴσαν τᾷ λ. καὶ τᾷ μὲν βδ ἴσα ἁ κ, τᾷ δὲ θβ ἴσα ἁ λ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον ἴσον τᾷ κ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ποτὶ τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδέος, τὸ ἄξωνα ἔχον ἴσον τᾷ λ, ὃν τὸ τετράγωνον ε, τὸ ἀπὸ τᾶς κ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς λ.

Πᾶν τμῆμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἀποτετμημένον ἐπιπέδῳ καὶ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα ποτὶ τὸν κῶνον, τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ὕψος ἴσον, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα ἴσα τῷ τε ἄξονι τοῦ τμήματος, καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι, ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις, τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος, καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι. κζ
ἔστω τι τμῆμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος, ἀποτετμημένον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα. καὶ τμηθέντος αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος, ἁ τομὰ ἔστω αὐτοῦ μὲν τοῦ κωνοειδέος ἁ αβγ ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμῆμα εὐθεῖα ἁ αγ. ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμήματος ἁ βδ. ἁ δὲ ποτεοῦσα τῷ ἄξονι ἔστω ἁ βθ. καὶ τᾷ βθ ἴσα ἁ ζθ, καὶ ἁ ζη. δεικτέον ὅτι τὸ τμῆμα ποτὶ τὸν κῶνον τὰν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, λόγον ἔχει ὃν ἁ ηδ ποτὶ τὰν ζδ. ἔστω δὴ κύλινδρος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. πλευραὶ δὲ αὐτοῦ ἔστωσαν αἱ φα, γυ. ἔστω δὴ καὶ κῶνος τις ἐν ᾧ τὸ ψ. καὶ ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὰν βδ, τοῦτον ἐχέτω τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ ηδ ποτὶ τὰν δζ. φημὶ δὴ τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδέος ἴσον εἶμεν τῷ ψ κώνῳ. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζον ἢ ἔλασσον ἐστίν. ἔστω πρότερον εἰ δυνατὸν, μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τμῆμα σχῆμα στερεὸν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον. ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τοῦ ψ κώνου. διήχθω δὴ τὰ ἐπίπεδα πάντων τῶν κυλίνδρων ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν αγ. ἄξονα δὲ τὰν βδ. ἐσσεῖται δὴ ὅλος ὁ κύλινδρος διῃρημένος εἰς κυλίνδρους, τῷ μὲν πλήθει ἴσους τοῖς κυλίνδροις τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τῷ δὲ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν. καὶ ἐπεὶ ἐλάσσονι ὑπερέχει τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ

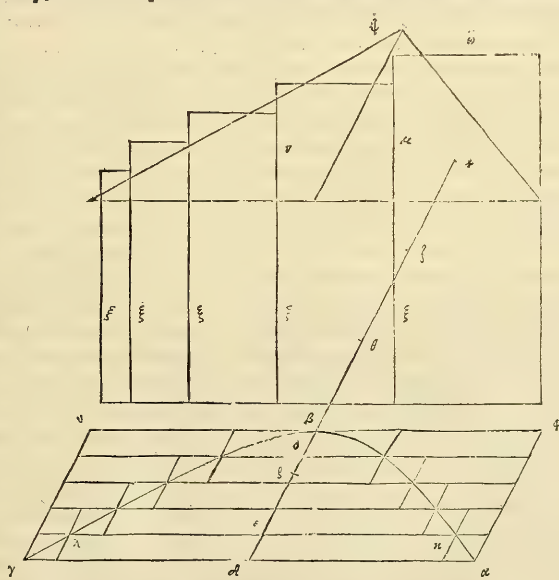


ψ κώνου, καὶ μεῖζόν ἐστι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμήματος, δῆλον ὅτι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐστὶ τοῦ ψ κώνου. ἔστω δὴ τρίτον μέρος τᾶς βδ, ἁ βρ. ἐσσεῖται οὖν ἁ ηδ τριπλασία τᾶς θρ. καὶ ἐπεὶ ὁ μὲν κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὰν βδ, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ηδ ποτὶ τὰν θρ. ἔχει δὲ καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος ποτὶ τὸν ψ κῶνον ὃν ἁ ζδ ποτὶ τὰν ηδ ἐξ[illegible] . ἀμετρίαν, ὁμοίως τῶν λόγων τεταραγμένων τὸν αὐτὸν λόγον ὁ κύλινδρος ὁ εἰρημένος ποτὶ τὸν ψ κῶνον, ὃν ἁ ζδ ποτὶ

ποτὶ τὰν θρ. ἔστω δὲ αἱ γραμμαὶ κείμεναι ἐφ' αὐτὰ ξ, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι τοῖς τμαμάτεσσι τοῖς ἐν τᾷ βδ εὐθείᾳ, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ ζβ. καὶ παρ' ἑκάσταν αὐτῶν παραπεπτωκέτω χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ. καὶ τὸ μὲν μέγιστον ἔστω ἴσον τῷ ὑπὸ ζδβ. τὸ δὲ ἐλάχιστον ἴσον τῷ ὑπὸ ζοβ. αἱ δὲ πλευραὶ τῶν ὑπερβλημάτων τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχόντων. καὶ γὰρ αἱ ἴσαι αὐταῖς αἱ ἐπὶ τᾶς βδ εὐθείας, τῷ ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχουσιν. καὶ ἔστω ἁ μὲν τοῦ μεγίστου ὑπερβλήματος πλευρά, ἐφ' ἇς τὸ μ, ἴσα τᾷ βδ. ἁ δὲ τοῦ ἐλαχίστου ἴσα τᾷ βο. ἔστω δὲ καὶ ἄλλα χωρία ἐν οἷς τὸ ω, τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, τῷ ὑπὸ τᾶν ζδβ. ὁ δὴ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὰν δε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν κλ, ἄξονα δὲ τὰν δε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἁ δα ποτὶ τὰν κε δυνάμει. οὗτος δέ ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζδβ, ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζε, βε. ἐν πάσᾳ γὰρ τᾷ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾷ τοῦτο συμβαίνει. ἁ γὰρ διπλασία τᾶς ποτεούσας, τουτέστι τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου, πλαγία ἐστὶ τοῦ εἴδους πλευρά. καὶ ἔστι τῷ μὲν ὑπὸ τᾶν ζδ, βδ περιεχομένῳ ἴσον τὸ ξμ χωρίον, τῷ δὲ ὑπὸ τᾶν ζε, βε ἴσον ἐστὶ τὸ ξν. ἁ γὰρ ξ ἴσα ἐστὶ τᾷ ζβ, ἁ δὲ ν τᾷ βε, ἁ δὲ μ τᾷ βδ. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὰν δε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν βάσιν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν κλ, ἄξονα δὲ τὰν δε, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ξμ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἔχων τὰν ἴσαν τᾷ δε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα τὸν αὐτὸν ἄξονα ὥσπερ ἔχων τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ω χωρὶς ποτὶ τὸ ὃν λόγον τὰν περὶ τὰν νξ παραπεπτωκότων ὑπερβαλλον τῷ τετραγώνῳ. ἐστὶ δή τινα μεγέθεα οἱ κύλινδροι, οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὧν ἕκαστος ἄξονα ἔχει ἴσον τᾷ δε, καὶ ἄλλα μεγέθεα τὰ χωρία ἐν οἷς τὸ ω, ἴσα τούτοις τῷ πλήθει, κατὰ δύο μεγέθεα τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον. ἐπεὶ οἵ τε κύλινδροι ἴσοι ἐντὶ ἀλλάλοις, καὶ τὰ ω χωρία ἴσα ἀλλάλοις. λέγονται δὲ τῶν δὲ κυλίνδρων τινὲς ποτὶ ἄλλους κυλίνδρους ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. ὁ δ' ἔσχατος οὐδὲ ποθ' ἓν λέγεται. καὶ τῶν χωρίων ἐν οἷς τὰ ω ποτ' ἄλλα χωρία τὰ παρὰ τὰν ξ παραπεπτωκότα ὑπερβάλλοντα εἴδει τετραγώνῳ, τὰ δὲ ὁμόλογα ἐν τοῖς λόγοις. τὸ δὲ ἔσχατον οὐδὲ ποθ' ἓν λέγεται. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ πάντες οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα χωρὶς τοῦ μεγίστου. δεικτέον δέ, ὅτι πάντα τὰ ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζω λόγον ἔχοντι, ἢ ὃν ἁ νξ ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις, τά τε ἡμίσεα τᾶς ξ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ν. ὥστε καὶ ὅλος ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μείζονα ἔχει λόγον, ἢ ὃν ἁ ζδ ποτὶ τὰν θρ, ὃν ὅλος κύλινδρος ἔχων ἐδείχθη ποτὶ τὸν ψ κῶνον. μείζονα οὖν ἔχει λόγον ὁ ὅλος κύλινδρος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν ψ κῶνον. ὥστε μείζων ἐστὶν ὁ ψ κῶνος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον τοῦ ψ κώνου, οὐκ ἄρα μεῖζον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τοῦ ψ κώνου. οὐδὲ τοίνυν ἔλασσον. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν ἔλασσον. πάλιν οὖν ἐγγεγράφθω εἰς τὸ τμῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ᾧ λίκῳ ὑπερέχει ὁ κῶνος τοῦ τμάματος, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἔλασσον ἐστὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος, καὶ ἐλάσσονι ὑπερέχει τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἢ ὁ ψ κῶνος τοῦ τμήματος, δῆλον ὅτι καὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ψ κώνου. πάλιν δὴ ὅτι κύλινδρος ὁ πρῶτος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ξν. ἴσον γὰρ ἑκάτερον. καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ δε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι κατ' αὐτὸν ἐόντα, καὶ ἄξονα ἔχοντα τὸν αὐτόν, ὥσπερ ἕξει τὸν λόγον ὃν τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ὁμόλογον τῶν παρὰ τὰν ξ παραβλημάτων σὺν τῷ ὑπερβλήματι, διὰ τὸ ἕκαστον τῶν περιγεγραμμένων χωρὶς τοῦ μεγίστου, ἴσον εἶναι ἑκάστῳ τῶν ἐγγεγραμμένων σὺν τῷ μεγίστῳ. ἕξει οὖν καὶ ὁ ὅλος κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν πάντα τὰ ω χωρία ποτὶ τὰ παραβλήματα σὺν τοῖς ὑπερβλήμασι. δέδεικται δὲ πάλιν πάντα τὰ ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ ἕτερα ἐλάσσω λόγον ἔχοντα τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις, τᾶς τε ἡμίσεα τᾶς ξ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ν. ὥστε καὶ ὅλος ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσονα λόγον ἕξει, ἢ ἁ ζδ ποτὶ τὰν θρ. ἀλλ' ὡς ἁ ζδ ποτὶ τὰν θρ, ὁ ὅλος κύλινδρος ποτὶ τὸν ψ κῶνον.

κώνου. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ὁ αὐτὸς κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸ Ψ. ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ περιγεγραμμένον τοῦ Ψ κώνου, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ ἔλασσον ἐὸν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ Ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τοῦ Ψ κώνου. ἐπεὶ δὲ οὔτε μεῖζόν οὔτε ἔλασσόν ἐστι, δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

Καὶ τοίνυν εἴκα μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ ἀποτμαθῇ τὸ τμῆμα τοῦ ἀμβλυγωνίου κη κωνοειδέος, ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα, τῷ τε ἄξονι τοῦ τμήματος, καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι, ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τῷ τε ἄξονι καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι. ἔστω γὰρ τμῆμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἀποτετμημένον ἐπιπέδῳ ὡς εἴρηται, τμαθέντος δὲ ἐπιπέδῳ τοῦ σχήματος ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμηκὸς τὸ τμῆμα, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ βγ ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμηκότος τὸ τμᾶμα, ἁ γα εὐθεῖα. κορυφὰ δὲ ἔστω τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδὲς, τὸ θ σαμεῖον. καὶ ἄχθω διὰ τοῦ β παρὰ τὰν αγ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἁ φυ. ἐπιψαυέτω δὲ κατὰ τὸ β. καὶ ἀπὸ τοῦ θ ἐπὶ τὸ β ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω, τέμνει δὴ δίχα τὰν αγ. καὶ ἐσεῖται κορυφὰ μὲν τοῦ τμάματος τὸ β σαμεῖον, ἄξων δὲ ἁ βδ. ἁ δὲ ποτεοῦσα τῷ ἄξονι ἁ βθ. τᾷ δὲ βθ ἴσα ἔστω ἅ τε θζ, καὶ ἁ ζη. ἀπὸ δὲ τᾶς φυ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω τι παράλληλον τῷ κατὰ τὰν αγ. ἐπιψαύσει δὴ τοῦ κωνοειδέος κατὰ τὸ β. καὶ ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν αγ οὐκ ἐὸν ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα τέτμηκε τὸ κωνοειδὲς, ἁ τομὰ ἐσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἁ γα. ἐοῦσας δὴ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς περὶ διάμετρον τὰν αγ, καὶ τᾶς βδ γραμμᾶς ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστακούσας ἐν ἐπιπέδῳ ὅ ἐστιν ἀπὸ τᾶς διαμέτρου, ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐστι κύλινδρον εὑρεῖν, τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ' εὐθείας τᾷ βδ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, περὶ διάμετρον τὰν αγ. εὑρεθέντος οὖν ἐσεῖται τις κυλίνδρου τόμος, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἁ δὲ ἑτέρα βάσις αὐτοῦ ἐσεῖται τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν φυ. πάλιν δὲ καὶ κῶνον εὑρεῖν δυνατόν ἐστι, κορυφὰν ἔχοντα τὸ β σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, περὶ διάμετρον τὰν αγ. εὑρεθέντος οὖν, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, δεικτέον ὅτι τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τὸ εἰρημένον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ηδ ποτὶ τὰν δζ. ὃν γοῦν ἔχει λόγον ποτὶ τὰν δζ, τοῦτον ἐχέτω ὁ Ψ κῶνος ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου. εἰ οὖν μὴ ἐστὶν ἴσον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τῷ κώνῳ τῷ Ψ. εἰ γὰρ μὴ δυνατὸν, ἔστω μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα σχῆμα στερεὸν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων τομέων ἴσον ὕψος ἐχόντων συγκείμενον. ὥστε τὸ περιγεγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τοῦ Ψ κώνου. ἐπεὶ οὖν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐὸν τοῦ τμήματος, ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ἢ τὸ τμῆμα τοῦ Ψ κώνου, δῆλον ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ Ψ



τοῦ ψ κώνου. διήχθω δὴ τὰ ἐπίπεδα τῶν τόμων τῶν ἐγγεγραμμένων ἐν τῷ σχήματι πάντων· ἐσσεῖται ποτὶ ἐπιφάνειαν τοῦ τόμου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. καὶ ἅ τε β ε τρίτον μέρος ἔστω τᾶς β δ. καὶ τ' ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευάσθω. πάλιν δὴ ὁ πρῶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δ ε, ποτὶ τὸν πρῶτον τόμον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δ ε, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς α δ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ ε. οἱ γὰρ τόμοι οἱ ἴσον ὕψος ἔχοντες, τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ' ἀλλήλους, ὅνπερ αἱ βάσεις αὐτῶν. ἐπεὶ ὅμοιαι ἐντὶ ὀξυγωνίων κώνων τομαί. τὸν αὐτὸν οὖν λόγον ἔχοντι ποτ' ἀλλάλους, ὃν αἱ ὁμόλογοι διάμετροι αὐταῖς δυνάμει. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς α δ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ ε, τοῦτον ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν ζ δ β περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε β. ἐπεὶ ἐστὶν ἁ μὲν ζ δ ἀγμένα διὰ τοῦ θ, καθ' ἃς ἔγγιστα συμπίπτοντι. αἱ δὲ α δ, κ ε παρὰ τὰν κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσαν. ἐστὶ δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τᾶν ζ δ β περιεχόμενον ἴσον τῷ ω χωρίῳ. τὸ δὲ ὑπὸ τᾶν ζ ε β τῷ ξ μ. ἔχει οὖν ὁ πρῶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δ ε ποτὶ τὸν πρῶτον τόμον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δ ε τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ξ μ. καὶ τῶν ἄλλων δὲ τόμων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ δ ε ποτὶ τὸν τόμον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι κατ' αὐτὸν ἐόντα, καὶ ἄξονα ἔχοντα ἴσαν τὰν δ ε, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ὃν τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ὁμόλογον τῶν παρὰ τὰν ξ παραπεπτωκότων ὑπερβαλλόντων εἴδει τετραγώνῳ. Πάλιν οὖν ἐντί τινα μεγέθεα οἱ ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ, καὶ ἄλλα μεγέθεα τὰ χωρία ἐν οἷς τὸ ω ἴσα τῷ πλήθει τοῖς τόμοις, καὶ κατὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι αὐτοῖς. λέγονται δὲ οἱ τόμοι, ποτ' ἄλλους τόμους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. ὁ δὲ ἔσχατος τόμος οὐδὲ ποθὲν λέγεται. τὰ δὲ ω χωρία ποτ' ἄλλα χωρία παρὰ τὰν ξ παραπεπτωκότα τὰ ὑπερβάλλοντα εἴδεσι τετραγώνοις, τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς λόγοις. τὸ δὲ ἔσχατον οὐδὲ ποθὲν λέγεται. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ πάντες οἱ τόμοι ποτὶ πάντας τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα, χωρὶς τοῦ μεγίστου. πάντα δὲ τὰ ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα, χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζονα λόγον ἔχοντι, ἢ ὃν ἁ γ ξ ν ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις, τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς ξ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ν. μείζονα οὖν λόγον ἔχει ὅλος ὁ τόμος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξ ν ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις, τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς ξ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ν. ὥς τε καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ζ δ ποτὶ τὰν θ ε. μείζονα οὖν ἔχει λόγον ὁ ὅλος τόμος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν ψ κῶνον, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ μεῖζον ἐὸν τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ψ κώνου. οὐκ ἔστιν οὖν μεῖζον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τοῦ ψ κώνου. εἰ δὲ ἔλασσον ἐστὶ τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τοῦ ψ κώνου, ἐγγραφέντος εἰς τὸ τμῆμα σχήματος στερεοῦ, καὶ ἄλλου περιγραφέντος ἐκ κυλίνδρων τομῶν ἴσον ὕψος ἐχόντων συγκειμένου, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ ψ κῶνος τοῦ τμήματος. πάλιν ὁμοίως δειχθήσεται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον ἐὸν τοῦ ψ κώνου. καὶ ὁ τοῦ κυλίνδρου τόμος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι ποτὶ τὸν ψ κῶνον. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἐστὶν οὖν οὐδὲ ἔλασσον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τοῦ ψ κώνου. δῆλον οὖν τὸ προτεθέν.

κθ Παντὸς σχήματος σφαιροειδέος, ἐπιπέδῳ τμηθέντος διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος διπλάσιον ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἔστω σφαιροειδὲς σχῆμα ἐπιπέδῳ τετμημένον διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα. τμηθέντος δὲ αὐτοῦ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ, τοῦ μὲν διὰ τοῦ ἄξονος, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ α β γ δ ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς, καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδέος ἁ β δ, κέντρον δὲ τὸ θ. διοίσει δὲ οὐδὲν εἴτε ἁ μείζων ἐστὶ διάμετρος ἁ β δ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, εἴτε ἐλάσσων. τοῦ δὲ τετμηκότος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα τομὰ ἔστω ἁ γ α εὐθεῖα. ἐσσεῖται δὴ αὐτὰ διὰ τοῦ θ. καὶ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ποτὶ τὰν β δ. ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον ὑπόκειται διὰ τοῦ κέντρου τετάχθαι, καὶ ὀρθὸν εἶμεν ποτὶ τὸν ἄξονα, δεικτέον ὅτι τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τμῆμα, τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, κορυφὰν δὲ τὸ β σαμεῖον, διπλάσιον ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἔστω γὰρ κῶνος τὶς ἐν ᾧ τὸ ψ διπλασίων τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν τὰν τοῦ τμήματι. καὶ ἄξονα τὸν αὐτὰν τὰν θ β. φημὶ δὲ τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος ἴσον εἶμεν τῷ ψ κώνῳ. εἰ οὖν μὴ ἐστὶν ἴσον τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τῷ ψ κώνῳ, ἔστω πρῶτον εἰ δυνατὸν μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τμῆμα τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω, ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον. ὥς τε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἁλίκῳ ὑπερ-

ὑπερέχει τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. ἐπεὶ οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἁμίσεως τοῦ σφαιροειδέος, ἔλασσον ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ἢ τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἐν τῷ τμάματι τοῦ ἁμίσεως τοῦ σφαιροειδέος μεῖζόν ἐστι τοῦ ψ κώνου. ἔστω δὴ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ

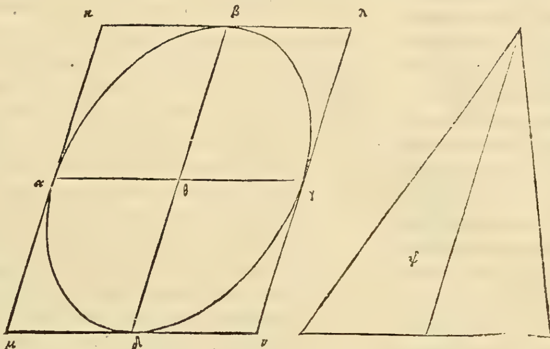
τὰν β θ. ἐπεὶ οὖν οὗτος ὁ κύλινδρος τριπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ὁ δὲ ψ κῶνος διπλάσιός ἐστι τοῦ αὐτοῦ κώνου, δῆλον ὡς ὁ κύλινδρος ἡμιόλιός ἐστι τοῦ ψ κώνου. ἐκβεβλήσθω δὴ τὰ ἐπίπεδα τῶν κυλίνδρων πάντων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα. ἐσσεῖται ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἐσσεῖται δὴ ὁ ὅλος κύλινδρος διαιρούμενος εἰς κυλίνδρους, τῷ μὲν πλήθει ἴσους τοῖς κυλίνδροις τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τῷ δὲ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν. ἔστω δὴ οὖν γραμμαὶ κείμεναι, ἐφ' αὐτᾶς ξ, τῷ πλήθει ἴσαι τοῖς τμήμασι τᾶς β θ εὐθείας, τῷ δὲ μεγέθει ἴσαι ἑκάστα τᾷ β θ, καὶ ἀπὸ ἑκάστας τετράγωνον ἀναγεγράφθω. ἀφαιρήσθω δὴ ἀπὸ μὲν τοῦ ἐσχάτου τετραγώνου γνώμων, πλάτος ἔχων ἴσαν τᾷ β ι. ἐσσεῖται δὲ οὗτος ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν β ι, ι δ. ἀπὸ δὲ τοῦ παρ' αὐτῷ τετραγώνου γνώμων ἀφαιρήσθω, πλάτος ἔχων διπλάσιον τᾶς β ι. ἐσσεῖται δὴ οὗτος ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν β χ, χ δ. καὶ ἀεὶ ἀπὸ τῶν ἑχομένων τετραγώνων γνώμων ἀφαιρήσθω πλάτος μὲν ἴσον τμήματι, μεῖζον τοῦ πλάτεος τοῦ πρώτου αὐτοῦ ἀφαιρημένου γνώμονος. ἐσσεῖται δὴ ἕκαστος αὐτῶν ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν τᾶς β δ τμημάτων, ὧν τὸ ἕτερον τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῷ πλάτει τοῦ γνώμονος. ἐσσεῖται δὴ καὶ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου τὸ λοιπὸν τετράγωνον, τὰν πλευρὰν ἔχον ἴσαν τᾷ θ ε. ὁ δὲ κύλινδρος ὁ πρῶτος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν θ ε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν πρῶτον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν θ ε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς α θ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς κ ε. ὥστε καὶ ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν β θ, θ δ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ περιεχόμενον. ἔχει οὖν ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ πρῶτον τετράγωνον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετραγώνου ἀφαιρημένον. ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος, ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ θ ε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν

τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, καὶ ἔχοντα ἄξονα τὸν αὐτὸν, ὅνπερ ἔχει τὸν λόγον ὃν τὸ τετράγωνον, ὁμοίως τεταγμένον αὐτῷ ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπὸ τοῦ ἑπομένου αὐτῷ τετραγώνου ἀφαιρημένον. ἐντὶ δή τινα μεγέθεα οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ κυλίνδρῳ, καὶ ἄλλα τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ξε ἴσα τῷ πλήθει τοῖς κυλίνδροις, καὶ κατὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα. λέγονται δὲ οἱ κύλινδροι ποτ᾽ ἄλλα μεγέθεα τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. ὁ δὲ ἔσχατος οὐδὲ ποθὲν λέγεται. καὶ τὰ τετράγωνα ποτ᾽ ἄλλα μεγέθεα τοὺς ἀπὸ τῶν τετραγώνων ἀφαιρουμένους ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις. τὸ δὲ ἔσχατον τετράγωνον οὐδὲ ποθὲν λέγεται. πάντες οὖν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ποτὶ πάντας τοὺς ἑτέρους κυλίνδρους, τὸν αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ τετράγωνα ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας τοὺς ἀφαιρουμένους ἀπ᾽ αὐτῶν. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν πάντα τὰ τετράγωνα ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας τοὺς ἀφαιρουμένους ἀπ᾽ αὐτῶν. τὰ δὲ τετράγωνα πάντων τῶν γνωμόνων τῶν ἀφαιρημένων ἀπ᾽ αὐτῶν μείζονα ἐντὶ ἢ ἡμιόλια. ἐντὶ γὰρ τινὲς γραμμαὶ κείμεναι αἱ ξρ, ξς, ξτ, ξυ, ξφ, τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, καὶ ἁ ἐλαχίστα ἴσα τᾷ ὑπεροχᾷ. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ, ἐφ᾽ ἂν τὰ δύο ξε, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ. τὰ νῦν τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν ἃ ἐστὶν ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ, πάντων μὲν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν ἴσων ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, ἐλάσσονα ἐντὶ ἢ τριπλάσια. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας, μεῖζον ἢ τριπλάσιον. τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς περὶ τᾶν ἑλίκων ἐκδεδομένοις δέδεικται. ἐπεὶ δὲ πάντα τὰ τετράγωνα ἐλάσσονα ἐντὶ, ἢ τριπλάσια τῶν ἑτέρων τετραγώνων, ἃ ἐντὶ ἀφαιρημένα ἀπ᾽ αὐτῶν, δῆλον ὅτι τῶν λοιπῶν μείζονα ἐντὶ ἢ ἡμιόλια. τῶν οὖν γνωμόνων μείζονα ἢ ἡμιόλια, ὥστε καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, μείζων ἐστὶν ἢ ἡμιόλιος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ὅπερ ἀδύνατον. τοῦ γὰρ ψ κώνου ἡμιόλιός ἐστι. τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐδείχθη τοῦ ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. οὐδὲ τοίνυν ἔλασσον. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν ἔλασσον. πάλιν δὴ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ἀμίσεον τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεὸν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγεγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ὑπερέχει ὁ ψ κῶνος τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἔλασσον ἐστὶ τὸ ἐγγραφὲν σχῆμα τοῦ τμήματος, δῆλον ὅτι καὶ τὸ περιγραφὲν σχῆμα ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ψ κώνου. πάλιν δὴ ὁ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν θε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν θε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ πρῶτον τετράγωνον ποτ᾽ αὐτό. ὁ δὲ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν επ, ποτὶ τὸν δεύτερον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν επ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ β τετράγωνον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀφαιρημένον, καὶ τῶν ἄλλων δὲ κυλίνδρων ἕκαστος, τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ θε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι κατ᾽ αὐτὸν ἐόντα, τὸν αὐτὸν ὅνπερ ἔχει λόγον, ὁμοίως τεταγμένῳ αὐτοῦ τετραγώνου ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀφαιρημένον. καὶ πάντες οὖν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ τετράγωνα ποτὶ τὸ ἴσον τῷ πρώτῳ τετραγώνῳ, καὶ τοῖς γνωμόνεσσι τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τετραγώνων ἀφαιρημένοις. καὶ τὰ τετράγωνα πάντα ἐλάσσονα ἐντὶ, ἢ ἡμιόλια τοῦ ἴσου τῷ τε πρώτῳ τετραγώνῳ, καὶ τοῖς γνωμόνεσσι τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν ἀφαιρημένοις, διότι τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὰν τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου μείζονα ἐντὶ ἢ τριπλάσια. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ἐλάσσων ἢ ἡμιόλιος ἐστὶ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος, ὅπερ ἀδύνατον. τοῦ γὰρ ψ κώνου ἡμιόλιος ἐστι. τὸ δὲ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλαττον ἐδείχθη τοῦ ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶν ἔλασσον τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. ἐπεὶ οὔτε μεῖζον ἐστὶν, οὔτε ἔλασσον, ἴσον ἄρα ἐστί.

λ Καὶ τοίνυν εἴκα τὸ σφαιροειδὲς μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου τμαθῇ, ὁμοίως τὸ ἀμίσεον τοῦ σφαιροειδέος, διπλάσιον ἐσεῖται τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. τετμάσθω γὰρ σχῆμα σφαιροειδὲς. τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ αβγδ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, κέντρον δὲ αὐτᾶς τὸ θ, τοῦ δὲ τετμηκότος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα ἔστω ἁ αγ εὐθεῖα. ἐσεῖται δὴ αὐτὰ διὰ τοῦ θ ἀγομένα, ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον ὑπέκειτο διὰ τοῦ κέντρου ἄχθαι. ἐσεῖται οὖν τις ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ

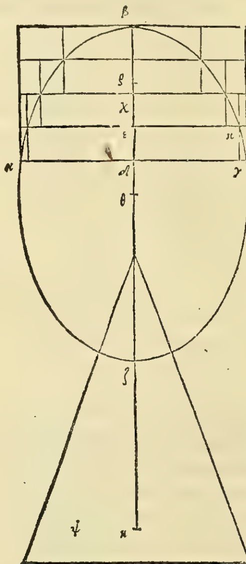
ἀποτέμνον

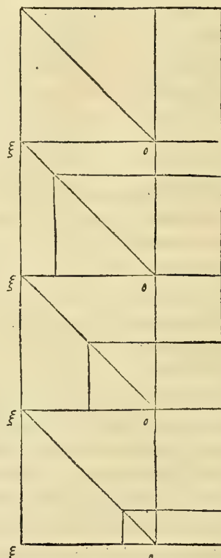
ἀποτέμνον ὑπόκειται οὐ ποτ' ὀρθὰς εἶμεν τῷ ἄξονι ἀγμένον. ἄχθω δή τινες αἱ κλ, μν παρὰ τὰν αγ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὰ β, δ. ἀπὸ δὲ τᾶν κλ, μν ἐπίπεδα ἀνεστακέτω παράλληλα τῷ κατὰ τὰν αγ. ἐπιψαύοντι δὲ ταῦτα τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τὰ β, δ ἐπιζευχθεῖσαι. πεσεῖται δὲ διὰ τοῦ θ, καὶ ἐσσοῦνται τῶν τμημάτων κορυφαὶ μὲν τὰ β, δ σαμεῖα, ἄξονες δὲ αἱ βθ, θδ. δυνατὸν δέ ἐστιν εὑρεῖν κύλινδρον, ἄξονα ἔχοντα τὰν βθ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, ἁ περὶ διάμετρον τὰν αγ. εὑρεθέντος δὲ ἐσσεῖται τις κυλίνδρου τόμος, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. πάλιν δὴ καὶ κῶνον εὑρεῖν δυνατόν ἐστι, κορυφὰν ἔχοντα τὸ β σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, ἁ περὶ διάμετρον τὰν αγ. εὑρεθέντος δὲ ἐσσεῖται τὸ ἀπότμημα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. λέγω δή, ὅτι τοῦ σφαιροειδέος ἡμίσειον διπλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου τούτου. ἔστω δὴ ὁ ψ κῶνος διπλάσιος τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου. εἰ οὖν μή ἐστιν ἴσον τὸ ἡμίσειον τοῦ σφαιροειδέος τῷ ψ κώνῳ, ἔστω πρῶτον εἰ δυνατὸν μεῖζον. ἐγγεγράφθω δή τι εἰς τὸ ἡμίσειον τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρου τομῶν, ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ ἡμίσειον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος, μεῖζον ἐὸν τοῦ ψ κώνου. καὶ ὁ τόμος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦ μὲν ψ κώνου καὶ ὁ τόμος ἐών, τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐν ἡμισέως τοῦ σφαιροειδέος μείζων ἢ ἡμιόλιος, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἔσται οὖν τὸ ἡμίσειον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. ἐγγεγράφθω κυλίνδρων τομῶν ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ ψ κῶνος τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος. πάλιν οὖν ὁμοίως τοῖς πρότερον δειχθήσεται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον ἐὸν τοῦ ψ κώνου, καὶ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου, ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦ μὲν ψ κώνου ἡμιόλιος ἐών, τοῦ δὲ περιγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσων ἢ ἁμιόλιος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἐσσεῖται οὖν οὐδὲ ἔλασσον τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. ἐπεὶ δὲ οὔτε μεῖζόν ἐστιν, οὐδὲ ἔλασσον, ἴσον ἐστί. φανερὸν οὖν ἐστιν ὃ ἔδει δεῖξαι.



Παντὸς σχήματος σφαιροειδέος ἐπιπέδῳ τμηθέντος μὴ διὰ τοῦ κέντρου, ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ λα
ἔλασσον τμῆμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμφότερα τὰ ἡμίσεα τοῦ ἄξονος τοῦ σφαιροειδέος, καὶ ὁ ἄξων τοῦ μείζονος τμήματος, ποτὶ τὸν ἄξονα τοῦ μείζονος τμήματος. ἔστω γάρ τι τμῆμα σφαιροειδέος σχήματος, ἀποτετμημένον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, μὴ διὰ τοῦ κέντρου. τμηθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ αβγ ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ τᾶς τομᾶς, καὶ ἄξων σφαιροειδέος ἔστω ἁ βζ. κέντρον δὲ τὸ θ. τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμῆμα, τομὰ ἔστω ἁ αγ εὐθεῖα. ποιήσει δ' αὐτὰ ὀρθὰς γωνίας ποτὶ τὰν βζ. ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον ὀρθὸν εἶναι ποτὶ τὸν ἄξονα ὑπέκειτο. ἔστω δὲ τὸ τμῆμα τὸ ἀποτετμημένον, οὗ κορυφὰ τὸ β σαμεῖον, ἔλασσον ἢ ἁμίσεος τοῦ σφαιροειδέος σχήματος, καὶ τᾷ βθ ἴσα ἔστω ἁ ζη. δεικτέον ὅτι τὸ τμῆμα οὗ κορυφὰ τὸ β σαμεῖον, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ δη ποτὶ τὰν δζ. ἔστω δὲ κύλινδρος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ ἐλάσσονι τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἔστω δὲ καὶ κῶνος, ἐν ᾧ τὸ ψ, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτάν, τοῦτον ἔχων τὸν λόγον ὃν ἔχει ἁ

δη ποτὶ τὰν δζ. φαμὶ δὴ τὸν ψ κῶνον ἴσον εἶμεν τῷ τμάματι τῷ κορυφὰν ἔχοντι τὸ β σαμεῖον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσος, ἔστω πρῶτον εἰ δυνατὸν ἐλάσσων. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τμᾶμα σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ μεῖζόν ἐστι τὸ τοῦ σφαιροειδέος τμῆμα τοῦ ψ κώνου. ἐπεὶ οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμήματος, ἔλασσον ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἢ τὸ τμῆμα τοῦ κώνου. δῆλον ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ψ κώνου. ἔστω δὴ τρίτον μέρος τᾶς βδ ἁ βρ. ἐπεὶ οὖν ἁ μὲν βη τριπλασία ἐστὶ τᾶς βθ, καὶ ἁ βδ τᾶς βρ, τριπλασία ἔσται καὶ ἁ δη τᾶς θρ. ἔχει δὴ ὁ μὲν κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν βδ, πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ δη ποτὶ τὰν θρ. ὁ δὲ κῶνος ὁ εἰρημένος ποτὶ τὸν ψ κῶνον, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἁ δζ ποτὶ τὰν δη. ἐξ ἴσου ἀνομοίως τῶν λόγων τεταγμένων ὁ κύλινδρος, ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ποτὶ τὸν ψ κῶνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ δζ ποτὶ τὰν θρ. ἔστω δὴ γραμμαὶ κείμεναι ἐφ' αὐτᾶς ξν, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι τοῖς τμαμάτεσσι τοῖς ἐν τᾷ βδ, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ ζδ. ἔστω δὲ καὶ τᾶν ξο ἑκάστα ἴσα τᾷ β, δ. τᾶν οὖν νο ἑκάστα διπλασία ἐσσεῖται τᾶς θδ. παραπεπλωκέτω δὴ παρ' ἑκάσταν αὐτᾶν χωρίον τι, πλάτος ἔχον ἴσον τᾷ βδ. ὥστε εἶμεν ἕκαστον τῶν ἐχόντων τὰς διαμέτρους τετράγωνον, ἀφαιρήσθω δὴ ἀπὸ μὲν τοῦ πρώτου γνώμων πλάτος ἔχων ἴσον τᾷ βε. ἀπὸ δὲ τοῦ δευτέρου, πλάτος ἔχων ἴσον τᾷ βχ. καὶ ἀφ' ἑκάστου τὸν αὐτὸν τρόπον εἷς ἀπὸ τοῦ ἑπομένου χωρίου γνώμων ἀφαιρήσθω, πλάτος ἔχων ἐν τμήματι ἔλασσον τοῦ πλάτεος τοῦ πρὸ αὐτοῦ γνώμονος ἀφαιρημένου, ἐσσεῖται δὴ ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ πρώτου χωρίου γνώμων ἀφαιρημένος, ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν βε, εζ, καὶ τὸ λοιπὸν χωρίον παρὰ παραπεπλωκὸς παρὰ τὰν νο, ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, τὰν τοῦ ὑπερβλήματος πλευρὰν ἔχων ἴσαν τᾷ δε. ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ δευτέρου χωρίου γνώμων ἀφαιρημένος, ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ζχ, χβ. καὶ τὸ λοιπὸν χωρίον παρὰ τὰν νο παραπεπλωκὸς, ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ. καὶ τὰ λοιπὰ ὁμοίως τούτοις. ἐξοιῶτι δὲ ὧδε. τὰ ἐπίπεδα πάντων τῶν κυλίνδρων, ἐξ ὧν σύγκειται τό, τε ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ τμάματι ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ἐσσεῖται δὴ ὁ ὅλος κύλινδρος διῃρημένος εἰς κυλίνδρους τῷ μὲν πλήθει ἴσους, τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τῷ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν, ὁ δὴ πρῶτος ὁ κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς δγ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κε. οὗτος δέ ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν βδ, δζ περιεχόμενον, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν βε, εζ. ἔχει οὖν ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸν κύλινδρον, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ πρῶτον χωρίον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρημένον. ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ἕκαστος ἄξονα ἔχων τὰν ἴσαν τᾷ δε, ποτὶ τὸν κατ' αὐτὸν





κύλινδρον

κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, ἄξονα ἔχοντα τὸν αὐτὸν, τὸν αὐτὸν ἕξει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὁμοίως τεταγμένον αὐτῷ χωρίον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀφαιρημένον. ἐντὶ οὖν μεγέθεα τινὰ οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, καὶ ἄλλα μεγέθεα χωρία παρὰ τὰν ξν παραπεπτωκότα, πλάτος ἔχοντα τὰν ἴσαν τᾷ βδ, τῷ δὲ πλήθει ἴσα τοῖς κυλίνδροις, καὶ τὰ δύο τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον. λέγονται δὲ οἵ τε κύλινδροι ποτ᾽ ἄλλους κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. ὁ δὲ ἔσχατος οὐδὲ ποθὲν λέγεται. καὶ τὰ χωρία ποτ᾽ ἄλλα χωρία τοὺς ἀπ᾽ αὐτῶν ἀφαιρουμένους, τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις. τὸ δὲ ἔσχατον χωρίον οὐδὲ ποθὲν λέγεται. δῆλον οὖν ὅτι καὶ πάντες οἱ κύλινδροι ποτὶ πάντας τοὺς ἑτέρους τὸν αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ χωρία ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμήματι, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν πάντα τὰ χωρία ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας. καὶ ἐπεί ἐντί τινες γραμμαὶ ἴσαι κείμεναι ἐφ᾽ αὐτᾷ νο, καὶ παρ᾽ ἑκάσταν παραπέπτωκέ τι χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, αἱ δὲ πλευραὶ τῶν ὑπερβλημάτων ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχοντι, καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα ἐστὶ τᾷ ἐλαχίστᾳ, καὶ ἄλλα ἐντὶ χωρία παρὰ τὰν ξν παραπεπτωκότα, πλάτος δὲ ἔχοντα ἴσας τᾷ βδ, τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, δῆλον ὡς σύμπαντα τὰ χωρία ὧν ἐστιν ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, ποτὶ πάντα τὰ ἕτερα χωρία ἐλάσσω λόγον ἔχοντι, τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφότερα τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς νο, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ξο. φανερὸν οὖν ὅτι τὰ αὐτὰ χωρία ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας μείζονα λόγον ἐξοῦντι τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν, συναμφοτέραις τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς νο, καὶ δυοῖς τριταμορίοις τᾶς ξο. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμήματι, μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις, τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς νο, καὶ δυοῖς τριταμορίοις τᾶς ξο. ἐστὶ δὲ τᾷ μὲν ξν ἴσα ἁ δζ. τᾷ δὲ ἡμισείᾳ τᾶς νο, ἁ δε. τᾷ δὲ τρίτᾳ δύο μόρια τᾶς ξο, ἁ δρ. ὅλος ἄρα ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμήματι, μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ἔχει ἁ δζ ποτὶ τὰν θρ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ δζ ποτὶ τὰν θρ, τοῦτον ἐδείχθη ἔχων ὁ αὐτὸς κύλινδρος ποτὶ τὸν ψ κῶνον. μείζονα οὖν ἕξει λόγον ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν ψ κῶνον, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ μεῖζον ἐὸν τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ψ κώνου, οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ τοῦ σφαιροειδέος τμῆμα τοῦ ψ κώνου. ἀλλ᾽ ἔστω εἰ δυνατὸν ἔλασσον. πάλιν δὴ ἐγγεγράφθω τι εἰς τὸ τμῆμα σχῆμα στερεὸν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ μεῖζόν ἐστιν ὁ ψ κῶνος τοῦ τμήματος. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμήματος, καὶ ἐλάσσονι ὑπερέχει τὸ περιγραφὲν, ἢ ὁ ψ κῶνος τοῦ τμήματος, δῆλον ὅτι καὶ τὸ περιγραφὲν σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ ψ κώνου. πάλιν δὴ ὁ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἔσχατον χωρίον τῶν παρὰ τὰν ξν παραπεπτωκότων, πλάτος ἐχόντων ἴσον τᾷ βε, ποτ᾽ αὐτό. ἑκάτερα γὰρ ἴσα ἐστίν. ὁ δὲ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἔχων ἴσαν τᾷ δε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν κατ᾽ αὐτὸν ἐόντα τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ πρῶτον χωρίον τῶν παρὰ τὰν ξν πεπτωκότων, πλάτος ἐχόντων ἴσαν τᾷ βδ, ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀφαιρημένον ἀπ᾽ αὐτοῦ. καὶ τῶν ἄλλων δὲ κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ δε, ποτὶ τὸν κατ᾽ αὐτὸν κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὁμόλογον χωρίον αὐτῷ τῶν παρὰ τὰν ξν παραπεπτωκότων, ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀφαιρημένον πλὴν τοῦ λεγομένου τοῦ ἐσχάτου. καὶ πάντες οὖν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ χωρία τὰ παρὰ τὰν ξν παραπεπτωκότα, ποτὶ τὸ ἴσον τῷ τε ἐσχάτῳ κειμένῳ χωρίῳ, καὶ τοῖς γνωμόνεσσι τοῖς ἀφαιρημένοις ἀπὸ τῶν ἄλλων, διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. ἐπεὶ οὖν δέδεικται, ὅτι τὰ χωρία πάντα τὰ παρὰ τὰν νο παραπεπτωκότα ὑπερβάλλοντα εἴδει τετραγώνῳ, χωρὶς τοῦ μεγίστου, μείζονα λόγον ἔχοντι τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς νο, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ξο. δῆλον ὅτι τὰ αὐτὰ χωρία ποτὶ τὰ λοιπὰ, ἃ ἐντὶ ἴσα τῷ ἐσχάτῳ χωρίῳ κειμένῳ, καὶ τοῖς γνωμόνεσσι τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν ἀφαιρουμένοις, ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις ταῖς τε ἡμισείαις τᾶς νο, καὶ δυσὶ τριταμορίοις τᾶς ξο. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμ-

 μένον,

μένου, ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἁ ζδ ποτὶ τὰν θρ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ δζ ποτὶ τὰν θρ, τοῦτον ἔχει ὁ εἰρημένος κύλινδρος ποτὶ τὸν ψ κῶνον. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ὁ αὐτὸς κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν ψ κῶνον, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ ἔλασσον ἐὸν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶν ἔλασσον τοῦ κώνου. ἐπεὶ δὲ οὔτε μεῖζον, οὔτε ἔλασσον, ἴσον ἄρα ἐστίν.

κβ Καὶ τοίνυν εἴκα μὴ ὀρθῶς ποτὶ τὸν ἄξονα τμηθῇ τὸ σφαιροειδὲς, μὴ δὲ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ ἔλασσον αὐτοῦ τμῆμα ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν αἱ συναμφότεραι, τᾶς τε ἡμισέας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν γιγνομένων τμημάτων, καὶ τῷ ἄξονι τοῦ μείζονος τμήματος ποτὶ τὸν ἄξονα τοῦ μείζονος τμήματος. τετμήσθω γάρ τι σχῆμα σφαιροειδὲς, ὡς εἴρηται. καὶ τμηθέντος αὐτοῦ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ αβγδ ὀξυγωνίου κώνου τομά. τοῦ δὲ τέμνοντος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα ἁ γα εὐθεῖα. καὶ παρὰ τὰν αγ ἄχθω αἱ πρ, ςτ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὰ β, ζ. καὶ ἀνεστακέτω ἀπ' αὐτᾶν ἐπίπεδον παράλληλον τῷ κατὰ τὰν αγ. ἐπιψαυσοῦντι δὲ ταῦτα τοῦ σφαιροειδέος κατὰ τὰ β, ζ. καὶ ἐσσοῦνται κορυφαὶ τῶν τμημάτων ἐπιζευχθεῖσαι. καὶ ἔστω ἁ βζ. πεσεῖται δὲ αὐτὰ διὰ τοῦ κέντρου. καὶ ἔστω κέντρον τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, τὸ θ. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται μὴ ὀρθῶς ποτὶ τὸν ἄξονα τετμῆσθαι τῷ ἐπιπέδῳ τὸ σχῆμα, ἁ τομὰ ἐστὶν ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, ἇς διάμετρος αὐτᾶς ἁ γα. λελάφθω οὖν ὅτε κύλινδρος ἄξονα ἔχων ἐπ' εὐθείας τᾷ βδ. οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, ἁ περὶ διάμετρον τὰν αγ. καὶ ὁ κῶνος ὁ κορυφὰν ἔχων τὸ β σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, ἁ περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἐσσεῖται δὴ τόμος τις κυλίνδρου τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, καὶ ἀπότμημα κώνου τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. δεικτέον ὅτι τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος, οὗ κορυφὰ τὸ β ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ δη ποτὶ τὰν δζ. ἴσα δὲ ἔστω ἁ ζη τᾷ θζ. λελάφθω δή τις κῶνος, ἐν ᾧ τὸ ψ ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ δη ποτὶ τὰν δζ. εἰ οὖν μή ἐστιν ἴσον τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος τῷ ψ κώνῳ, ἔστω πρῶτον εἰ δυνατὸν μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεὸν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων τμαμάτων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. ὁμοίως δὴ τῷ προτέρῳ δειχθήσεται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐὸν τοῦ ψ κώνου, καὶ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μείζονα λόγον ἔχων ἢ ποτὶ τὸν ψ κῶνον, ὅ ἐστιν ἀδύνατον. οὐκ ἐσσεῖται οὖν τὸ τοῦ σφαιροειδέος τμῆμα τοῦ ψ κώνου μεῖζον. ἀλλ' ἔστω εἰ δυνατὸν ἔλασσον. ἐγγεγράφθω δὴ πάλιν εἰς τὸ τμῆμα σχῆμα στερεὸν, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον ἐκ κυλίνδρου τμαμάτων ὕψος ἐχόντων συγκείμενα. ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ ψ κῶνος τοῦ τμήματος. πάλιν δὲ διὰ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται τὸ περιγεγραμμένον ἔλασσον τοῦ ψ κώνου. καὶ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἐλάσσονα λόγον ἔχων, ἢ ποτὶ

ἢ ποτὶ τὸν ψ κῶνον, ὅ ἐστιν ἀδύνατον. οὐκ ἐσεῖται οὖν οὐδὲ ἔλασσον τὸ τμᾶμα τοῦ κώνου. φανερὸν οὖν ὡς δεῖ δεῖξαι.

Παντὸς σχήματος σφαιροειδέος ἐπιπέδῳ τμαθέντος ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, μὴ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ μεῖζον τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ἴσα συναμφοτέραις τᾷ τε ἡμισείᾳ τοῦ ἄξονος τοῦ σφαιροειδέος καὶ τῷ τοῦ ἐλάσσονος τμάματος ἄξονι, ποτὶ τὸν τοῦ ἐλάσσονος τμάματος ἄξονα. τετμάσθω τι σφαιροειδὲς ὡς εἴρηται, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν τμάματος τομὰ ἔστω ἁ α β γ ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς καὶ ἄξων τοῦ σχήματος ἁ β δ, τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου ἁ γ α εὐθεῖα. ἐσεῖται δὴ αὐτὰ ποτ' ὀρθὰς τᾷ β δ. ἔστω δὲ μεῖζον τῶν τμαμάτων οὗ κορυφὰ τὸ β. καὶ κέντρον τοῦ σφαιροειδέος τὸ θ. ποτικείσθω δὴ ἁ δ η τᾷ δ θ ἴσα, καὶ α β ζ τᾷ αὐτᾷ ἴσα. δεικτέον ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος, οὗ κορυφὰ τὸ β, ποτὶ τὸν κῶνον, τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ε η ποτὶ τὰν ε δ. τετμάσθω δὴ τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου κύκλου κῶνος ἔστω κορυφὰν ἔχων τὸ δ σαμεῖον. ἔστι δὴ τὸ μὲν ὅλον σφαιροειδὲς διπλάσιον τοῦ τμάματος τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν κ λ, κορυφὰν δὲ τὸ δ σαμεῖον· τὸ δὲ εἰρημένον τμᾶμα διπλάσιον τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. δέδεικται γὰρ ταῦτα. τὸ ὅλον οὖν σφαιροειδὲς τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ εἰρημένου. ὁ δὴ κῶνος οὗτος ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, κορυφὰν δὲ τὸ δ σαμεῖον, τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἁ θ δ ποτὶ τὰν ε δ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς κ θ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ε α. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς κ θ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ε α, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ β θ, θ δ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ. ὃν δὴ λόγον ἔχει ἁ θ δ ποτὶ τὰν ε δ, τοῦτον ἐχέτω ἁ ξ δ ποτὶ τὰν θ δ. ἕξει οὖν καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ξ δ, β θ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β θ, θ δ, ὃν ἁ δ θ ποτὶ τὰν δ ε. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ξ δ, θ β, ποτὶ τὸ ὑπὸ β θ δ. καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν β θ, θ δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὃν ἔχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ξ δ, β θ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ. ἔχει οὖν ὁ μὲν κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν κ λ, κορυφὰν δὲ τὸ δ σαμεῖον, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, κορυφὰν δὲ τὸ δ σαμεῖον, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ξ δ, β θ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ. ὁ δὲ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, κορυφὰν δὲ τὸ δ σαμεῖον, ποτὶ τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος, τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν αὐτῷ, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ, ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ζ ε, ε δ. τουτέστιν ἁ β ε ποτὶ ε ζ. τὸ γὰρ ἔλασσον ἢ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, δέδεικται τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα, τᾷ τε ἡμισείᾳ τοῦ ἄξονος τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ μείζονος τμάματος, ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ μείζονος τμάματος. οὗτος δέ ἐστιν ὃν ἔχει ἁ ζ ε ποτὶ τὰν β ε. ὁ ἄρα κῶνος ὁ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος, ποτὶ τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ἡμίσου τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ξ δ, β θ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, δ ε. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸν κῶνον, τὸν ἐν τῷ ἡμίσῳ τοῦ σφαιροειδέος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζ η, ξ δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β θ, ξ δ. τετραπλάσιον γὰρ ἑκάτερον. ὁ δὲ κῶνος ὁ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος πο-

τὶ

τὶ τὸ τμῆμα τὸ ἔλασσον, ἢ τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος, ὅνπερ ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταῖν ξδ, βθ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν ζε, εδ. ἔχοι καὶ τὸ ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸ τμῆμα τὸ ἔλασσον αὐτοῦ, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταῖν ζη, ξδ, ποτὶ τὸ ὑπὸ ταῖν ζε, εδ. ὥστε καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸ ἔλασσον τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἁ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταῖν ζη, ξδ, τὸ ὑπὸ ταῖν ζε, εδ πρὸς τὸ ὑπὸ ταῖν ζε, εδ. ὑπερέχει δὲ τὸ ὑπὸ ταῖν ζη, ξδ, τοῦ ὑπὸ ταῖν ζε, εδ, τῷ τε ὑπὸ ταῖν ξδ, εη περιεχομένῳ, καὶ τῷ ὑπὸ ταῖν ζε, ξε. ἔχει ἄρα τὸ μεῖζον τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος πρὸς τὸ ἔλασσον, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ ταῖν ξδ, εη, καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ζε, ξε, ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζε, εδ. τὸ δὲ ἔλασσον τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸν κῶνον, τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν αὐτῷ, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ὅνπερ ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἁ ζε ποτὶ τὰν βε. ὁ δὲ κῶνος ὁ ἐν τῷ ἐλάσσονι τμήματι ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἐν τῷ μείζονι τμήματι, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν βε, εδ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς βε τετράγωνον. τὸν γὰρ τῶν ὑψέων λόγον ἔχοντι οἱ κῶνοι, ἐπεὶ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτάν, ἔχοι ἂν καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένον ὅνπερ τὸν λόγον, ὃν τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ξδ, εη, καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ζε, ξε, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς βε. οὗτος δὲ αὐτός ἐστι τῷ ὃν ἔχει ἁ εη ποτὶ τὰν εδ. τὸ γὰρ ὑπὸ τᾶν ξδ, εη, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ξδ, εδ, ὅνπερ ἔχει λόγον, ὃν ἁ εη ποτὶ τὰν εδ. καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζε, ξε περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζε, θε, ὅνπερ ἔχει τὸν λόγον (εδ) ὃν ἁ εη ποτὶ τὰν εδ. ἁ γὰρ ξε ποτὶ τὰν θε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ εη ποτὶ τὰν εδ, διὰ τὸ ἀνάλογον εἶμεν τὰς ξδ, θδ, δε. καὶ τᾶν θδ ἴσαν τε εἶμεν τᾷ ηδ. καὶ τὸ ἴσον οὖν ἀμφοτέροις τοῦ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ξδ, εη, καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ζε, ξε, ποτὶ τὸ ἴσον συναμφοτέροις, τῷ τε ὑπὸ τᾶν ξδ, εδ, καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ζε, θε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ εη ποτὶ τὰν εδ. τὸ δὲ ἀπὸ τᾶς εβ τετράγωνον, ἴσον ἐστὶν ἀμφοτέροις, τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ξδ, εδ. καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζε, θε. τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ τᾶς βθ τετράγωνον, ἴσον τῷ ὑπὸ τᾶν ξδ, εδ περιεχομένῳ. ἁ δὲ ὑπεροχὰ ᾇ μείζων ἐστὶ τὸ ἀπὸ τᾶς βε τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τᾶς βθ, ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ζε, θε. ἐπεὶ ἴσαι ἁ βθ, βζ. δῆλον οὖν ὅτι τὸ μεῖζον τοῦ σφαιροειδέος τμῆμα, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ὅνπερ ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ εη ποτὶ τὰν εδ.

λδ Καὶ τοίνυν εἴκα μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τοῦ ἐπιπέδῳ τμαθῇ τὸ σφαιροειδές, μὴ δὲ διὰ τοῦ κέντρου τὸ μεῖζον τμῆμα αὐτοῦ ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τοῦ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ὅνπερ ἕξει τὸν λόγον, ὃν αἱ συναμφότεραι, ἴσα τὰ ἡμίσεα τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν γενομένων τμαμάτων, καὶ τῷ ἄξονι τοῦ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, τετμήσθω τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ ὡς εἴρηται. τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ αβγδ, ὀξυγωνίου κώνου τομά. τοῦ δὲ τέμνοντος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα ἁ γα εὐθεῖα. παρὰ δὲ τὰν αγ ἄχθωσαν αἱ πρ, στ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὰ β, δ. καὶ ἀνεστακέτω ἀπ' αὐτᾶν ἐπίπεδα παράλληλα τῷ κατὰ τὰν αγ. ἐπιψαύοντι δὲ ταῦτα τοῦ σφαιροειδέος κατὰ τὰ β, δ, καὶ ἐσοῦνται κορυφαὶ τῶν τμαμάτων τὰ β, δ. ἄχθω οὖν ἁ τὰς κορυφὰς ἐπιζευγνύουσα τῶν γενομένων τμαμάτων ἁ βδ. πεσεῖται δὲ αὐτὰ διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω κέντρον τὸ θ. μεῖζον ὄντος τῶ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τμᾶμα, οὗ κορυφὰ τὸ β. ποτικείσθω δὲ ἁ δη ἴσα τᾷ δθ, καὶ ἁ βζ τᾷ αὐτᾷ. δεικτέον ὅτι τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος, τὸ μεῖζον ποτὶ τὸ ἀπότμημα

πότμαμα τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ὥσπερ ἔχει τὸν λό
γον, ὃν ἁ ε η ποτὶ τὰν ε δ. τετμάσθω γὰρ τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου παραλλήλα τῷ κα
τὰ α γ ἐπιπέδῳ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος ἀπότμαμα κώνου, κορυφὰν ἔχον
τὸ δ σαμεῖον. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ δ θ ποτὶ τὰν ε δ, τοῦτον ἐχέτω ἁ ξ δ ποτὶ τὰν θ δ. ὁμοίως δὴ
τῷ πρότερον δειχθήσεται, τό τε ἀπότμαμα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ἐγγεγραμ
μένον, ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἐλάσσονι ἐγγεγραμμένου, τὸν αὐτὸν ἔχον λόγον, ὃν τὸ πε
ριεχόμενον ὑπὸ τᾶν ξ δ, β θ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ. καὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἐλάσσο
νι τμήματι ἐγγεγραμμένου, ποτὶ τὸ τμᾶμα τὸ ἐν ᾧ ἐγγέγραπται, τὸν αὐτὸν ἔχον λόγον, ὃν τὸ περιεχό
μενον ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ. ἕξει οὖν τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ
σφαιροειδέος ἐγγεγραμμένου, ποτὶ τὸ ἔλασσον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ ξ δ,
β θ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ. ἕξει οὖν τὸ μὲν ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἡ
μισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ἐγγεγραμμένου τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζ η, ξ δ, ποτὶ τὸ ὑ
πὸ τᾶν β θ, ξ δ. τετραπλάσιον γὰρ ἑκάτερον ἑκατέρου. τὸ δὲ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ εἰρημένον ποτὶ
τὸ ἔλασσον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ξ δ, β θ, πο
τὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ. ἕξει οὖν τὸ ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸ ἔλασσον τμᾶμα αὐτοῦ τοῦ σφαιροειδέος
τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζ η, ξ δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ. ὥστε δὲ τὸ μεῖζον
τμᾶμα ποτὶ τὸ ἔλασσον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ὑπεροχὰ ᾇ ὑπερέχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν
ζ η, ξ δ, τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ. τὸ δὲ ἔλασσον τμᾶμα ποτὶ τὸ
ἀπότμαμα τοῦ κώνου τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ
τᾶν β ε, ε δ. δέδεικται γὰρ τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἁ ζ ε ποτὶ τὰν β ε. τὸ δὲ ἀπότμαμα τοῦ κώνου
τοῦ ἐν τῷ ἐλάσσονι τμάματι ἐγγεγραμμένου, ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ μείζονι τμάματι
ἐγγεγραμμένου τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς β ε τετράγωνον.
τὰ γὰρ ἀποτμάματα τῶν κώνων τὰ εἰρημένα τούτων ὑψέων λόγον ἔχοντι (τὰν αὐτὰν) τὰ δὲ ὕψεα
αὐτῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι τὸν τᾶς δ ε πρὸς τὸν ε β. ἔχει καὶ τὸ μεῖζον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος
ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει
τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν η ζ, ξ δ, τοῦ ὑπὸ τᾶν ζ ε δ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς β ε τετράγωνον. ὁ δὲ λό
γος οὗτος, ὁμοίως τῷ πρότερον δειχθείη, ὁ αὐτὸς ἐὼν τῷ ὃν ἔχει ἁ ε η ποτὶ τὰν ε δ.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΕΛΙΚΩΝ.

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΔΩΣΙΘΕῼ ΧΑΙΡΕΙΝ.



ΩΝ ποτὶ Κόνωνα ἀπεσταλκότων θεωρημάτων, ὑπὲρ ὧν αἰεὶ τὰς ἀποδείξιας
ἐπιστέλλεις μοι γράψαι, τῶν μὲν πλείστων ἐν τοῖς ὑπὸ Ἡρακλείδα κομισθέντεσ
σιν ἔχεις γεγραμμένας, τινὰς δὲ αὐτῶν καὶ ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ γράψας, ἐπιστέλλω
τοι. μὴ θαυμάσῃς δέ, εἰ πλείονα χρόνον ποιήσαντες ἐκδίδομεν τὰς ἀποδεί
ξιας αὐτῶν. συμβαίνει γὰρ τοῦτο γεγενῆσθαι, διὰ τὸ βούλεσθαί με πρότερον διδό
μεν τοῖς περὶ τὰ μαθήματα πραγματευομένοις, καὶ ματεύειν αὐτὰ προαιρου
μένοις. ποῖα γὰρ τῶν ἐν γεωμετρίᾳ θεωρημάτων οὐκ εὐμέθοδα ἐν ἀρχᾷ φα
νέντα χρόνῳ τὴν ἐξεργασίαν λαμβάνοντι, Κόνων μὲν οὐχ ἱκανὸν λαβὼν εἰς τὰν ματεύσιν αὐτῶν
χρόνον μετάλλαξεν τὸν βίον, καὶ ἄδηλα ἐποίησεν. καὶ ταῦτα πάντα εὑρών, καὶ ἄλλα πολλὰ ἐξευ
ρών, καὶ ἐπὶ τὸ πλεῖον προάγαγε γεωμετρίαν. ἐπιστάμεθα γὰρ ὑπάρξασαν αὐτῷ σύνεσιν οὐ τὰν τυχοῦ
σαν περὶ τὸ μάθημα, καὶ φιλοπονίαν ὑπερβάλλουσαν, μετὰ δὲ τὰν Κόνωνος τελευτὰν πολλῶν ἐτέ
ων ἐπιγεγενημένων, οὐδ' ὑφ' ἑνὸς οὐδὲν τῶν προβλημάτων αἰσθανόμεθα κεκινημένον. βούλομαι δὲ καθ'
ἓν ἕκαστον αὐτῶν προενεγκέσθαι. καὶ γὰρ συμβαίνει δύο τινὰ τῶν ἐν αὐτῷ μὲν κεχωρισμένων, τέλος
δὲ ποτεσσομένων, ὅπως οἱ φάμενοι μὲν πάντα εὑρίσκειν, ἀπόδειξιν δὲ αὐτῶν οὐδὲ μίαν ἐκφέροντες
ἐλέγχωνται, ἀπό θ' ὁμολογηκότες εὑρίσκειν τὰ ἀδύνατα. ταῦτα δὴ ποῖα τῶν προβλημάτων ἐν
τι, καὶ τίνων τὰς ἀποδείξιας ἔχεις ἀπεσταλμένας, καὶ ποίων ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ κομίζοντες δοκιμά
ζοντες ἐμφανίσαι τοι. πρῶτον δὴ τῶν προβλημάτων ἦν, σφαίρας δοθείσης ἐπίπεδον χωρίον εὑ
ρεῖν ἴσον τᾷ ἐπιφανείᾳ τᾶς σφαίρας, ὃ δὴ καὶ πρᾶτον ἐγένετο φανερόν, ἐκδοθέντος τοῦ περὶ τὰν

σφαίραν βιβλίου. δειχθέντος γὰρ ὅτι πάσας σφαίρας ἁ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τᾷ σφαίρᾳ, δῆλον ὡς δυνατόν ἐστι χωρίον ἐπίπεδον εὑρεῖν ἴσον τᾷ ἐπιφανείᾳ τᾶς σφαίρας. δεύτερον δὲ, κώνου δοθέντος ἢ κυλίνδρου, σφαῖραν εὑρεῖν ἴσαν τῷ κώνῳ ἢ τῷ κυλίνδρῳ. τρίτον δὲ, τὰν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα αὐτᾶς ποτ' ἄλλαλα τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν. τέταρτον δὲ, τὰν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα τᾶς ἐπιφανείας τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν ποτ' ἄλλαλα. πέμπτον δὲ, τὸ δοθὲν τμῆμα σφαίρας, τῷ δοθέντι τμήματι σφαίρας ὁμοιῶσαι. ἕκτον δὲ, δύο δοθέντων τμημάτων σφαίρας, εἴτε τᾶς αὐτᾶς, εἴτε ἄλλας εὑρεῖν τι τμῆμα σφαίρας, ὃ ἐσεῖται αὐτὸ μὲν ὅμοιον τῷ ἑτέρῳ τῶν τμημάτων, τὰν δὲ ἐπιφάνειαν ἴσαν ἕξει τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἑτέρου τμήματος. ἕβδομον, ἀπὸ τᾶς δοθείσας σφαίρας τμῆμα ἀποτεμεῖν ἐπιπέδῳ, ὥστε τὸ τμῆμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ὕψος ἴσον, τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν μὴ μείζονα τοῦ ὃν ἔχει τὰ τρία ποτὶ τὰ β. τούτων μὲν τῶν εἰρημένων πάντων τὰς ἀποδείξεις, Ἡρακλείδας ἐκόμισεν. τὸ δὲ μετὰ ταῦτα κεχωρισμένον ψεῦδός ἐστι. ἔστι δὲ, εἴκα σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμηθῇ εἰς ἄνισα, τὸ μεῖζον τμῆμα ποτὶ τὸ ἔλασσον διπλασίονα λόγον ἕξει, ἢ ἁ μείζων ἐπιφάνεια ποτὶ τὰν ἐλάσσονα. ὅτι δὲ τοῦτο ψεῦδός ἐστι, διὰ τῶν προαπεσταλμένων φανερόν ἐστι. κεχώρισται γὰρ ἐν αὐτοῖς τόδε. εἴκα σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμηθῇ εἰς ἄνισα πρὸς ὀρθὰς διαμέτρῳ τινὶ τῶν ἐν τᾷ σφαίρᾳ, τὸ μεῖζον τμῆμα ποτὶ τὸ ἔλασσον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν τὸ τμῆμα τὸ μεῖζον τᾶς διαμέτρου ποτὶ τὸ ἔλασσον. τὸ γὰρ μεῖζον τμῆμα τᾶς σφαίρας ποτὶ τὸ ἔλασσον, ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλάσιον λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἁ μείζων ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐλάσσονα. μείζονα δὲ, ἢ ἡμιόλιον. ἦν δὲ καὶ τὸ ἔσχατον κεχωρισμένον τῶν προβλημάτων ψεῦδος, ὅτι εἴκα σφαίρας τινὸς ἡ διάμετρος τμηθῇ, ὥστε τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος τετράγωνον τριπλάσιον εἶμεν τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, καὶ διὰ τοῦ σημείου τὸ ἐπίπεδον ἀχθὲν ποτ' ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ τέμνῃ τὴν σφαῖραν τὸ τοιοῦτον τῷ εἴδει σχῆμα, οἷόν ἐστι τὸ μεῖζον τᾶς σφαίρας τμῆμα, μέγιστόν ἐστι τῶν ἄλλων τμημάτων τῶν ἐχόντων ἴσαν τὰν ἐπιφάνειαν. ὅτι δὲ τοῦτο ψεῦδός ἐστι, δῆλον, διὰ τῶν προαπεσταλμένων θεωρημάτων. δέδεικται γὰρ, ὅτι τὸ ἡμισφαίριον μέγιστόν ἐστι τῶν περιεχομένων ὑπὸ ἴσας ἐπιφανείας σφαίρας τμημάτων. μετὰ δὲ ταῦτα περὶ τοῦ κώνου προβεβλημένα ἐστὶ τάδε. εἴκα ὀρθογωνίου κώνου τομὰ μενούσας τᾶς διαμέτρου περιενεχθῇ, ὥστε εἶμεν ἄξονα τὰν διάμετρον, τὸ περιγραφὲν σχῆμα ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, κωνοειδὲς καλείσθω. καὶ εἴκα τοῦ κωνοειδέος σχήματος ἐπίπεδον ἐπιψαύῃ, παρὰ δὲ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθὲν ἀποτέμνῃ τι τμῆμα τοῦ κωνοειδέος, τοῦ ἀποτμαθέντος τμήματος βάσις μὲν καλείσθω τὸ ἀποτέμνον ἐπίπεδον, κορυφὰ δὲ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἐπιψαύει τὸ ἕτερον ἐπίπεδον τοῦ κωνοειδέος. εἰ δὲ καὶ τὸ εἰρημένον σχῆμα, ἐπιπέδῳ τμηθῇ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ὅτι μὲν ἁ τομὰ κύκλος ἐσεῖται, δῆλον. ὅτι δὲ τὸ ἀποτμαθὲν τμῆμα ἡμιόλιον ἐσεῖται τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον, δεῖξαι δεῖ, καὶ εἴκα τοῦ κωνοειδέος δύο τμήματα ἀποτμηθέωντι ἐπιπέδοις ὁποσοιοῦν ἀγμένοις. ὅτι μὲν οὖν αἱ τομαὶ ἐσσοῦνται ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ, δῆλον, εἴκα τὰ ἀποτέμνοντα ἐπίπεδα μὴ ὀρθὰ ἐόντα ποτὶ τὸν ἄξονα. ὅτι δὲ τὰ τμήματα ποτ' ἄλλαλα τοῦτον ἑξοῦντι τὸν λόγον, ὃν ἔχωντι δυνάμει ποτ' ἀλλήλας, αἱ ἀπὸ τᾶν κορυφᾶν αὐτῶν ἀγμέναι παρὰ τὸν ἄξονα μέχρι τὰ ἐπίπεδα τέμνοντα, δεῖξαι δεῖ. τούτων δ' αἱ ἀποδείξεις οὔπω σοι ἀποστέλλονται. μετὰ δὲ ταῦτα περὶ τᾶς ἕλικος ἦν προβεβλημένα ταῦτα. ἐντὶ δὲ ὥσπερ ἄλλο τι γένος προβλημάτων οὐδὲν ἐπικοινωνέοντα τοῖς προειρημένοις, ὑπὲρ ὧν ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ τὰς ἀποδείξιας γεγραφήκαμέν σοι. ἐστὶ δὲ τάδε.

ΠΕΡΙ ΕΛΙΚΩΝ.

Εἴκα εὐθεῖαι γραμμαὶ ἐν ἐπιπέδῳ μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος ἰσοταχέως περιενεχθεῖσα ἀποκατασταθῇ, πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, ἅμα δὲ τᾷ γραμμᾷ τᾷ περιφερομένᾳ φέρηταί τι σημεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ, κατὰ τᾶς εὐθείας ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σημεῖον ἕλικα γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. φαμὶ δὴ τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπὸ τᾶς ἕλικος καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἀποκατασταθείσας ὅθεν ὥρμασεν, τρίτον μέρος εἶμεν τοῦ κύκλου τοῦ γραφέντος, κέντρῳ μὲν τῷ μένοντι σημείῳ, διαστήματι δὲ τᾷ εὐθείᾳ τᾷ διανυσθείσᾳ ὑπὸ τοῦ σαμείου ἐν τᾷ μιᾷ περιφορᾷ τᾶς εὐθείας. καὶ εἴκα τᾶς ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος τὸ ἔσχατον γενόμενον. ἄλλα δέ τις εὐθεῖα τᾷ περιαχθείσᾳ καὶ ἀποκατασταθείσᾳ γραμμᾷ ποτ' ὀρθὰς ἀχθῇ, ἀπὸ τοῦ μένοντος ποτὶ τὸ αὐτὸ, ὥστε ἐμπεσεῖν τᾷ ἐπιψαυούσᾳ, φαμὶ τὰν προσαχθεῖσαν εὐθεῖαν ἴσαν εἶμεν τᾷ τοῦ κύκλου περιφορᾷ. καὶ εἴκα ἁ περιαγομένα γραμμὰ καὶ τὸ σημεῖον, τὸ φερόμενον κατ' αὐτᾶς, πλείονας περιφορὰς περιενεχθέωντι καὶ ἀποκατασταθέωντι πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, φαμὶ τοῦ χωρίου, τοῦ ἐν

τᾷ

τᾶ δευτέρα περιφορᾶ ἀπολαφθέντος ὑπὸ τᾶς ἕλικος, τὸ μὲν ἐν τᾶ τρίτα ἀπολαφθὲν διπλάσιον ἐσεῖται, τὸ δὲ ἐν τᾶ τετάρτα τριπλάσιον, τὸ δὲ ἐν τᾶ πέμπτα τετραπλάσιον, καὶ ἀεὶ τὰ ἐν ταῖς ὕστερον περιφοραῖς ἀπολαμβανόμενα χωρία κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς πολλαπλάσια ἐσεῖται, τοῦ ἐν τᾶ δευτέρα περιφορᾶ ἀπολαφθέντος. τὸ δὲ ἐν τᾶ πρώτα περιφορᾶ ἀπολαφθὲν χωρίον ἕκτον μέρος εἶμεν, τοῦ ἐν τῆ δευτέρα περιφορᾶ ἀπολαφθέντος χωρίου. καὶ εἴκα ἐπὶ τᾶς ἕλικας τᾶς ἐν μιᾶ περιφορᾶ γεγραμμένας δύο σημεῖα λαφθέοντι, καὶ ἀπ᾽ αὐτῶν ἐπιζευχθέωντι εὐθεῖαι ἐπὶ τὸ μεμενακὸς πέρας τᾶς περιενεχθείσας γραμμᾶς, καὶ κύκλοι δύο γεγραφέωντι κέντρῳ μὲν τῷ μεμενακότι σημείῳ, διαστήμασι δὲ ταῖς ἐπιζευχθείσαις ἐπὶ τὸ μεμενακὸς πέρας τᾶς εὐθείας, καὶ ἐλάσσων τᾶν ἐπιζευχθεισᾶν ἐπεκβλήθη, φαμὶ τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς τοῦ μείζονος κύκλου περιφερείας τᾶς ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἕλικι μεταξὺ τᾶν εὐθειᾶν ἐούσας, καὶ τᾶς ἕλικος καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐκβληθείσας ποτὶ τὸ περιλαφθὲν χωρίον, ὑπό τε τᾶς τοῦ ἐλάσσονος κύκλου περιφερείας, καὶ τᾶς αὐτᾶς ἕλικος, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ πέρατα αὐτῶν, τοῦτον ἕξειν τὸν λόγον ὃν ἔχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου μετὰ δύο τριταμορίων τᾶς ὑπεροχᾶς, ἇς ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου μετ᾽ ἑνὸς τριταμορίου τᾶς εἰρημένας ὑπεροχᾶς. τούτων δή μοι καὶ ἄλλων περὶ τᾶς ἕλικος αἱ ἀποδείξιες, ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ γράφονται. πρόκεινται δὲ ὡς καὶ τῶν ἄλλων τῶν γεωμετρουμένων τὰ χρείαν ἔχοντα, εἰς τὴν ἀπόδειξιν αὐτῶν. λαμβάνω δὲ καὶ ἐν τούτοις τῶν ἐν τοῖς πρότερον ἐκδεδομένοις βιβλίοις λήμματα τάδε. τᾶν ἀνίσων γραμμᾶν, καὶ τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχὰν ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος αὐτὰ συντιθεμέναν, δυνατὸν εἶμεν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος τῶν ποτ᾽ ἄλλαλα λεγομένων.

Εἴκα ἐπί τινος γραμμᾶς ἐνεχθῇ τι σημεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ φερόμενον, καὶ λαφθέωντι α
ἐν αὐτᾶ δύο γραμμαί, αἱ ἀπολαφθεῖσαι τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον ποτ᾽ ἀλλάλας, ὅνπερ οἱ χρόνοι ἐν οἷς τὸ σημεῖον τὰς γραμμὰς ἐπορεύθη. ἠνέχθω γάρ τι σημεῖον ἐπὶ τᾶς αβ γραμμᾶς ἰσοταχέως, καὶ λελάφθωσαν ἐν αὐτᾶ δύο γραμμαὶ αἱ γδ, δε. ἔστω δὲ ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὰν γδ γραμμὰν τὸ σημεῖον διεπορεύθη ὁ ζη, ἐν ᾧ δὲ τὰν δε ὁ ηθ. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ αγ γραμμὰ ποτὶ τὰν δε γραμμάν, ὃν χρόνος ὁ ζη ποτὶ τὸν ηθ. συγκείσθωσαν γὰρ ἐκ τῶν γδ, δε γραμμῶν αἱ αδ, δβ γραμμαὶ καθ᾽ ἁντινοῦν σύνθεσιν οὕτως, ὥστε ὑπερέχειν τὰν αδ τᾶς δβ. καὶ ὁσάκις μὲν σύγκειται ἁ γδ γραμμὰ ἐν τᾶ αδ, τοσαυτάκις συγκείσθω ὁ χρόνος ὁ ζη ἐν τῷ χρόνῳ τῷ λη. ὁσάκις δὲ σύγκειται ἁ δε γραμμὰ ἐν τᾶ δβ, τοσαυτάκις συγκείσθω ὁ θη χρόνος ἐν τῷ κη χρόνῳ. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται τὸ σημεῖον ἰσοταχέως ἐνηνέχθαι κατὰ τᾶς αβ γραμμᾶς, δῆλον ὡς ἐν ὅσῳ χρόνῳ τὰν γδ ἐνήνεκται, ἐν τοσούτῳ καὶ ἑκάσταν ἐνήνεκται τᾶν ἴσαν τᾶ γδ. φανερὸν οὖν, ὅτι καὶ συγκειμέναν τὰν αδ γραμμάν, ἐν τοσούτῳ χρόνῳ ἐνήνεκται, ὅσος ἐστὶν ὁ λη χρόνος. ἐπειδὴ τοσαυτάκις σύγκειται ἅ τε γδ γραμμὰ ἐν τᾶ αδ γραμμᾶ, καὶ ὁ ζη χρόνος ἐν τῷ λη χρόνῳ. διὰ ταῦτα δὴ καὶ τὰν βδ γραμμὰν ἐν τοσούτῳ χρόνῳ τὸ σημεῖον ἐνήνεκται, ὅσος ἐστὶν ὁ κη χρόνος. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἁ αδ γραμμὰ τᾶς βδ, δῆλον ὅτι ἐν πλείονι χρόνῳ τὸ σημεῖον τὰν δα διαπορεύεται γραμμάν, ἢ τὰν βδ. ὥστε ὁ χρόνος ὁ λη μείζων ἐστὶ τοῦ κη χρόνου. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴκα ἐκ τῶν χρόνων τῶν ζη, ηθ συντεθέωντι χρόνοι καθ᾽ ἁντινοῦν σύνθεσιν, ὥστε ὑπερέχειν τὸν ἕτερον τοῦ ἑτέρου, ὅτι καὶ τᾶν ἐκ τᾶν γραμμᾶν τᾶν γδ, δε, κατὰ τὰν αὐτὰν σύνθεσιν συντεθεισᾶν ὑπερέξει ἁ ὁμόλογος τῷ ὑπερέχοντι χρόνῳ. δῆλον οὖν ὅτι τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ γδ ποτὶ τὰν δε, ὃν ὁ χρόνος ὁ ζη ποτὶ τὸν χρόνον τὸν ηθ.

α γ δ ε β

λ ζ η θ κ

Εἴκα δύο σημείων ἑκατέρου ἐπί τινος γραμμᾶς ἐνεχθέντος, μὴ τᾶς αὐτᾶς ἰσοταχέως αὐτῷ β
ἑαυτῷ φερομένου, λαφθέωντι ἐν ἑκατέρα τᾶν γραμμᾶν δύο γραμμαὶ αἵ τε πρῶται ἐν ἴσοις χρόνοις ὑπὲρ τῶν σαμείων διανυέσθων, καὶ αἱ δεύτεραι, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον ποτ᾽ ἀλλάλας αἱ λαφθεῖσαι γραμμαί. ἔστω ἐπὶ τᾶς αβ γραμμᾶς ἐνηνεγμένον τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ, καὶ ἄλλο ἐπὶ τᾶς κλ. λελάφθωσαν δὲ ἐν τῷ αβ δύο αἱ γδ, δε γραμμαί, καὶ ἐν τᾶ κλ αἱ ζη, ηθ. ἐν ἴσῳ δὲ χρόνῳ τῷ ἐπὶ τᾶς αβ γραμμᾶς ἐνηνεγμένον σαμεῖον τὰν γδ γραμμὰν διαπορευέσθω, ἐν ὅσῳ τὸ ἕτερον ἐπὶ τᾶς κλ ἠνεγμένον τὰν ζη, ὁμοίως καὶ τὰν δε γραμμὰν ἐν ἴσῳ διαπορευέσθω τὸ σαμεῖον, ἐν ὅσῳ τὸ ἕτερον τὰν ηθ. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ γδ ποτὶ τὰν δε, ὃν ἁ ζη

ποτὶ τὰν ηθ. ἔστω δὴ ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὰν γδ γραμμὰν διαπορεύεται τὸ σημεῖον ὁ μν. ἐν τούτῳ δὴ τῷ χρόνῳ καὶ τὸ ἕτερον σημεῖον διαπορεύεται τὰν ζη. πάλιν δὴ καὶ ἐν ᾧ τὰν δε γραμμὰν διαπορεύεται τὸ σαμεῖον, ἔστω ὁ νξ χρόνος. ἐν τούτῳ δὴ καὶ τὸ ἕτερον σημεῖον διαπορεύεται τὰν ηθ. τὸν αὐτὸν δὴ λόγον ἕξουσί τι ἅ τε γδ ποτὶ τὰν δε γραμμὰν, ὃν ὁ χρόνος ὁ μν πρὸς νξ. καὶ ἁ ζη ποτὶ τὰν ηθ, ὃν ὁ χρόνος ὁ μν ποτὶ τὸν νξ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ γδ ποτὶ τὰν δε, ὃν ἁ ζη ποτὶ τὰν ηθ.

α γ δ β

κ ζ η θ λ

μ ν ξ

γ Κύκλων δοθέντων ὁποσωνοῦν τῷ πλήθει, δυνατόν ἐστιν εὐθεῖαν λαβεῖν μείζονα ἐοῦσαν τᾶν τῶν κύκλων περιφερειᾶν. περιγεγραφέντος γὰρ περὶ ἕκαστον τῶν κύκλων πολυγώνου, δῆλον ὡς ἡ ἐκ πασῶν συγκειμένη τῶν περιμέτρων εὐθεῖα μείζων ἔσται πασᾶν τᾶν τῶν κύκλων περιφερειᾶν.

δ Δύο γραμμᾶν δοθεισᾶν ἀνίσων, εὐθείας τε καὶ κύκλου περιφερείας, δυνατόν ἐστι λαβεῖν εὐθεῖαν τᾶς μὲν μείζονος τᾶν δοθεισᾶν γραμμᾶν ἐλάσσονα, τᾶς δὲ ἐλάσσονος μείζονα. ὁσάκις γὰρ ὑπεροχὰ ἃ ὑπερέχει ἁ μείζων γραμμὰ τᾶς ἐλάσσονος αὐτᾷ συντεθεμένα ὑπερέξει τᾶς εὐθείας ἐπὶ ἐς τοσαῦτα ἴσα διαιρεθείσας τὰς εὐθείας, τὸ ἓν τμῆμα ἔλασσον ἔσται τᾶς ὑπεροχᾶς. εἰ μὲν οὖν καὶ ἁ περιφέρεια μείζων τᾶς εὐθείας ἑνὸς τμήματος ποτιτεθέντος ποτὶ τὰν εὐθεῖαν, τᾶς μὲν ἐλάσσονος τᾶν δοθεισᾶν, δῆλον ὡς μείζων ἐσσεῖται. τᾶς δὲ μείζονος ἐλάσσων. καὶ γὰρ ἁ ποτικειμένα, ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ὑπεροχᾶς.

ε Κύκλου δοθέντος, καὶ εὐθείας ἐπιψαυούσης τοῦ κύκλου, δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀγαγεῖν εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, ὥς τε τὰν μεταξὺ τᾶς ἐπιψαυούσας, καὶ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ ἁ περιφέρεια τοῦ κύκλου ἁ μεταξὺ τᾶς ἁφᾶς, καὶ τᾶς διαχθείσας ὑπό τι τὰν δοθεῖσαν ὁποιανοῦν κύκλου περιφέρειαν. δεδόσθω κύκλος ὁ αβγ, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ κ, καὶ ἐπιψαυέτω τοῦ κύκλου ἁ δζ κατὰ τὸ β. δεδόσθω δὲ καὶ κύκλου περιφέρεια ὁποιαοῦν. δυνατὸν δέ ἐστι τᾶς δοθείσας περιφερείας λαβεῖν τινὰ εὐθεῖαν μείζονα, καὶ ἔστω ἁ ε εὐθεῖα μείζων τᾶς δοθείσας περιφερείας. ἄχθω δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου παρὰ τὰν δζ, ἁ αη. καὶ κείσθω ἁ ηθ ἴσα τᾷ ε, νεύουσα ἐπὶ τὸ β. ἀπὸ δὴ τοῦ κ κέντρου ἐπὶ τὸ θ ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω. τὸν αὐτὸν δὴ λόγον ἔχει ἁ θζ ποτὶ τὰν θκ, ὃν ἁ βθ ποτὶ τὰν θη. ἡ ἄρα ζθ ποτὶ τὰν θκ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἁ βθ περιφέρεια ποτὶ τὰν δοθεῖσαν περιφέρειαν. διότι ἁ μὲν βθ εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς βθ περιφερείας. ἁ δὲ θη μείζων τᾶς δοθείσας περιφερείας. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει καὶ ἁ ζθ ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου, ἢ ἁ βθ περιφέρεια ποτὶ τὰν δοθεῖσαν περιφέρειαν.

δ β ζ

θ

α κ γ η

ε

ς Κύκλου δοθέντος, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμᾶς ἐλάσσονος τᾶς διαμέτρου, δυνατὸν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ποτὶ τὰν περιφέρειαν αὐτοῦ ποτιβαλεῖν εὐθεῖαν, τέμνουσαν τὰν ἐν τῷ κύκλῳ δεδομέναν γραμμὰν, ὥς τε τὰν ἀπολαφθεῖσαν εὐθεῖαν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας, ποτὶ τὰν ἐπιζευχθεῖσαν ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ποτιπεσούσας ἐπὶ τᾶς περιφερείας, ποτὶ τὸ ἕτερον μέρος τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας εὐθείας, τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν. εἰ καὶ ὁ δοθεὶς λόγος ἐλάσσων ἦν, τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου καθετὸν ἐπ᾽ αὐτὰν ἀγμένων. δεδόσθω κύκλος ὁ αβγ, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ κ. ἐπὶ ἐν αὐτῷ δεδόσθω εὐθεῖα ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ γα. καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ ζ πρὸς η, ἐλάσσων τοῦ ὃν ἔχει ἁ γθ ποτὶ τὰν κθ, καθετοῦ οὔσης τᾶς κθ. ἄχθω δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου παρὰ τὰν αγ ἁ κν. καὶ τῇ κγ ποτ᾽ ὀρθὰς ἁ γλ. ὅμοια δὴ ἐστὶ τὰ γθκ, γκλ τρίγωνα. ἐστὶν οὖν ὡς ἁ γθ ποτὶ τὰν θκ, οὕτως ἁ κγ ποτὶ τὰν γλ. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ζ ποτὶ τὰν η, ἢ ἁ κγ ποτὶ τὰν γλ. ὃν δὴ λόγον ἔχει ἁ ζ ποτὶ

τὰν

τὰν κ̄, τοῦτον ἐχέτω ἁ κ̄γ πρὸς μείζονα τᾶς γ̄λ. ἐχέτω τὰν β̄ν. κείσθω δὲ ἁ β̄ν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς εὐθείας διὰ τοῦ γ̄. δυνατὸν δέ ἐστιν οὕτως τεμεῖν. καὶ πεσεῖται ἐκτὸς, ἐπεὶ μείζων ἐστὶ τᾶς γ̄λ. ἐπεὶ οὖν ἁ β̄κ πρὸς β̄ν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ζ̄ ποτὶ τὰν η̄, καὶ ἁ ε̄β ποτὶ β̄γ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν ἁ ζ̄ ποτὶ κ̄.

Τῶν αὐτῶν δεδομένων, καὶ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ εὐθείας ἐκβεβλημένας, δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου ποτιβαλεῖν ποτὶ τὰν ἐκβεβλημέναν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας, καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας ποτὶ τὰν ἐπιζευχθεῖσαν ἀπὸ τοῦ πέρατος ἐναπολαφθείσας, ποτὶ τὸ πέρας τῆς ἐκβεβλημένης τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν, εἰ καὶ ὁ δοθεὶς λόγος μείζων ἢ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετον ἐπ᾽ αὐτὰν ἀγμέναν. δεδόσθω τὰ αὐτὰ, καὶ ἔσω ἁ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐκβεβλημένα. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ἔσω ὃν ἔχει ἁ ζ̄ ποτὶ τὰν κ̄, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ γ̄θ ποτὶ τὰν θ̄κ. μείζων οὖν ἔσεται καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ κ̄γ πρὸς γ̄λ. ὃν δὴ λόγον ἔχει ἁ ζ̄ πρὸς κ̄, τοῦτον ἕξει ἁ κ̄γ πρὸς ἐλάσσονα τᾶς γ̄λ. ἐχέτω πρὸς ῑν νευούσας ἐπὶ τὸ γ̄, δυνατὸν δέ ἐστιν οὕτως τέμνειν, καὶ πεσεῖται ἐντὸς τῆς γ̄λ. ἐπειδὴ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς γ̄λ. ἐπεὶ οὖν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ κ̄γ πρὸς ῑν, ὃν ἁ ζ̄ πρὸς κ̄, καὶ ἁ ε̄ι πρὸς ῑγ τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον, ὃν ἁ ζ̄ ποτὶ τὰν κ̄.

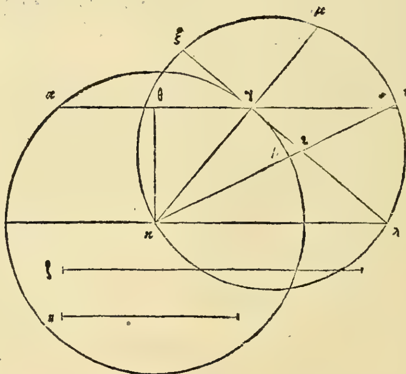
Κύκλου δοθέντος, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμᾶς ἐλάσσονος τᾶς διαμέτρου, καὶ ἄλλας ἐπιψαυούσας τοῦ κύκλου κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας, δυνατὸν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ποτιβαλεῖν τινα εὐθεῖαν ποτὶ τὰν εὐθεῖαν, ὥστε τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπ᾽ αὐτᾶς μεταξὺ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, καὶ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας γραμμᾶς, ποτὶ τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν. εἴη καὶ ὁ δοθεὶς λόγος ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου κάθετον ἐπ᾽ αὐτὰν ἀγμέναν. ἔσω κύκλος δεδομένος ὁ αβ̄γδ, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ εὐθεῖα δεδόσθω, ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ γ̄α. καὶ ἁ ξ̄λ ἐπιψαυέτω τοῦ κύκλου κατὰ τὸ γ̄, καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ ζ̄ πρὸς κ̄ ἔσω ἐλάσσων τοῦ ὃν ἔχει ἁ γ̄θ πρὸς θ̄κ. ἔσσεῖται δὴ ἐλάσσων καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ γ̄κ πρὸς γ̄λ. εἴη καὶ παράλληλος ἀχθῇ ἡ κ̄λ τῇ θ̄γ, ἐχέ-

ζ

η

τω δὴ ἁ κγ πρὸς γξ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ζ πρὸς η. μείζων δέ ἐστιν ἁ ξγ τᾶς γλ. γεγράφθω κύκλου περιφέρεια περὶ τὰ κλξ. ἐπεὶ οὖν ἐστι μείζων ἁ ξγ τᾶς γλ, καὶ ποτ' ὀρθάς ἐντι ἀλλήλαις αἱ κγ ξλ, δυνατόν ἐστι τᾷ μγ ἴσαν ἀλλάλαν θέμεν τὰν ιν, νεύουσαν ἐπὶ τὸ κ, τὸ δὴ περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ ξιλ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν κει λ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἁ ξι πρὸς κε. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ικ ιν πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν κι γλ. ὥς τε καὶ ἡ ιν πρὸς γλ ἐστίν, ὡς ἡ ξι πρὸς κε. ὥς τε καὶ ἡ γμ πρὸς γλ, καὶ ἡ ξγ πρὸς κγ, καὶ πρὸς κβ ἐστίν, ὡς ἡ ξι πρὸς κε. καὶ λοιπὴ ἡ ιγ πρὸς βε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ξγ ποτὶ τὰν γκ, καὶ ὃν ἡ ποτὶ τὸ ζ. πέπτωκεν οὖν ἁ κν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, καὶ ἔχει ἁ μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς εὐθείας ἁ βε ποτὶ τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ τὰν η λόγον.

Τῶν αὐτῶν δεδομένων, καὶ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας γραμμᾶς ἐκβεβλημένας, δυνατόν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ποτιβαλεῖν ποτὶ τὰν ἐκβεβλημέναν εὐθεῖαν, ὥς τε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας ποτὶ τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας ποτὶ τὰν ἁφὰν τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν. εἴκα ὁ δοθεὶς λόγος μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγομέναν. δεδόσθω κύκλος ὁ αβγδ, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ εὐθεῖα ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ γα διήχθω, ἐπιψαυέτω τοῦ κύκλου ἁ ξγ κατὰ τὸ γ. καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ ζ ποτὶ τὰν η, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ γθ ποτὶ τὰν θκ. ἔσται δὴ μείζων καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ κγ ποτὶ τὰν γλ. ἐχέτω οὖν ἁ κγ ποτὶ τὰν γξ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ τὰν η. ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν αὕτη τᾶς γλ. πάλιν δὴ γεγράφθω κύκλος διὰ τῶν ξκλ, σημείων. ἐπεὶ οὖν ἐλάσσων ἐστὶν ἁ ξγ τῆς γλ, καὶ ποτ' ὀρθάς εἰσιν ἀλλήλαις αἱ κμ, ξγ, δυνατὸν τῇ γμ ἴσην θεῖναι τὴν ιν νεύουσαν ἐπὶ τὸ κ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ξιλ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν λικε ἐστίν, ὡς ξι πρὸς κε. ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν ξιλ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν κιν. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν λικε ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν κιγλ, διὰ τὸ εἶναι ὡς τὴν κε πρὸς ικ, οὕτως τὴν λγ πρὸς λι. καὶ ὡς ἄρα ἡ ξι πρὸς κε, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν κιν πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν κιγλ.

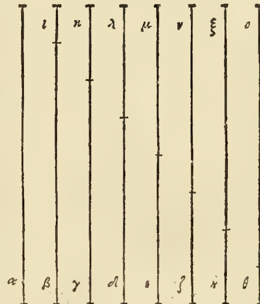


τουτέστιν ὡς νι πρὸς γλ, τουτέστιν ἡ γμ πρὸς γλ. ἐστι δὲ καὶ ὡς ἡ γμ πρὸς γλ, οὕτως ἡ ξγ πρὸς κγ, τουτέστι πρὸς κβ. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ξι πρὸς κε, ἡ ξγ πρὸς κβ. καὶ λοιπὴ ἡ ιγ πρὸς λοιπὴν τὴν βε ἐστίν, ὡς ἡ ξγ πρὸς γκ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ξγ πρὸς γκ, τοῦτον ἔχει ἡ η πρὸς ζ. ποτιπέπτωκε δὴ ἁ κε ποτὶ τὰν ἐκβεβλημέναν, καὶ ἁ μεταξὺ τᾶς ἐκβεβλημένας καὶ τᾶς περιφερείας ἁ βε ποτὶ τὰν γι, τὰν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας ἀπολαφθεῖσαν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ τὰν η.

ι Εἴκα γραμμαὶ ἑξῆς τεθέωντι ὁποσαιοῦν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, ᾖ δὲ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τᾷ ἐλαχίστᾳ, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ τεθέωντι τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα τᾷ μεγίστᾳ, τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ, ποτιλαμβάνοντα τό τε ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετράγωνον, καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἐλαχίστας καὶ τᾶς ἴσας πάσαις τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχούσαις, τριπλάσια ἐσσοῦνται τῶν τετραγώνων πάντων, τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν. ἔστω γραμμαὶ ὁποσαιοῦν ἐφεξῆς κείμεναι τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, αἱ α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. ἁ δὲ θ ἴσα ἔστω τᾷ ὑπεροχᾷ. ποτικείσθω δὲ ποτὶ τὰν β ἴσα τᾷ θ ἁ ι, ποτὶ δὲ τὰν γ ἁ κ ἴσα τᾷ η. ποτὶ δὲ τὰν δ ἁ λ ἴσα τᾷ ζ. ποτὶ δὲ τὰν ε ἁ μ ἴσα τᾷ ε. ποτὶ δὲ τὰν ζ ἁ ν ἴσα τᾷ δ. ποτὶ δὲ τὰν η ἁ ξ ἴσα τᾷ γ. ποτὶ δὲ τὰν θ ἁ ο ἴσα τᾷ β. ἐσσοῦνται δὲ αἱ γινόμεναι ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ τᾷ μεγίστᾳ. δεικτέον οὖν, ὅτι τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶς τε α, καὶ τᾶν γενομέναν, ποτιλαβόντα τό τε ἀπὸ τᾶς α τετράγωνον, καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, τριπλάσιά ἐντι τῶν τετραγώνων πάντων τῶν ἀπὸ τᾶν

α, β,

α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. ἐστὶ δὴ τὸ μὲν ἀπὸ τᾶς β ι τετράγωνον ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ι, β τετραγώνοις, καὶ δύο τοῖς ὑπὸ τῶν β, ι περιεχομένοις. τὸ δὲ ἀπὸ τᾶς κγ, ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν κ, γ τετραγώνοις, καὶ δύο τοῖς ὑπὸ τῶν κ, γ περιεχομένων. ὁμοίως δὴ καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἀλλᾶν τᾶν ἴσαν τᾷ α τετράγωνα, ἴσα ἐντὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ δύο τοῖς ἀπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένων. τὰ μὲν οὖν ἀπὸ τᾶν α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ι, κ, λ, μ, ν, ξ, ο ποτιλαβόντα τὸ ἀπὸ τᾶς α τετραγώνου, διπλάσια ἐντὶ τῶν ἀπὸ τῶν α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ τετραγώνων. λοιπὸν δὲ ἐπιδείξομεν, ὅτι τὰ διπλάσια τῶν περιεχομένων ὑπὸ τῶν τμημάτων ἐν ἑκατέρᾳ γραμμᾶ τᾶν ἴσαν τᾷ α, ποτιλαβόντα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. καὶ ἐπεὶ δύο μὲν τὰ ὑπὸ β, ι περιεχόμενα, ἴσα δυσὶ τοῖς ὑπὸ τῶν β, θ περιεχομένοις. δύο δὲ τὰ ὑπὸ τῶν κ, γ ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς τετραπλασίας τᾶς γ, διὰ τὸ τὰν κ διπλασίονα εἶμεν τᾶς θ. δύο δὲ τὰ ὑπὸ τᾶν δ, λ ἴσα τῷ ὑπὸ τᾶς θ, καὶ τᾶς ἑξαπλασίας τᾶς δ, διὰ τὸ τὰν λ τριπλασίαν εἶμεν. ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἄλλα τὰ διπλάσια τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμημάτων, ἴσα ἐντὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ καὶ τᾶς πολλαπλασίας ἀεὶ κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς ἀρτίους τᾶς ἑπομένας γραμμᾶς. τὰ οὖν σύμπαντα ποτιλαβόντα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ἐσοῦνται ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσον πάσαις τᾷ τε α, καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς β, καὶ τᾷ πενταπλασίᾳ τᾶς γ. καὶ ἀεὶ τὰ περισσὰ κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς περισσοὺς πολλαπλασίους τᾶς ἑπομένας γραμμᾶς. ἐντὶ δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ τετράγωνα ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν αὐτᾶν γραμμᾶν. ἐστὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τᾶς α τετράγωνον, ἴσον τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας πάσαις τᾷ τε α καὶ τᾷ ἴσα ταῖς λοιπαῖς, ὧν ἑκάστα ἴσα τᾷ α. ἰσάκις γὰρ μετρεῖ ἅ τε θ τὰν α, καὶ ἁ α τὰς ἴσας αὐτᾷ πάσας ἐν τᾷ α. ὥς τε ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ α τετράγωνον τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας τᾷ α, καὶ τᾷ διπλασίᾳ τῶν β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. αἱ γὰρ ἴσαι τᾷ α πᾶσαι χωρὶς τᾶς α, διπλάσιαι ἐντὶ τᾶν β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς β τετράγωνον ἴσον ἐντὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας, τᾷ τε β καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶν γ, δ, ε, ζ, η, θ. καὶ πάλιν τὸ ἀπὸ τᾶς γ τετράγωνον ἴσον τῷ ὑπὸ τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας τᾷ τε γ, καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶν ε, ζ, η, θ. ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἀλλᾶν τετράγωνα ἴσα ἐντὶ τοῖς περιεχομένοις ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας αὐτᾷ τε καὶ τᾷ διπλασίᾳ τῶν λοιπῶν. δῆλον οὖν ὅτι τὰ ἀπὸ πασᾶν τετράγωνα, ἴσα ἐντὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας πάσαις τᾷ τε α, καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς β, καὶ τᾷ πενταπλασίᾳ τᾶς γ. καὶ τὰ κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς περισσοὺς πολλαπλάσια τᾶς ἑπομένας.

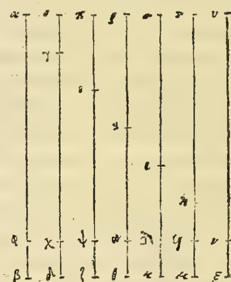


Ἐκ τούτου οὖν φανερόν, ὅτι τὰ τετράγωνα πάντα τὰ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ, τῶν μὲν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, ἐλάσσονα ἐστὶν ἢ τριπλάσια. ἐπεὶ δὴ ποτιλαβόντα τινὰ τριπλάσια ἐντί. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστης τετραγώνου μείζονα ἢ τριπλάσια, ἐπειδὴ τὰ ποτιλαφθέντα ἐλάσσονα ἐστὶν ἢ τριπλάσια τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου. καὶ τοίνυν εἴκα ὅμοια εἴδεα ἀναγεγραφέωντι, ἀπὸ πασᾶν ἀπό τε τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, καὶ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ, τῶν μὲν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν εἰδέων, ἐλάσσονα ἐσσοῦνται, ἢ τριπλάσια. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας εἴδεος, μείζονα ἢ τριπλάσια. τὸν γὰρ αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον τὰ ὅμοια εἴδεα τοῖς τετραγώνοις.

Εἴκα γραμμαὶ ἑξῆς τεθέωντι ὁποσαιοῦν, τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ τε- ια
θέωντι, τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, τῷ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ, τὰ τετράγωνα πάντα τὰ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ, ποτὶ μὲν τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τᾶς ἐλαχίστας, ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις, τῷ τε περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς μεγίστας καὶ τᾶς ἐ-

λαχί-

λαχίστας καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς τετραγώνου, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας. ποτὶ δὲ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου, μείζονα τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἔστω γὰρ γραμμαὶ ὁποσαιοῦν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι ἑξῆς κείμεναι, ἁ μὲν αβ τᾶς γδ, ἁ δὲ γδ τᾶς εζ, ἁ δὲ εζ τᾶς ηθ, ἁ δὲ ηθ τᾶς ικ, ἁ δὲ ικ τᾶς λμ, ἁ δὲ λμ τᾶς νξ. ποτικείσθω δὴ ποτὶ μὲν τὰν γδ ἴσα μιᾷ ὑπεροχᾷ ἁ γο. ποτὶ δὲ τὰν εζ ἴσα δυσὶν ὑπεροχαῖς, ἁ επ. ποτὶ δὲ τὰν ηθ ἴσα τρισὶν ὑπεροχαῖς ἁ ηρ. καὶ ποτὶ τὰς ἄλλας τὸν αὐτὸν τρόπον. ἐσσοῦνται δὴ αἱ γενόμεναι ἀλλήλαις ἴσαι, καὶ ἑκάστα τᾷ μεγίστᾳ. δεικτέον οὖν ὅτι τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶν γενομέναν τετράγωνα, ποτὶ μὲν πάντα τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς νξ τετραγώνου ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ ἀπὸ τᾶς αβ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις, τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν αβ, νξ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς νυ τετραγώνου. ποτὶ δὲ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν αὐτᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς αβ τετραγώνου μείζονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἀφῃρήσθω ἀφ' ἑκάστης τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν ἴσα τᾷ ὑπεροχᾷ. ὃν δὴ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς αβ ποτὶ συναμφότερα, τό, τε ὑπὸ τᾶν αβ, φβ περιεχόμενον. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς αφ τετραγώνου, τοῦτον ἔχει λόγον τό, τε ἀπὸ τᾶς οδ τετράγωνον, ποτί τε τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν οδ, δχ. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς χο τετραγώνου, τὸ ἀπὸ τᾶς πζ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν πζ, ψζ. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ψπ τετραγώνου, ἀπὸ τᾶν ἄλλαν τετράγωνα, ποτὶ τὰ ὁμοίως λαμβανόμενα χωρία.



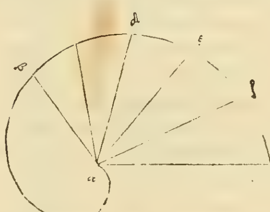
καὶ τὰ πάντα δὴ τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶν οδ, πζ, ρθ, σκ, τμ, υξ, ποτί τε πάντα περιεχόμενα ὑπό τε τᾶς νξ καὶ τὰς ἴσας πάσαις ταῖς εἰρημέναις γραμμαῖς. καὶ τὰ τριτημόρια τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν οχ, πψ, ρω, σλ, τϛ, υν, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς αβ τετράγωνον ποτὶ συναμφότερα, τό, τε ὑπὸ τᾶν αβ, φβ περιεχόμενον, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ φα τετραγώνου. εἰ οὖν κα δειχθῇ τό, τε περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς νξ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς οδ, πζ, ρθ, σκ, τμ, υξ, καὶ τὰ τρίτα μέρη τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν οχ, πψ, ρω, σλ, τϛ, υν, τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν αβ, γδ, εζ, ηθ, ικ, λμ, ἐλάσσονα. τῶν δὲ τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν γδ, εζ, ηθ, ικ, λμ, νξ μείζονα, δεδειγμένον ἐσσεῖται τὸ προτεθέν. ἐντὶ δὴ τὸ μὲν περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς νξ, καὶ τὰς ἴσας πάσαις ταῖς οδ, πζ, ρθ, σκ, τμ, υν. καὶ τὰ τρίτα μέρη τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν οχ, πψ, ρω, σλ, τϛ, υν, ἴσον τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ χδ, ψζ, ωθ, λκ, ϛμ, νξ, καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς νξ. καὶ ἴσας πάσαις ταῖς οχ, πψ, ρω, σλ, τϛ, υν. καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν οχ, πψ, ρω, σλ, τϛ, υν. τὰ δὲ ἀπὸ τᾶν αβ, γδ, εζ, ηθ, ικ, λμ τετράγωνα ἴσα τοῖς ἀπὸ τᾶν βφ, χδ, ψζ, ωθ, λκ, ϛμ τετραγώνοις, καὶ τοῖς ἀπὸ τᾶν αφ, γχ, εψ, ηω, ιλ, λϛ. καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶς βφ, καὶ τᾶς διπλασίας τᾶν αφ, γχ, εψ, ηω, ιλ, λϛ. κοινὰ μὲν οὖν ἐντὶ ἑκατέρων τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ νξ. τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς νξ, καὶ τὰς ἴσας ταῖς οχ, πψ, ωρ, λσ, ϛτ, υν, ἔλασσον ἐστὶ τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τᾶς βφ, καὶ τᾶς διπλασίας τᾶν αφ, γχ, εψ, ηω, ιλ, λϛ. διὰ τὸ τὰς νῦν εἰρημένας γραμμαῖς ταῖς μὲν γο, επ, ηρ, ισ, λτ, υν, ἴσας εἶμεν, τᾶν δὲ λοιπᾶν μείζονας. καὶ τὰ τετράγωνα δὲ τὰ ἀπὸ τᾶν αφ, γχ, εψ, ηω, ιλ, λϛ. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς ἐπάνω. ἐλάττονα ἄρα ἐντὶ τὰ ῥηθέντα χωρία τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν αβ, γδ, εζ, ηθ, ικ, λμ. λοιπὸν δὲ δείξομεν, ὅτι μείζονα ἐντὶ τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν γδ, εζ, ηθ, ικ, λμ, νξ. πάλιν δὴ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν γδ, εζ, ηθ, ικ, λμ, νξ, ἴσα ἐντὶ τοῖς τε ἀπὸ τᾶν γχ, εψ, ηω, ιλ, λϛ, καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς νξ, καὶ τᾶς διπλασίας πασᾶν τᾶν γχ, εψ, ηω, ιλ, λϛ. καὶ οὖν κοινὰ μὲν τὰ ἀπὸ τᾶν χδ, ψζ, ωθ, λκ, μϛ, νξ. μεῖζον δὲ τὸ ὑπό τε τᾶς νζ, καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς οχ, πψ, ρω, σλ, τϛ, υν, τοῦ ὑπὸ τᾶς νξ καὶ τᾶς διπλασίας πασᾶν τᾶν γχ, εψ, ηω, ιλ, λϛ. ἐντὶ δὲ καὶ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν χο, ψπ, ωρ, λσ, ϛτ, υν, τῶν ἀπὸ τᾶν γχ, εψ, ηω, ιλ, λϛ, μείζονα ἢ τριπλάσια. δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο. μείζονα ἄρα ἐντὶ τὰ ῥηθέντα χωρία τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν γδ, εζ, ηθ, ικ, λμ, νξ.

Καὶ

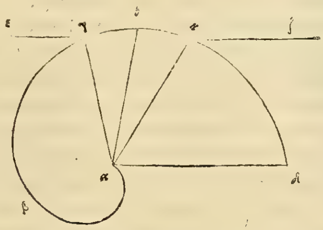
Καὶ τοίνυν εἴκα ὅμοια ἀναγραφέντι ἀπὸ πασᾶν, ἀπό τε τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, καὶ ἀπὸ τᾶς ἴσας τᾷ μεγίστᾳ, εἴδεα πάντα τὰ ἀπὸ τᾶν ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας εἴδεος, ἐλάσσονα λόγον ἕξοντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις, τῷ τε περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς μεγίστας καὶ τᾶς ἐλαχίστας, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας, ποτὶ δὲ τὰ ἀπὸ τᾶν αὐτᾶν εἴδεα χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας μείζονα τοῦ αὐτοῦ λόγου. τὸν αὐτὸν γὰρ ἕξουσι λόγον τὰ ὅμοια εἴδεα τοῖς τετραγώνοις.

Εἴκα εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος αὐτᾶς, καὶ ἰσοταχέως περιενεχθεῖσα ὁσάκις οὖν ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, ἅμα δὲ τᾷ γραμμᾷ περιαγομένᾳ φέρηται τι σημεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ κατὰ τᾶς εὐθείας, ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σημεῖον ἕλικα γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. καλείσθω οὖν τὸ μὲν πέρας τᾶς εὐθείας τὸ μένον περιαγομένας αὐτᾶς, ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. ἁ δὲ θέσις τᾶς γραμμᾶς, ἀφ' ἇς ἄρξατο ἁ εὐθεῖα περιφέρεσθαι, ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. εὐθεῖα ἂν μὲν ἐν τᾷ πρώτᾳ τᾷ περιφορᾷ διαπορευθῇ τὸ σαμεῖον, τὸ κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον, πρώτα καλείσθω. ἂν δὲ ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ τὸ αὐτὸ σαμεῖον διανύσει, δευτέρα, καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως ταύταις ὁμωνύμως ταῖς περιφοραῖς καλείσθωσαν. τὸ δὲ χωρίον τὸ περιλαφθὲν ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γραφείσας, καὶ τᾶς εὐθείας ἅ ἐστι πρώτα, πρῶτον καλείσθω. τὸ δὲ περιλαφθὲν ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γραφείσας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς δευτέρας, δεύτερον καλείσθω. καὶ τὰ ἄλλα ἑξῆς οὕτω καλείσθω. καὶ εἴκα ἀπὸ τοῦ σημείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἀχθῇ τις εὐθεῖα γραμμὰ τᾶς εὐθείας ταύτας ἐπὶ τὰ αὐτὰ ᾇ περιφορὰ γένηται προαγομένα καλείσθω. τὰ δὲ ἐπὶ θάτερα ἑπόμενα, ὅ τε γραφεὶς κύκλος κέντρῳ μὲν τῷ σημείῳ, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, διαστήματι δὲ τᾷ εὐθείᾳ ἅ ἐστιν πρώτα, πρῶτος καλείσθω. ὁ δὲ γραφεὶς, κέντρῳ μὲν τῷ αὐτῷ, διαστήματι δὲ διπλασίᾳ εὐθείᾳ, δεύτερος καλείσθω. καὶ οἱ ἄλλοι δὲ ἑξῆς τούτοις τὸν αὐτὸν τρόπον.

Εἴκα ποτὶ τὰν ἕλικα τὰν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, εὐθεῖαι ιβ
ἐμπεσῶντι ὁποιαιοῦν, ἴσας ποιοῦσαι γωνίας ποτ' ἀλλάλας, τῷ ἴσῳ ὑπερέχοντι ἀλλάλαν. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς αἱ α β, α γ, α δ, α ε, α ζ ἴσας γωνίας ποιοῦσαι ποτ' ἀλλάλας. δεικτέον ὅτι τῷ ἴσῳ ὑπερέχει ἁ α γ τᾶς α β, καὶ ἁ α δ τᾶς α γ, καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως. ἐν ᾧ γὰρ χρόνῳ ἁ περιαγομένα γραμμὰ ἀπὸ τᾶς α β ἐπὶ τὰν α γ ἀφικνεῖται, ἐν τούτῳ τῷ χρόνῳ τὸ σημεῖον τὸ κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον, τὰν ὑπεροχὰν διαπορεύεται, ᾇ ὑπερέχει ἁ γ α τὰν α β. ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἀπὸ τᾶς α γ ἐπὶ τὰν α δ, ἐν τούτῳ διαπορεύεται τὰν ὑπεροχὰν ᾇ ὑπερέχει ἁ α δ τᾶς α γ. ἐν ἴσῳ δὲ χρόνῳ ἁ περιαγομένα γραμμὰ ἀπό τε τᾶς α β ἐπὶ τὰν α γ ἀφικνεῖται, καὶ ἀπὸ τᾶς α γ ἐπὶ τὰν α δ. ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ἴσαι ἐντί. ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὸ κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον σημεῖον διαπορεύεται τὰν ὑπεροχὰν, ᾇ ὑπερέχει ἁ α γ τᾶς α β. καὶ τὰν ὑπεροχὰν ᾇ ὑπερέχει ἁ α δ τᾶς α γ. τῷ ἴσῳ ἄρα ὑπερέχει ἅ τε α γ τᾶς α β, καὶ ἁ α δ τᾶς α γ. καὶ αἱ λοιπαί.

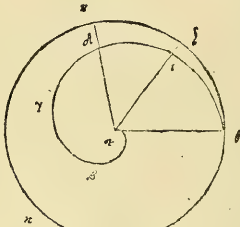


Εἴκα εὐθεῖα γραμμὰ τᾶς ἕλικος ἐπιψαύῃ, ιγ
καθ' ἓν μόνον ἐπιψαύσει σημεῖον. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς τὰ α β γ δ. ἔστω δὲ ἀρχὰ μὲν τᾶς ἕλικος τὸ α σημεῖον, ἀρχὰ δὲ τᾶς περιφορᾶς ἁ α δ εὐθεῖα, καὶ ἐπιψαυέτω τᾶς ἕλικος εὐθεῖά τις ἁ ζ ε. φαμὶ δὴ καθ' ἓν μόνον σημεῖον ἐπιψαύειν αὐτᾶς. ἐπιψαυέτω γὰρ εἰ δυνατὸν κατὰ δύο σημεῖα τὰ γ, η. καὶ ἐπιζευχθῶσαν αἱ α γ, α η. καὶ ἡ γωνία δίχα τετμήσθω ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν α η, α γ. καθ' ὃ δὲ σημεῖον ἁ δίχα τέμνουσα τὰν γωνίαν τᾷ ἕλικι ποτιπίπτει, ἔστω τὸ θ. τῷ δὴ ἴσῳ ὑπερέχει ἅ τε α η τᾶς α θ, καὶ ἁ α θ τᾶς α γ. ἐπειδὴ ἴσας γωνίας περιέχουσιν ὑπὸ τ' ἀλλάλας. ὥστε διπλασίας ἐντὶ αἱ α η, α γ τᾶς α θ. ἀλλὰ τᾶς ἐν τῷ τριγώνῳ τᾶς α θ δίχα τεμνούσας τὰν γωνίαν, μείζονες ἐντὶ ἢ διπλασίας. δῆλον οὖν ὅτι καθ' ὃ συμπίπτει (τὸ) σημεῖον τᾷ γ η εὐθείᾳ ἁ α θ, μεταξὺ τῶν θ, α ἐντὶ σημείων, τέμνει ἄρα ἁ ε ζ τὰν ἕλικα, ἐπειδή τι τῶν ἐν τᾷ γ η σημείων ἐν-

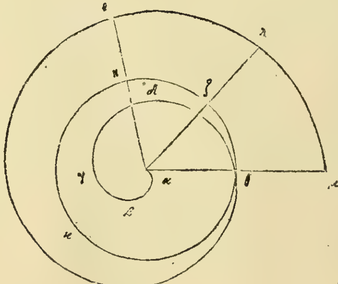


τὸ πέρας ἐστὶ τᾶς ἕλικος. ὑπέκειτο δὲ ἐπιψαύουσα, καθ᾽ ἓν ἄρα μόνον ἅπτεται ἁ εη τᾶς ἕλικος.

ιδ Εἴκα ποτὶ τὰν ἕλικα τὰν ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ποτιπεσῶντι δύο εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ σημείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, καὶ ἐκβληθέωντι ποτὶ τὰν τοῦ πρώτου κύκλου περιφέρειαν, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, αἱ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι ποτ᾽ ἀλλάλας, ὃν αἱ περιφέρειαι τοῦ κύκλου αἱ μεταξὺ τοῦ πέρατος τᾶς ἕλικος, καὶ τῶν περάτων τᾶν ἐκβληθεισᾶν εὐθειᾶν τῶν ἐπὶ τὰς περιφερείας γινομένων, ἐπὶ τὰ προαγούμενα λαμβανομέναν τᾶν περιφερειᾶν, ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ἕλικος. ἔστω ἕλιξ ἁ αβγδεθ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἀρχὰ δὲ τᾶς μὲν ἕλικος ἔστω τὸ α σημεῖον. ἁ δὲ θα εὐθεῖα ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ἔστω καὶ κύκλος ὁ θκη. ἔστω ὁ πρῶτος. ποτιπιπτόντων δὲ ἀπὸ τοῦ α σημείου ποτὶ τὰν ἕλικα, αἱ αε, αδ. καὶ ἐκπιπτόντων ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἐπὶ τὰ ζ, η. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ αε ποτὶ τὰν αδ, ὃν ἁ θκζ περιφέρεια ποτὶ τὰν θκη περιφέρειαν. περιαγομένας γὰρ τᾶς αθ γραμμᾶς, δῆλον ὡς τὸ μὲν θ σημεῖον κατὰ τᾶς τοῦ θκη κύκλου περιφερείας ἐνηνεγμένον ἐστὶν ἰσοταχέως. τὸ δὲ α κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον τὰν αθ γραμμὰν πεπορεύεται. καὶ τὸ θ σημεῖον κατὰ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας φερόμενον, τὰν θκζ περιφέρειαν. τὸ δὲ α τὰν αε εὐθεῖαν. καὶ πάλιν τό τε α σημεῖον τὰν αδ γραμμάν. καὶ τὸ θ τὰν θκη περιφέρειαν, ἑκάτερον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ φερόμενον. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ αε ποτὶ τὰν αδ, ὃν ἁ θκζ περιφέρεια ποτὶ τὰν θκη περιφέρειαν. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἔξω ἐν τοῖς πρώτοις. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ εἴκα ἁ ἑτέρα τᾶν ποτιπιπτουσᾶν ἐπὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος ποτιπίπτῃ, τὸ αὐτὸ συμβαίνει.

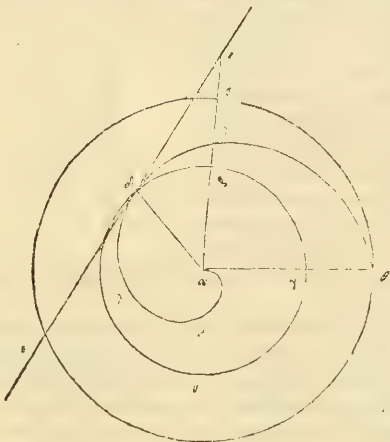


ιε Εἴκα ποτὶ τὰν ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἕλικα ποτιπίπτωντι εὐθεῖαι ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον αἱ εὐθεῖαι ποτ᾽ ἀλλάλας, ὃν αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας λαμβανομένας. ἔστω ἕλιξ ἐφ᾽ ἇς ἁ αβγδθ, ἁ μὲν αβγδθ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἁ δὲ θλεμ ἐν τᾷ δευτέρᾳ. καὶ ποτιπίπτωντι εὐθεῖαι αἱ αε, αλ. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ αλ ποτὶ τὰν αε, ὃν ἁ θκζ περιφέρεια μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, πρὸς θκη μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας. ἐν ὅσῳ γὰρ χρόνῳ τὸ α σημεῖον κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον, τὰν αλ γραμμὰν διαπορεύεται, καὶ τὸ θ σημεῖον κατὰ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας φερόμενον, ὅλαν τε τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, καὶ ἔτι τὰν θκζ περιφέρειαν διαπορεύεται, καὶ πάλιν τὸ α σημεῖον τὰν αε εὐθεῖαν κατὰ τὸ ε, ὅλαν τε τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν. καὶ ἔτι τὰν θκη ἑκάτερον ἰσοταχέως αὐτὸ αὐτῷ φερόμενον. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ αλ γραμμὰ ποτὶ τὰν αε, ὃν ἁ θκζ περιφέρεια μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν θκη περιφέρειαν, μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας. τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται, καὶ εἴκα ποτὶ τὰν ἐν τᾷ τρίτᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἕλικα ποτιπεσῶντι εὐθεῖαι, τὸν αὐτὸν λόγον ἑξοῦντι ποτ᾽ ἀλλάλας, ὃν εἰρημέναι μεθ᾽ ὅλας τὰς τοῦ κύκλου περιφερείας δὶς λαμβανομένας. ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ποτὶ τὰς ἄλλας ἕλικας ποτιπίπτουσαι δείκνυνται, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ὃν ἁ εἰρημένα περιφέρεια μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας τοσαύτας λαμβανομένας, ὅσος ἐστὶν ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς τᾶν περιφορᾶν, καὶ εἴκα ἁ ποτιπίπτουσα ἁ ἑκατέρα ποτὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος πίπτῃ.



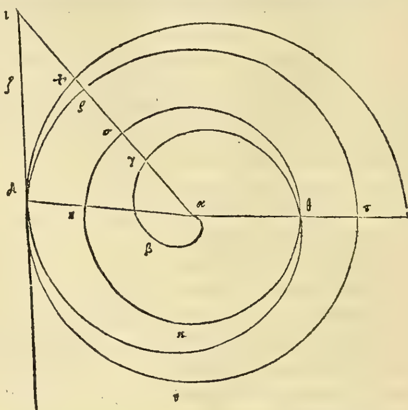
Εἴκα

Εἴκα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ, καὶ ἀπὸ τᾶς ἁφᾶς εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιζευχθῇ ἐπὶ τὸ σαμεῖον, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἃς ποιεῖ γωνίας ἁ ἐφαπτομένα ποτὶ ταὶν ἐπιζευχθεῖσαν ἄνισοι ἐσοῦνται, καὶ ἁ μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις ἀμβλεῖα, ἁ δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ὀξεῖα. ἔστω ἕλιξ ἐφ᾽ ἇς τὰ αβγδθ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα. καὶ ἔστω τὸ μὲν α σαμεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ αθ εὐθεῖα ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ὅ τε πρῶτος κύκλος, ὁ θκη. ἐπιψαυέτω δέ τις εὐθεῖα γραμμὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δεζ κατὰ τὸ δ. καὶ ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὸ α ἐπιζεύχθω ἁ δα. δεικτέον ὅτι ἁ δζ ποτὶ ταὶν αδ ἀμβλεῖαν ποιεῖ γωνίαν. γεγράφθω κύκλος ὁ δτν, κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αδ. ἀναγκαῖον δὴ τούτου τοῦ κύκλου τὰ μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις περιφέρειαν ἐντὸς πίπτειν τᾶς ἕλικος, ταὶ δ᾽ ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐκτός, διὰ τὸ τὰν ἀπὸ τοῦ α ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπιπτούσας εὐθείας. τὰς μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις μείζονας εἶμεν τᾶς αδ, τὰς δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐλάσσονας. ὅτι μὲν οὖν ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τῶν αδζ, οὐκ ἔστιν ὀξεῖα, δῆλον. ἐπειδὴ μείζων ἐστὶ τᾶς τοῦ ἡμικυκλίου. ὅτι δὲ ὀρθὴ οὐκ ἐστί, δεικτέον οὕτως. ἔστω γὰρ δυνατὸν ὀρθή. ἡ ἄρα εδζ ἐπιψαύει τοῦ δτν κύκλου. δυνατὸν δή ἐστιν ἀπὸ τοῦ α ποτιβαλεῖν εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, ὥς τε τὰν μεταξὺ τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας εὐθεῖαν, ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, τοῦ ὃν ἔχει ἁ μεταξὺ τᾶς ἁφᾶς καὶ τᾶς ποτιπιπτούσας περιφερείας, ποτὶ ταὶν δοθεῖσαν περιφέρειαν. ποτιπιπτέτω δὴ ἁ αι. τέμνει δὴ αὐτὰ ταὶν μὲν ἕλικα κατὰ τὸ λ. ταὶν δὲ τοῦ δντ περιφέρειαν κύκλου κατὰ τὸ ρ. καὶ ἐχέτω ἁ ρι εὐθεῖα ποτὶ ταὶν αρ ἐλάσσονα λόγον, τοῦ ὃν ἔχει ἁ δρ περιφέρεια ποτὶ ταὶν δντ περιφέρειαν. καὶ ὅλα ἄρα ἁ ια ποτὶ τὰν αρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ ρδντ περιφέρεια ποτὶ ταὶν δντ περιφέρειαν. τουτέστιν, ὃν ἔχει ἁ σηκθ περιφέρεια ποτὶ τὰν ηκθ περιφέρειαν. ὃν δὲ ἁ σηκθ περιφέρεια ποτὶ τὰν ηκθ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ αλ εὐθεῖα ποτὶ τὰν αδ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ αι ποτὶ τὰν αρ, ἤπερ ἁ λα ποτὶ τὰν αδ, ὅπερ ἀδύνατον. ἴσα γὰρ ἁ ρα τᾷ αδ. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὀρθὴ ἁ περιεχομένα ὑπὸ τῶν αδζ. δέδεικται δέ, ὅτι οὐδὲ ὀξεῖα. ἀμβλεῖα ἄρα ἐστίν. ὥς τε ἁ λοιπὰ ὀξεῖα ἐστίν. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴκα ἁ ἐπιψαύουσα τᾶς ἕλικος κατὰ τὸ πέρας ἐπιψαύῃ, τὸ αὐτὸ συμβήσεται. ις

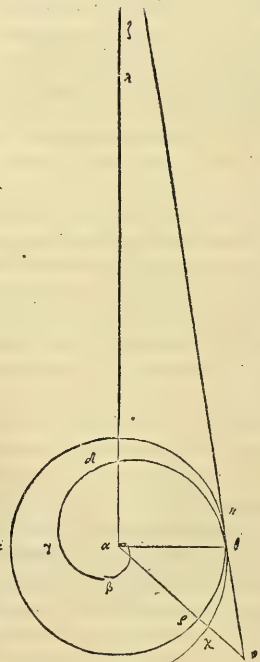


Καὶ τοίνυν εἴκα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ ἁ εὐθεῖα, τὸ αὐτὸ συμβήσεται. ἐπιψαυέτω γὰρ ἁ εζ εὐθεῖα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾶς γεγραμμένας ἕλικος κατὰ τὸ δ, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευάσθω. ὁμοίως δὴ τᾶς τοῦ ρνδ περιφερείας κύκλου, τὰ μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις τᾶς ἕλικος ἐντὸς πεσοῦνται, τὰ δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐκτός. ἁ οὖν γωνία, ἁ ὑπὸ τᾶν αδζ, οὐκ ἔστιν ὀρθή, ἀλλὰ ἀμβλεῖα. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν ὀρθή. ἐπιψαύσει δὴ ἁ εζ, τοῦ ρνδ κύκλου κατὰ τὸ δ. ἄχθω δὴ πάλιν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν ἁ αι. καὶ τεμνέτω τὰν μὲν ἕλικα κατὰ τὸ χ, τὰν δὲ τοῦ ρνδ κύκλου περιφέρειαν κατὰ τὸ ρ. ἐχέτω δὲ ἁ ρι πρὸς ρα ἐλάσσονα λόγον, τοῦ ὃν ἔχει ἁ δρ περιφέρεια ποτὶ ὅλαν τὰν τοῦ δρν κύκλου περιφέρειαν, καὶ ποτὶ τὰν δντ. δέδεικται γὰρ τοῦτο δυνατὸν ἐόν. καὶ ὅλα ἄρα ἁ ια ποτὶ τὰν αρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ ρδντ περιφέρεια μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν δντ περιφέρειαν, μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας. ἀλλ᾽ ὃν λόγον ἔχει ἁ ρδντ περιφέρεια μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ δντρ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν δντ περιφέρειαν, μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ δντρ κύκλου περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἁ σηκθ περιφέρεια, μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας τᾶς θσηκ, ποτὶ τὰν ηκθ περιφέρειαν, μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ ιζ

θ σ η κ κύκλου περιφερείας. ὃν δὲ λόγον ἔχουσιν αἱ ὕστερον εἰρημέναι περιφέρειαι, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἁ χ α εὐθεῖα ποτὶ τὰν α δ εὐθεῖαν. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ι α ποτὶ τὰν α ρ, ἢ ἁ α χ ποτὶ τὰν α δ, ὅπερ ἀδύνατον. ἴση μὲν γὰρ ἡ ρ α τῇ α δ, μείζων δὲ ἡ ι α τῆς α χ. δῆλον οὖν ὅτι ἀμβλεῖα ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπὸ τᾶν α δ ζ. ὥστε ἡ λοιπὴ ὀξεῖα ἐστί. τὰ δ' αὐτὰ συμβήσεται, καὶ εἴκα ἁ ἐπιψαύουσα κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος ἐπιψαύῃ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴκα τᾶς ἐν ὁποιαοῦν γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα. καὶ εἴκα κατὰ τὸ πέρας αὐτᾶς, ὅτι ἀνίσους ποιήσει τὰς γωνίας ποτὶ τὰν ἀπὸ τᾶς ἁφᾶς, ἐπιζευχθεῖσαν ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ τὰν μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις ἀμβλεῖαν, τὰν δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις, ὀξεῖαν.

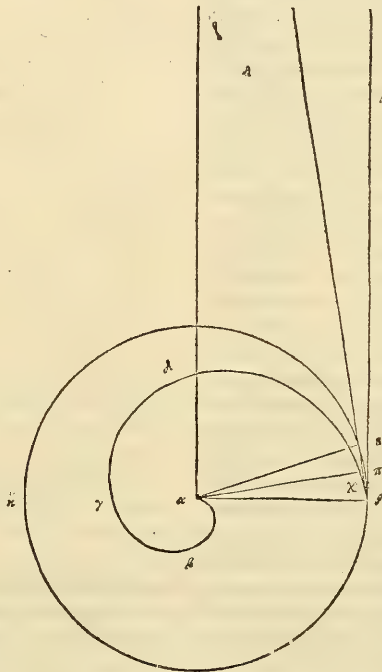


ιη Εἴκα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ, κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου, ὅ ἐστιν ἐν ἀρχᾷ τᾶς ἕλικος ποτ' ὀρθὰς ἀχθῇ τις τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, ἁ ἀχθεῖσα συμπεσεῖται τᾷ ἐπιψαυούσᾳ· καὶ ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, ἴσα ἐσσεῖται τᾷ τοῦ πρώτου κύκλου περιφερείᾳ. ἔστω ἕλιξ ἁ α β γ δ. ἔστω δὲ τὸ α σημεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. ἁ δὲ θ α γραμμὰ ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ὁ δὲ θ η κ κύκλος ὁ πρῶτος. ἐπιψαυέτω δέ τις τᾶς ἕλικος κατὰ τὸ θ, ἁ θ ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ α ἄχθω πρὸς ὀρθὰς τᾷ θ α, ἁ α ζ. συμπεσεῖται δὴ αὐτᾷ ποτὶ τὰν θ ζ. ἐπεὶ αἱ ζ θ, θ α ὀξεῖαν γωνίαν περιέχουσιν. συμπιπτέτω κατὰ τὸ ζ. δεικτέον ὅτι ἁ ζ α ἴσα ἐστὶ τᾷ τοῦ θ η θ κύκλου περιφερείᾳ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστίν, ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον εἰ δυνατόν, μείζων. ἔλαβον δή τινα εὐθεῖαν τὰν λ α, τᾶς μὲν ζ α εὐθείας ἐλάσσονα, τᾶς δὲ τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας μείζονα. ἐστὶ δὴ κύκλος τις ὁ θ η κ. καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ θ η. καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ θ α πρὸς α λ, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς η θ, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν. διότι καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ θ α πρὸς α ζ. δυνατὸν οὖν ἐστίν, ἀπὸ τοῦ α προσλαβεῖν ποτὶ τὰν τὰν ἐκβεβλημέναν τὰν α ν. ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας τὰν ν ρ, πρὸς θ ρ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ θ α ποτὶ τὰν α λ. ἕξει οὖν ἁ ν ρ, ποτὶ τὰν ρ α λόγον, ὃν ἁ θ ρ εὐθεῖα ποτὶ τὰν α λ. ἁ δὲ θ ρ ποτὶ τὰν α λ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ θ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρειαν. ἁ μὲν γὰρ θ ρ εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς θ ρ περιφερείας. ἁ δὲ α λ εὐθεῖα τᾶς τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας μείζων. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἕξει καὶ ἁ ν ρ πρὸς ρ α, ἢ ἁ θ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρειαν. καὶ ὅλα οὖν ἁ ν α ποτὶ τὰν α ρ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἁ θ ρ περιφέρεια μετ' ὅλας τᾶς τοῦ κύ-



τοῦ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν τοῦ θηκ κύκλου περιφέρειαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ θρ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ θηκ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν τοῦ θηκ κύκλου περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ χα ποτὶ τὸν αθ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ να ποτὶ τὰν αρ. ἤπερ ἁ χα ποτὶ τὰν αθ, ὅπερ ἀδύνατον. ἁ μὲν γὰρ να μείζων ἐστὶ τᾶς αχ. ἁ δὲ αρ ἴσα ἐστὶ τᾶ θα. οὐκ ἄρα μείζων ἁ ζα τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, τοῦ θηκ.

Ἔστω δὴ πάλιν, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων ἁ ζα τᾶς τοῦ θηκ κύκλου περιφερείας. ἐλάβομεν δὴ τινὰ εὐθεῖαν πάλιν τὴν αλ, τᾶς μὲν αζ μείζονα, τᾶς δὲ τοῦ θηκ κύκλου περιφερείας ἐλάσσονα. καὶ ἄγω ἀπὸ τοῦ θ τὰν θμ παράλληλον τᾶ αζ. πάλιν οὖν κύκλος ἐστὶν ὁ θηκ. καὶ ἐν αὐτῷ ἐλάσσων γραμμὰ τᾶς διαμέτρου ἁ θκ. καὶ ἄλλα ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου κατὰ τὸ θ. καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ αθ ποτὶ τὰν αλ, ἐλάσσων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς κθ, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν. ἐπειδὴ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ θα πρὸς αζ, ἐλάσσων ἐστί. δυνατὸν οὖν ἐστὶν ἀπὸ τοῦ α ἀγαγεῖν τὰν αω ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν. ὥστε τὰν ρν τὰν μεταξὺ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ εὐθείας, καὶ τᾶς περιφερείας ποτὶ τὰν θπ, ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας, τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ θα ποτὶ τὰν αλ. τεμεῖ δὴ ἁ απ τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ ρ, τὰν δ' ἕλικα κατὰ τὸ χ. καὶ ἕξει καὶ ἐναλλὰξ τὸν αὐτὸν λόγον ἁ νρ πρὸς ρα, ὃν ἁ θω πρὸς αλ. ἁ δὲ θπ ποτὶ τὰν αλ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ θρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θηκ κύκλου περιφέρειαν. ἁ μὲν γὰρ θω εὐθεῖα μείζων ἐστὶ τᾶς θρ περιφερείας, ἁ δ' αλ ἐλάσσων τᾶς τοῦ θηκ κύκλου περιφερείας. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ νρ ποτὶ τὰν αρ, ἢ ἁ θρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θηκ κύκλου περιφέρειαν. ὥστε καὶ ἁ ρα ποτὶ τὰν αν μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ τοῦ θηκ κύκλου περιφέρεια ποτὶ τὰν θκρ περιφέρειαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ τοῦ θηκ κύκλου περιφέρεια ποτὶ τὰν θκρ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ θα εὐθεῖα ποτὶ τὰν αχ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ρα ποτὶ τὰν αν, ἢ ἁ αθ ποτὶ τὰν αχ. ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἐστίν, οὐδὲ ἐλάσσων ἁ ζα τᾶς τοῦ θηκ κύκλου περιφερείας. ἴση ἄρα.



Εἰ δὲ κατὰ τᾶς ἐν τᾶ δευτέρα περιφορᾶ γεγραμμένας ἕλικος κατὰ τὸ πέρας ἐπιψαύῃ εὐθεῖα, καὶ ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἀχθῇ τις ποτ' ὀρθὰς τᾶ ἀρχᾶ τᾶς περιφορᾶς, συμπεσεῖται αὐτᾶ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, καὶ ἐσσεῖται ἁ εὐθεῖα ἁ μεταξὺ τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, διπλασία τᾶς τοῦ δευτέρου κύκλου περιφερείας. ἔστω γὰρ ἁ μὲν αβ, γθ ἕλιξ ἐν τᾶ πρώτα περιφορᾶ γεγραμμένα, ἁ δὲ θετ ἐν τᾶ δευτέρα. καὶ ὁ μὲν θηκ κύκλος ὁ πρῶτος, ὁ δὲ τμν ὁ δεύτερος. ἔστω δέ τις γραμμὰ ἐπιψαύουσα τᾶς ἕλικος κατὰ τὸ τ, ἁ τζ. ἁ δὲ ζα ποτ' ὀρθὰς ἄχθω τᾶ τα. συμπεσεῖται δὲ τὰ αὐτὰ τᾶ τζ, διὰ τὸ δεδεῖχθαι τὰν γωνίαν ὀξεῖαν οὖσαν τὰν ὑπὸ τῶν ατζ. δεικτέον ὅτι ἁ ζα εὐθεῖα διπλασία ἐστὶ τᾶς τοῦ τμν κύκλου περιφερείας. εἰ γὰρ μή ἐστι διπλασία, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ διπλασία, ἢ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία. ἔστω πρότερον εἰ δυνατὸν μείζων ἢ διπλασία. καὶ λελάφθω τὶς εὐθεῖα, ἁ λα τᾶς μὲν ζα εὐθείας ἐλάσσων, τᾶς δὲ τοῦ τμν κύκλου περιφερείας μείζων ἢ διπλασία. ἔστι δή τις κύκλος ὁ τμν, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γεγραμμένα ιθ

ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ τν. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ τα ποτὶ τὰν αλ, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς τν ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγομέναν. δυνατὸν οὖν ἐστὶν ἀπὸ τοῦ α ποτιβαλεῖν τὰν ασ, ποτὶ τὰν τν ἐκβεβλημέναν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας τὰν ρσ ποτὶ τὰν τρ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἁ τα ποτὶ τὰν αλ. τέμνει δὴ ἁ ασ τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ ρ, τὰν δὲ ἕλικα κατὰ τὸ χ. καὶ ἐναλλὰξ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ ρσ ποτὶ τὰν τα, ὃν ἁ τρ ποτὶ τὰν αλ. ἁ δὲ τρ ποτὶ τὰν αλ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ τρ περιφέρεια ποτὶ τὰν διπλασίαν τοῦ μν κύκλου περιφέρειαν. ἐστὶ γὰρ ἁ μὲν τρ εὐθεῖα ἐλάσσων τᾶς τρ περιφερείας. ἁ δὲ αλ εὐθεῖα μείζων ἢ διπλασία τᾶς τοῦ τμν κύκλου περιφερείας. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει α ρσ ποτὶ τὰν αρ, ἢ ἁ τρ περιφέρεια ποτὶ τὰν διπλασίαν τᾶς τοῦ τμν κύκλου περιφερείας. ὅλα οὖν ἁ σα ποτὶ τὰν αρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ τρ περιφέρεια μετὰ τᾶς τμν κύκλου περιφερείας δὶς εἰρημένας, ποτὶ τὰν τοῦ τμν κύκλου περιφέρειαν δὶς εἰρημέναν. ὃν δὲ λόγον ἔχουσιν αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἁ χα ποτὶ τὰν ατ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἁ ασ ποτὶ τὰν αρ, ἢ ἁ χα ποτὶ τὰν τα, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ἢ διπλασία ἁ ζα εὐθεῖα τᾶς τοῦ τμν κύκλου περιφερείας. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἢ διπλασία. δῆλον οὖν, ὅτι διπλασία ἐστί. διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δεικτέον. καὶ εἴκα τᾶς ἐν ὁποιαοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύει τις εὐθεῖα κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, καὶ ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ποτ' ὀρθὰς ἀχθεῖσα τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς συμπίπτῃ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, τοῦ κατὰ τὸν ἀριθμὸν τᾶς περιφορᾶς λεγομένου τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ.

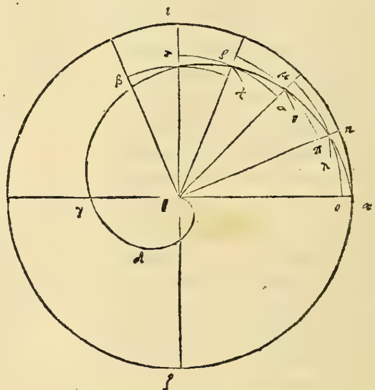
κ Εἴκα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ μὴ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, ἀπὸ δὲ τᾶς ἁφᾶς ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ, καὶ κέντρῳ μὲν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς ἕλικος, διαστήματι δὲ τᾷ ἐπιζευχθείσᾳ κύκλος γραφῇ, ἀπὸ δὲ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἀχθῇ τις ποτ' ὀρθὰς, τᾷ ἀπὸ τᾶς ἁφᾶς ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τᾶς ἕλικος ἐπιζευχθείσᾳ συμπεσεῖται αὐτᾷ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, καὶ ἐσσεῖται ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς τε συμπτώσιος καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἴσα τᾷ περιφερείᾳ τοῦ γραφέντος κύκλου τᾷ μεταξὺ τᾶς ἁφᾶς καὶ τᾶς τομᾶς, καθ' ὃ τέμνει ὁ γραφεὶς κύκλος τὰν ἀρχὰν τᾶς περιφορᾶς ἐπὶ τὰ προαγούμενα λαμβανομένας τᾶς περιφερείας ἀπὸ τοῦ σημείου τοῦ ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς ἁ αβγδ ἐν τᾷ πρώτᾳ γεγραμμένα, καὶ ἐπιψαυέτω τις αὐτᾶς εὐθεῖα ἁ δεζ κατὰ τὸ δ. ἀπὸ δὲ τοῦ δ ποτὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἐπιζεύχθω ἁ αδ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αδ κύκλος γεγράφθω, ὁ δμν. τεμνέτω δὴ οὗτος τὰν ἀρχὰν τᾶς περιφορᾶς κατὰ τὸ κ. ἄχθω δὲ ἁ ζα ποτὶ τὰν αδ ὀρθά. ὅτι μὲν οὖν αὐτᾷ συμπίπτει, δῆλον. ὅτι δὲ καὶ ἴσα ἐστὶν ἁ ζα εὐθεῖα τᾷ κμν δ περιφερείᾳ, δεικτέον. εἰ γὰρ

μὴ

μή, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω εἰ δυνατόν, πρότερον μείζων. λελάφθω δέ τις ἁ λ α τᾶς μὲν ζ α εὐθείας ἐλάσσων, τᾶς δὲ κ μ ν δ περιφερείας μείζων. πάλιν δὴ κύκλος ἐστὶν ὁ κ μ ν. καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ δ ν. καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ δ α πρὸς α λ, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμισεία τᾶς δ ν, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν. δυνατὸν οὖν ἐστὶν ἀπὸ τοῦ α ποτιλαβεῖν τὰν α ε ποτὶ τὰν ν δ ἐκβεβλημέναν, ὥστε τὰν ε ρ ποτὶ τὰν δ ρ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἁ δ α ποτὶ τὰν α λ. δέδεικται γὰρ τοῦτο δυνατὸν ἐόν. ἕξει οὖν καὶ ἁ ε ρ ποτὶ τὰν α ρ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ δ ρ ποτὶ τὰν α λ. ἁ δὲ α ρ ποτὶ τὰν α λ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ δ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν κ μ δ περιφέρειαν. ἐπεὶ ἁ μὲν δ ρ ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς δ ρ περιφερείας. ἁ δὲ α λ μείζων τᾶς κ μ δ περιφερείας. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ἁ ε ρ εὐθεῖα πρὸς ρ α, καὶ ἁ δ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν κ μ δ περιφέρειαν. ὥστε καὶ ἁ α ε πρὸς α ρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ κ μ ρ περιφέρεια πρὸς κ μ δ περιφέρειαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ κ μ ν πρὸς τὰν κ μ δ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ χ α πρὸς α δ. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ ε α πρὸς α ρ, ἢ ἁ α χ πρὸς δ α. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἁ ζ α τᾶς κ μ δ περιφερείας. ὁμοίως δὲ τοῖς πρότερον δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων ἐστίν. ἴσα ἄρα. διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δειχθήσεται, καὶ εἴκα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ εὐθεῖα μὴ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, τὰ δὲ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευασθέντι, ὅτι ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν συμπιπτούσας, ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἴσα ἐστὶν ὅλα τᾷ τοῦ γραφέντος κύκλου περιφερείᾳ, καὶ ἔτι τᾷ μεταξὺ τῶν εἰρημένων σαμείων ὡσαύτως τᾶς περιφερείας λαμβανομένας. καὶ εἴκα τᾶς ἐν ὁποιαοῦν γεγραμμένας περιφορᾷ ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα μὴ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος. τὰ δὲ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευασθέωντι, ὅτι ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τῶν εἰρημένων σαμείων πολλαπλασία τίς ἐστι τᾶς τοῦ γραφέντος κύκλου περιφερείας, κατὰ τὸν ἐλάσσονα ἀριθμὸν τοῦ καθ' ὃν αἱ περιφοραὶ λέγονται, καὶ ἔτι ἴσα τᾷ μεταξὺ τῶν εἰρημένων σαμείων ὁμοίως λαμβανομένας.

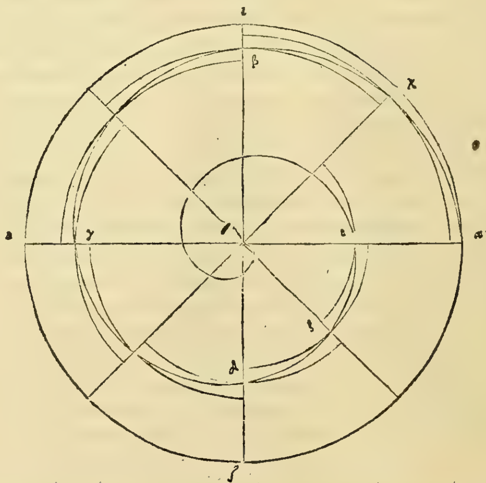
Λαμβάνοντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος, τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς πρώτας ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, δυνατόν ἐστι περὶ αὐτὸ σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς ἁ α β γ δ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα. ἔστω δὲ ἀρχὰ μὲν τᾶς ἕλικος τὸ θ σημεῖον, ἀρχὰ δὲ τᾶς περιφορᾶς ἁ θ α. ὁ δὲ πρῶτος κύκλος ὁ ζ η ι α. αἱ δὲ α η, ζ ι διάμετροι αὐτοῦ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις, ἀεὶ δὴ τὰς ὀρθὰς γωνίας δίχα τεμνομένας, καὶ τοῦ τομέως τοῦ τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιέχοντος ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον τοῦ τομέως ἔλασσον τοῦ προτεθέντος. καὶ ἔστω γεγενημένος ὁ τομεὺς ὁ α θ κ ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος χωρίου. διαιρήσθωσαν δὴ οὖν γωνίαι αἱ τέσσαρες ὀρθαὶ εἰς τὰς ἴσας γωνίας τὰς περιεχομένας ὑπὸ τᾶν α θ, θ κ. καὶ αἱ ποιοῦσαι τὰς γωνίας εὐθεῖαι ἔστων ποτὶ τὰν ἕλικα ἀχθῶσι. καθ' ὃ δὴ τέμνει σημεῖον ἁ θ κ τὰν ἕλικα, ἔστω τὸ λ. καὶ κέντρῳ τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θ λ κύκλος γεγράφθω. πεσεῖται δὴ αὐτοῦ, ἁ μὲν εἰς τὰ προαγούμενα περιφέρεια ἐντὸς τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ εἰς τὰ ἑπόμενα ἐκτός. γεγράφθω δὴ ἁ περιφέρεια, καὶ συμπεσεῖται τᾷ ἔσαι καὶ συμπέσῃ τᾷ θ α κατὰ τὸ ο, α, ο μ. καὶ τᾷ μετὰ τὰν θ κ εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπιπτούσᾳ. πάλιν δὴ καὶ καθ' ὃ τέμνει τὰν ἕλικα σημεῖον ἁ θ μ, ἔστω τὸ ν. καὶ κέντρῳ τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θ ν κύκλος γεγράφθω. κα

γράφθω. ἔσαι καὶ συμπέσῃ ἁ περιφέρεια τοῦ κύκλου, καὶ τὰ μετὰ τὰν θμ ποτιπίπτουσα ποτὶ τὰν ἕλικα. ὁμοίως δὲ καὶ διὰ τῶν ἄλλων πάντων κατατέμνοντι τὰν ἕλικα, αἱ τὰς ἴσας γωνίας ποιοῦσαι κύκλοι γεγράφθωσαν κέντρῳ τῷ θ, ὧν τᾶν συμπέσῃ ἑκάστας ἁ περιφέρεια τᾶτε προαγομένα εὐθεία, καὶ τᾶ ἑπομένα, ἔσαι δὴ περὶ τὸ λαφθὲν χωρίον περιγεγραμμένον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, καὶ ἄλλο ἐγγεγραμμένον. ὅτι δὲ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζόν ἐστιν, ἐλάσσονι τοῦ προτεθέντος χωρίου δειχθήσεται. ἐστὶ γὰρ ὁ μὲν θλο τομεὺς ἴσος τῷ θμλ. ὁ δὲ θνπ τῷ θνρ. ὁ δὲ θχσ τῷ θχτ. ἐστὶ δὲ καὶ τῶν ἄλλων τομέων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, ἴσος τῷ κοινὰν ἔχοντι πλευρὰν τομεῖ, τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τομέων. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ πάντες οἱ τομεῖς πάντεσσιν ἴσοι ἐσσοῦνται. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ χωρίῳ τῷ περιγεγραμμένῳ περὶ τὸ χωρίον σχήματι, χωρὶς τοῦ θακ τομέως. μόνος γὰρ οὗτος λέλειπται τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι. δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζόν ἐστι τῷ ακθ τομεῖ, ὅς ἐλάσσων ἐστὶν τοῦ προτεθέντος.



Ἐκ τούτου δὲ φανερόν, ὅτι δυνατόν ἐστι περὶ τὸ εἰρημένον χωρίον σχῆμα, οἷον εἴρηται, γράφειν. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον εἶναι τοῦ χωρίου ἔλασσον εἶμεν παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. καὶ πάλιν ἐγγράφειν, ὥστε τὸ χωρίον ὁμοίως μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος, ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

κβ Λαβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς ἕλικος, τᾶς ἐν τᾶ δευτέρα περιφορᾶ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας ἅ ἐστι δευτέρα τᾶν ἐν τᾶ ἀρχᾶ τᾶς περιφορᾶς, δυνατόν ἐστι περὶ τὸ αὐτὸ σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι, ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον. καὶ ἄλλο ἐγγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφὲν τοῦ ἐγγραφέντος μεῖζον εἶμεν, ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς ἁ αβγδε, ἐν τᾶ δευτέρα περιφορᾶ γεγραμμένα. καὶ ἔστω τὸ μὲν θ σημεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. ἁ δὲ αθ ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ἁ δὲ εα ἁ δευτέρα εὐθεῖα τᾶν ἐν τᾶ ἀρχᾶ τᾶς περιφορᾶς. ὁ δὲ αζηι κύκλος ἔστω δεύτερος, καὶ αἱ γη, ζι διάμετροι αὐτοῦ ποτ' ὀρθὰς ἀλλήλαις. πάλιν οὖν δίχα τεμνομένας τᾶς ὀρθᾶς γωνίας, καὶ τοῦ τομέως τοῦ τὰν ὀρθὰν γωνίαν περιέχοντος, ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον ἔλασσον τοῦ προτεθέντος. καὶ ἔστω γεγενημένος ὁ θκα

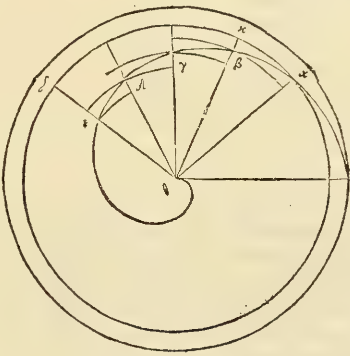


τομεύς,

τομεὺς, ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος χωρίου. διαιρεθείσαν δὴ τᾶν ὀρθᾶν γωνίαν εἰς τὰς ἴσας γωνίας, τὰ ὑπὸ τᾶν κ θ α καὶ τᾶν ἄλλων κατασκευασθέντων ἐπὶ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, ἐσεῖται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος μεῖζον ἐλάσσονι, ἢ ὁ τομεὺς ὁ θ κ α. μείζων γὰρ ἐσεῖται ἁ ὑπεροχὰ ἃ ὑπερέχει ὁ θ κ α τομεὺς τοῦ θ ε ρ. δῆλον οὖν ὅτι δυνατόν ἐστι καὶ τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ λαφθέντος χωρίου μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. καὶ πάλιν τὸ λαφθὲν χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος τοῦ προτεθέντος χωρίου.

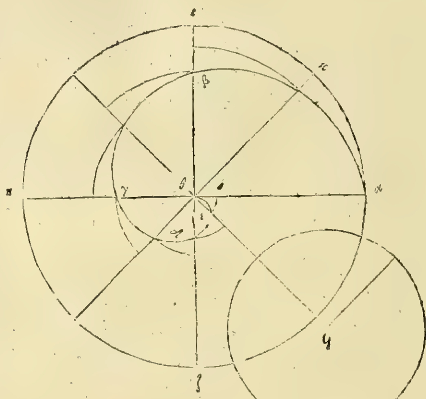
Διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου φανερὸν, διότι δυνατὸν λαβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν ὁποιαοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν λεγομένας περιγράψαι σχῆμα, οἷον εἴρηται ἐπίπεδον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ λαφθέντος χωρίου ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου, καὶ πάλιν ἐγγράψαι, ὥστε τὸ λαφθὲν χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

Λαβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος, ἅ ἐστιν ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας, οὐκ ἐχούσας πέρας τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ τᾶν εὐθειᾶν τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς ἕλικος ἀγομενᾶν, δυνατόν ἐστιν περὶ τὸ χωρίον σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι. ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἃς ἁ α β γ δ ε, πέρατα δὲ αὐτᾶς τὰ α ε. ἔστω δὲ ἀρχὰ τᾶς ἕλικος τὸ θ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α θ, θ ε. γεγράφθω δὴ κύκλος, κέντρῳ μὲν τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θ α. καὶ συμπιπτέτω τᾷ θ ε ἐπὶ τὸ ζ. ἀεὶ δὲ τᾶς γωνίας τᾶς ποτὶ τῷ θ καὶ τοῦ τομέως τοῦ θ α δίχα τεμνομένων ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον τοῦ προτεθέντος ἔλασσον. ἔστω ἐλάσσων ὁ τομεὺς ὁ θ α κ προτεθέντος. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον γεγράφθωσαν κύκλοι διὰ τῶν σημείων καθ' ἃ τέμνουσι τὰν ἕλικα αἱ τὰς ἴσας γωνίας ποιοῦσαι ποτὶ τῷ θ, ὥστε τὰν περιφέρειαν ἑκάστα συμπίπτειν τᾷ τε προαγουμένᾳ καὶ τᾷ ἑπομένᾳ. ἐσεῖται δὴ τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶν α θ, θ ε εὐθειᾶν περιγεγραμμένον σχῆμα ἐπίπεδον, ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον. καὶ ἄλλο ἐγγεγραμμένον. καὶ τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἐλάσσων γάρ ἐστιν ὁ θ α κ τομεύς. ἐκ τούτου φανερόν ἐστιν, ὅτι δυνατόν ἐστι περὶ τὸ εἰρημένον χωρίον ἐπίπεδον, οἷον εἴρηται, περιγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. κγ

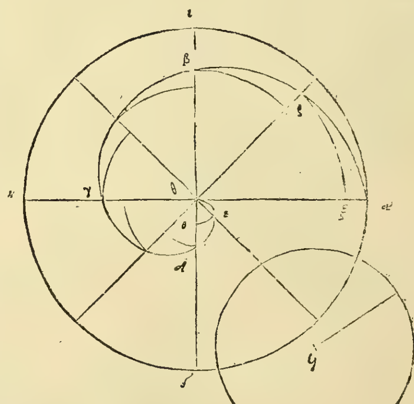


Τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς πρώτας τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κύκλου τοῦ πρώτου. ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἃς ἁ α β γ δ θ, ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα. ἔστω δὲ τὸ μὲν θ σημεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. ἁ δὲ θ α εὐθεῖα πρώτα ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς. ὁ δὲ α κ ζ η ι κύκλος πρῶτος, οὗ τρίτον μέρος ἔστω ἐν ᾧ ς κύκλος. δεικτέον ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ προειρημένον χωρίον τῷ ς κύκλῳ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω πρότερον εἰ δυνατὸν ἔλασσον. δυνατὸν δή ἐστι περὶ τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε θ ἕλικος, καὶ τᾶς α θ εὐθείας περιγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ὁ ς κύκλος τοῦ εἰρημένου χωρίου. περιγεγράφθω δή, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ εἰρημένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θ α κ, ἐλάχιστος δὲ ὁ θ ε ο. δῆλον οὖν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον ἐστὶ τοῦ κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν δὲ εὐθεῖαι πρὸς τὸ θ, ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας τὰν ποτὶ τῷ θ, ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν πεσοῦνται. ἐντὶ δή τινες γραμμαὶ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι, ὧν ἐστι μεγίστα μὲν ἁ θ α, ἐλαχίστα δὲ ἁ θ ε. καὶ ἐλαχίστα κδ

ἴσα τᾶ ὑπεροχᾶ. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι τινὲς γραμμαὶ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ποτιπίπτουσαι, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾶ μεγίστα. καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ πασᾶν ὅμοιοι τομέες, ἀπό τε τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, καὶ ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾶ μεγίστα. οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾶ μεγίστα, ἐλάσσονές ἐντι, ἢ τριπλάσιοι τῶν τομέων, τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐντὶ δὲ οἱ τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾶ μεγίστα ἴσοι τῷ α ζ η ι κύκλῳ. οἱ δὲ τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, ἴσοι τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι. ἐλάσσων ἄρα ὁ α ζ η ι κ κύκλος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος, ἢ τριπλασίων, τοῦ δὲ γ κύκλου τριπλασίων. ἐλάσσων ἄρα ὁ γ κύκλος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ μείζων. οὐκ ἄρα ἐστὶ τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε θ ἕλικος, καὶ τᾶς α θ, ἔλασσον τοῦ γ χωρίου.

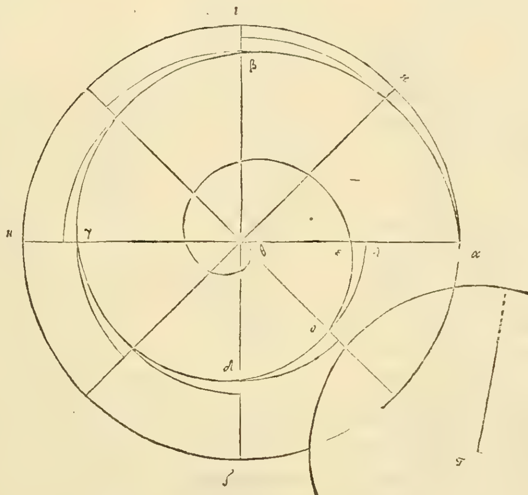


Οὐδὲ τοίνυν μεῖζον. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν μεῖζον. ἔστι δὴ πάλιν δυνατὸν εἰς τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς α β γ δ θ ἕλικος, καὶ τᾶς α θ εὐθείας ἐγγράψαι σχῆμα. ὥστε τὸ εἰρημένον χωρίον τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει τὸ εἰρημένον χωρίον τοῦ γ κύκλου. ἐγγεγράφθω δή, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θ ρ ξ, ἐλάσσων δὲ ὁ θ ε. δῆλον οὖν, τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐστὶ τοῦ γ κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν δὴ αἱ ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας ποτὶ τὸ θ, ἔστ' ἂν ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν πεσῶντι. πάλιν οὖν ἐντὶ τινὲς γραμμαὶ τῷ ἴσῳ * ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾶ μεγίστα. καὶ ἀναγεγράφονται ἀπὸ πασᾶν ὅμοιοι τομέες, ἀπό τε τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾶ μεγίστα. καὶ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾶ μεγίστα, μείζονές ἐντι ἢ τριπλάσιοι τῶν τομέων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐντὶ δὲ οἱ μὲν τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾶ μεγίστα ἴσοι τῷ α ζ η ι κύκλῳ, οἱ δὲ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ὑπὸ τᾶς μεγίστας, ἴσοι τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. μείζων ἄρα ὁ α ζ η ι κύκλος, ἢ τριπλασίων τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, τοῦ δὲ γ κύκλου τριπλασίων. μείζων ἄρα ἐστὶν ὁ γ κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ ἐλάσσων. οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ μεῖζον τὸ χωρίον, τὸ ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε θ, ἕλικος, καὶ τᾶς α θ εὐθείας, τοῦ γ κύκλου. ἴσον ἄρα ἐστὶ τῷ περιλαφθέντι ὑπὸ τᾶς ἕλικος, καὶ τᾶς α θ εὐθείας.



Χωρίον

Χωρίου ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς κε
δευτέρας τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς ποτὶ τὸν δεύτερον κύκλον, ὅνπερ ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ ἑπτὰ ποτὶ τὰ ιβ. ὅς ἐστι ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὰ συναμφότερα. τό τε περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ β κύκλου, καὶ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α κύκλου. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ β κύκλου, τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α κύκλου, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ β κύκλου. ἔστω δὲ τὸ μὲν θ σημεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ θε εὐθεῖα ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς ἁ πρώτα, ἁ δὲ αε ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς ἁ δευτέρα. ὁ δὲ κύκλος ὁ αζηι ὁ δεύτερος ἔστω. καὶ αἱ αη, ιζ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις. δεικτέον ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς αβγδεθ ἕλικος, καὶ τᾶς αε εὐθείας ποτὶ τὸν αζηι κύκλον, λόγον ἔχει, ὃν τὰ ἑπτὰ πρὸς ιβ. ἔστω δή τις κύκλος ὁ ς, ἁ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ς κύκλου δυνάμει ἴσα τῷ τε ὑπὸ τᾶν αθ, θε περιεχομένῳ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς αε τετραγώνου. ἕξει δὴ ὁ ς κύκλος πρὸς τὸν αηζι, ὡς ἑπτὰ πρὸς ιβ. διότι καὶ ἁ ἐκ τοῦ κέντρου αὐτοῦ πρὸς τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ αζηι κύκλου



ὅνπερ ἔχει δυνάμει τὸν λόγον. δειχθήσεται οὖν ἴσος ὁ ς κύκλος τῷ περιεχομένῳ χωρίῳ ὑπό τε τᾶς αβγδε ἕλικος, καὶ τᾶς αε εὐθείας. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω δὴ πρότερον εἰ δυνατόν, μείζων. δυνατὸν δή ἐστι περὶ τὸ χωρίον γεγράφθαι σχῆμα ἐπίπεδον, ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει ὁ ς κύκλος τοῦ χωρίου. περιγεγράφθω, καὶ ἔστω ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θακ τομεύς, ἐλάχιστος δὲ ὁ θολ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ περιγραφὲν σχῆμα, ἔλαττόν ἐστι τοῦ κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ εὐθεῖαι αἱ ποιοῦσαι ποτὶ τὸ θ ἴσας γωνίας ἔστ' ἂν ποτὶ τὰν τοῦ δευτέρου κύκλου περιφέρειαν πεσῶντι. ἐντὶ δὴ τινὲς γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, αἱ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσιν, ὧν ἐστὶ μεγίστα μὲν ἁ θα, ἐλαχίστα δὲ ἁ θε. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ αἱ ἀπὸ τοῦ θ, ἐπὶ τὰν τοῦ αζηι κύκλου περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσων ἑαυτᾶν, τῷ δὲ μεγέθει ἀλλάλαις τε ἴσαι καὶ τᾷ μεγίστᾳ. καὶ ἀναγεγράφαται ὅμοιοι τομέες ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ. καὶ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας, ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τᾶς θα ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν αθ, θε περιεχόμενον. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς αε τετραγώνου. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐντὶ δὲ τοῖς μὲν τομέσι τοῖς ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις καὶ τᾷ μεγίστᾳ, ἴσος ὁ αζη κύκλος, τοῖς δὲ τομέσι τοῖς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας ἴσον τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ὁ κύκλος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς αθ ποτὶ τὰ συναμφότερα. τό τε ὑπὸ τᾶν αθ, θε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς αε τετραγώνου. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θα, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν θα, αε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς αε τετραγώνου, τοῦτον ἔχει ὁ αζη κύκλος πρὸς τὸν ς κύκλον. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ὁ αζηι κύκλος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν ς κύκλον. ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν

ὁ ς̄ κύκλος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δὲ, ἀλλὰ μέζων. οὐκ ἄρα μέζων ἐστὶν ὁ ς̄ κύκλος τοῦ χωρίου τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶς α ε εὐθείας.

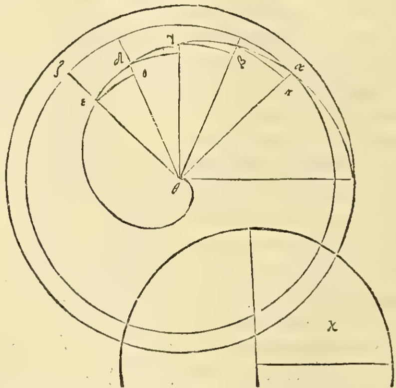
Οὐδὲ τοίνυν ἐλάσσων. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν ἐλάσσων. πάλιν οὖν δυνατόν ἐστιν εἰς τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος καὶ τᾶς α ε εὐθείας ἐγγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥς τε τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶς α ε εὐθείας, μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει τὸ αὐτὸ χωρίον τοῦ ς̄ κύκλου. ἐγγεγράφθω οὖν καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θ κ ρ τομεύς, ἐλάχιστος δὲ ὁ θ ε ο. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζόν ἐστι τοῦ ς̄ κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ποιοῦσαι ἴσας γωνίας πρὸς τὸ θ, ἔς τε τὰν ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν πεσοῦντι. πάλιν οὖν ἐντί τινες γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, αἱ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι. ὧν μεγίστα μὲν ἁ θ α, ἐλαχίστα δὲ ἁ θ ε. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ αἱ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι, τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσους αὐτᾶν, τῷ δὲ μεγέθει ἴσαι ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ. καὶ ἀναγεγράφαται ἀπό τε τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν ὅμοιοι τομέες, καὶ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ. οἱ ἄρα τομέες, οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ ποτὶ τοὺς τομέας τοὺς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας μείζονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ α ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε περιεχόμενον ὑπό τε τᾶν α θ, θ ε, καὶ τὸ τρίτον τοῦ ἀπὸ τᾶς ε α τετραγώνου. ἐστὶ δὲ τὸ μὲν τοῖς τομεῦσι τοῖς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ὑπὸ τᾶς μεγίστας ἴσον τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ χωρίῳ, τοῖς δὲ ἑτέροις ὁ κύκλος. μείζονα οὖν λόγον ἔχει ὁ α ζ η κύκλος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν θ α, θ ε. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς α ε τετραγώνου, τουτέστιν ὁ α ζ η ι κύκλος πρὸς τὸν ς̄ κύκλον. μείζων ἄρα ἐστὶν ὁ ς̄ κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ὅπερ ἀδύνατον. ἦν γὰρ ἐλάσσων. οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ ἐλάσσων ὁ ς̄ κύκλος τοῦ περιεχομένου χωρίου ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶς εὐθείας, ὥς τε ἴσος.

Διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δειχθήσεται, καὶ διότι τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν ὁποιᾳοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ταῖς περιφοραῖς λεγομένας, ποτὶ τὸν κύκλον τὸν ποτὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν λεγόμενον ταῖς περιφοραῖς λόγον ἔχει, ὃν συναμφότερον, τό τε ὑπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κύκλου, καὶ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κατὰ τὰν ἐλάσσονα τὰν περιφορὰν λεγομένου, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς ᾇ ὑπερέχει, ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τῶν εἰρημένων ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τῶν εἰρημένων.

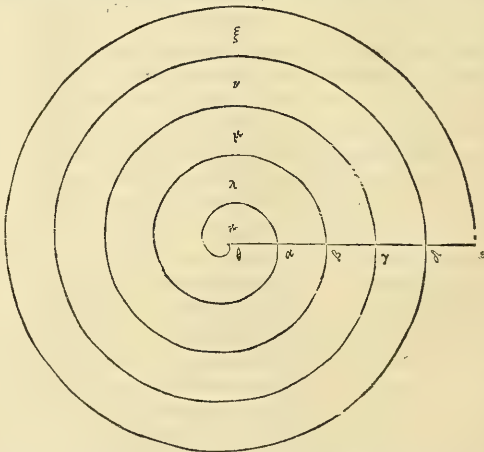
κϛ Τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος, ἅ ἐστιν ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας, οὐκ ἐχούσας πέρας τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ τὰν εὐθεῖαν τὰν ἀπὸ τῶν περάτων αὐτᾶς ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἀγμέναν, ποτὶ τὸν τομέα τὸν ἔχοντα τὰν μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴσαν τᾷ μείζονι τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἀγμέναν, τὰν δὲ περιφέρειαν ἅ ἐστι μεταξὺ

ταξὺ τᾶν εἰρημένων εὐθειᾶν ποτὶ τὰ αὐτὰ τᾷ ἕλικι, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα, τό τε περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων ποτὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἀγμενᾶν, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ μείζων τῶν εἰρημένων εὐθειῶν τᾶς ἐλάσσονος, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μείζονος τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων ποτὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἐπιζευχθεισᾶν. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς ἁ α β γ δ ε, ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας, πέρατα δὲ αὐτᾶς ἔστω τὰ α, ε. ἔστω δὲ ἀρχὰ τᾶς ἕλικος τὸ θ σημεῖον. καὶ κέντρῳ μὲν τὸ θ, διαστήματι δὲ τὸ θ α κύκλος γεγράφθω, καὶ συμπιπτέτω τᾷ περιφερείᾳ αὐτοῦ ἁ θ ε κατὰ τὸ ζ. δεικτέον ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶν εὐθειᾶν τᾶν α θ, θ ε ποτὶ τὸν τομέα τὸν α θ ζ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ε ζ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ α. ἔστω δὴ κύκλος, ἐν ᾧ ὁ σ χ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων ἴσαν δυνάμει τῷ τε ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ε ζ, ποτὶ δὲ τὸ κέντρον αὐτοῦ γωνία ἴσα τᾷ πρὸς τᾷ θ. ὁ δὴ τομεὺς ὁ σ χ ποτὶ τὸν τομέα τὸν θ α ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ε ζ τετραγώνου, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θ α τετράγωνον. αἱ γὰρ ἐκ τῶν κέντρων τοῦτον ἔχοντι τὸν λόγον δυνάμει ποτ' ἀλλάλας. δειχθήσεται δὴ ὁ χ σ τομεὺς ἴσος ὢν τῷ χωρίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶν α θ, θ ε εὐθειᾶν. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων, ἢ ἐλάσσων. ἔστω γὰρ πρότερον εἰ δυνατὸν μείζων. δυνατὸν δή ἐστι περὶ τὸ εἰρημένον χωρίον περιγράψαι σχῆμα, ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον. ὥστε τὸ περιγραφόμενον σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ εἰρημένου χωρίου ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ σ χ τομεὺς τοῦ εἰρημένου χωρίου. περιγεγράφθω δή, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, μείζων μὲν ὁ θ α η, ἐλάσσων δὲ ὁ θ ο δ. δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ χ σ τομέως. διήχθωσαν δὴ εὐθεῖαι αἱ ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας ποτὶ τὸ θ ἐν τὰν ποτὶ τὰν περιφέρειαν τοῦ θ α ζ τομέως πεσῶντι. ἐντὶ δή τινες εὐθεῖαι τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, αἱ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι. ὧν ἐστι μεγίστα μὲν ἁ θ α, ἐλαχίστα δὲ ἁ θ ε. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες ταύταν, τῷ μεγέθει ἴσαι ἀλλήλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, αἱ ἀπὸ τοῦ ποτὶ τὰν τοῦ α θ ζ τομέως περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι χωρὶς τᾶς θ ζ. καὶ ἀναγεγράφαται ὅμοιοι τομεῖς ἀπὸ πασᾶν. ἀπό τε τᾶν ἴσων ἀλλήλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, καὶ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, ἀπὸ δὲ τᾶς θ ε οὐκ ἀναγέγραπται. τομέες οὖν οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, ποτὶ τοὺς τομέας τοὺς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας τομέως ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ ἀπὸ τᾶς θ α ποτὶ τὰ συναμφότερα, τά τε ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ε ζ τετραγώνου. ἐστὶ δὲ τοῖς μὲν τομεῦσι τοῖς ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλήλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, ἴσος ὁ θ α ζ τομεύς. τοῖς δὲ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, τὸ περιγεγραμμένον. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ὁ θ α ζ τομεὺς ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ α ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν θ α, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ζ ε. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς θ α ποτὶ τὰ εἰρημένα, τοῦτον τὸν λόγον ἔχει ὁ θ α ζ τομεὺς ποτὶ τὸν χ σ τομέα. ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ὁ χ σ τομεὺς τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστιν δέ, ἀλλὰ μείζων. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὁ χ σ τομεὺς μείζων τοῦ περιεχομένου χωρίου, ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶν α θ, θ ε εὐθειᾶν.

Οὐδὲ τοίνυν ἐλάσσων. ἔστω γὰρ ἐλάσσων, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω. πάλιν δὴ δυνατόν ἐστιν εἰς τὸ χωρίον ἐγγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ εἰρημένον χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ αὐτὸ χωρίον τοῦ χ τομέως. ἐγγεγράφθω οὖν, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μείζων μὲν ὁ θβκ, ἐλάσσων δὲ ὁ θε. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ γεγραμμένον σχῆμα μεῖζόν ἐστι τοῦ χ τομέως. πάλιν οὖν ἐντί τινες γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, ὧν ἐστι μεγίστα μὲν ἁ θα, ἐλαχίστα δὲ ἁ θε. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν τοῦ θαζ τομέως περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι, χωρὶς τᾶς θα, τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες τῶν ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν. τῷ δὲ μεγέθει, ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ ἴσαι. καὶ ἀναγεγράφεται ἀπὸ τᾶς ἑκάστας ὅμοιοι τομέες. ἀπὸ δὲ τᾶν μεγίσταν τῶν ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, οὐκ ἀναγέγραπται. οἱ τομέες οὖν οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ ποτὶ τοὺς τομέας, τοὺς ἀπὸ τᾶν ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας, μείζονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θα ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν θα, θε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς εζ. ὥστε καὶ ὁ θαζ τομεὺς ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸν χ τομέα. ὥστε μείζων ὁ χ τομεὺς τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ ἐλάσσων. οὐκ ἔστιν οὐδὲ ἐλάσσων ὁ χ τομεὺς τοῦ περιεχομένου χωρίου, ὑπό τε τᾶς αβγδε ἕλικος, καὶ τᾶν αθ, θε εὐθειᾶν. ἴσα ἄρα.



κζ Τῶν χωρίων τῶν περιεχομένων ὑπό τε τᾶν ἑλίκων καὶ τᾶν εὐθειᾶν τᾶν ἐν τᾷ περιφορᾷ, τὸ μὲν γ τοῦ β διπλάσιόν ἐστι, τὸ δὲ δ τριπλάσιον, τὸ δὲ ε τετραπλάσιον. καὶ ἀεὶ τὸ ἑπόμενον κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς πολλαπλάσιον τοῦ δευτέρου χωρίου, τὸ δὲ α χωρίον ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ δευτέρου. ἔστω ἁ προκειμένα ἕλιξ ἔν τε τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, καὶ ἐν τᾷ δευτέρᾳ, καὶ ἐν ταῖς ἑπομέναις ὁποσαισοῦν. ἔστω ἀρχὰ μὲν τᾶς ἕλικος τὸ θ σημεῖον, ἁ δὲ θε εὐθεῖα ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. τῶν δὲ χωρίων ἔστω τὸ μὲν κ τὸ α, τὸ δὲ λ τὸ β, τὸ δὲ μ τὸ γ, τὸ δὲ ν τὸ δ, τὸ δὲ ξ τὸ ε. δεικτέον ὅτι τὸ μὲν κ χωρίον ς′ μέρος ἐστὶ τοῦ ἑπομένου. τὸ δὲ μ διπλάσιον τοῦ λ, τὸ δὲ ν τριπλάσιον τοῦ λ, καὶ τῶν ἑξῆς ἀεὶ τὸ ἑπόμενον πολλαπλάσιον τοῦ λ, κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμούς. ὅτι μὲν οὖν τὸ κ ς′ μέρος ἐστὶ τοῦ λ, ὧδε δείκνυται. ἐπεὶ δὲ



τὸ κλ χωρίον ποτὶ τὸν δεύτερον κύκλον δέδεικται τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ ἑπτὰ πρὸς τὰ ιβ,

ιβ. ὁ δὲ β κύκλος ποτὶ τὸν α κύκλον, ὡς ιβ ποτὶ τὰ τρία. δῆλον γάρ ἐστιν. ὁ δὲ α κύκλος ποτὶ τὸ κ χωρίον ἔχει ὡς γ πρὸς α. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ κ χωρίον τῷ λ. πάλιν δὲ ἐπεὶ τὸ κ λ μ χωρίον ποτὶ τὸν γ κύκλον, δέδεικται ὅτι τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον, τό τε ὑπὸ γθ, β, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γβ τετραγώνου, ποτὶ τὸ ἀπὸ γθ τετράγωνον. ὁ δὲ γ κύκλος ἔχει ποτὶ τὸν β κύκλον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς γθ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θβ. ὁ δὲ β κύκλος ἔχει ποτὶ τὸ κ λ χωρίον, ὃν τὸ ἀπὸ βθ τετράγωνον ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν βθ, θα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς αβ τετραγώνου. ταῦτα δὲ ἔχει λόγον πρὸς ἄλλαλα, ὃν ιθ ποτὶ τὰ ζ. ὥστε καὶ τὸ κ λ μ χωρίον ποτὶ τὸ λ κ χωρίον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ιθ ποτὶ τὰ ζ. αὐτὸ οὖν τὸ μ ποτὶ τὸ κ λ λόγον ἔχει, ὃν τὰ ιβ ποτὶ τὸ ζ. τὸ δὲ κ λ ποτὶ τὸ λ λόγον ἔχει, ὃν τὰ ζ ποτὶ τὰ ς. δῆλον οὖν ὅτι διπλάσιον ἐστὶ τὸ μ τοῦ λ. ὅτι δὲ τὰ ἑπόμενα τὸν τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν λόγον ἔχει, δειχθήσεται. τὸ γὰρ κ λ μ ν ξ ποτὶ τὸν κύκλον οὗ ἐστιν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ θε, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον, τό τε ὑπὸ τῶν εθ, θδ περιεχόμενον, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δε τετραγώνου, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θε τετράγωνον. ὁ δὲ κύκλος οὗ ἐστιν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ θε, ποτὶ τὸν κύκλον οὗ ἐστιν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ θδ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θε τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θδ τετράγωνον. ὁ δὲ κύκλος οὗ ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἁ δθ, ποτὶ τὸ κ λ μ ν χωρίον, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θδ τετράγωνον ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν θδ, θγ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δγ τετραγώνου. καὶ τὸ κ λ μ ν ξ ἄρα, ποτὶ τὸ κ λ μ ν λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν θε, θδ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δε, ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν δθ, θγ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δγ. διελόντι, καὶ τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ κ λ μ ν λόγον ἔχει, ὃν ἁ ὑπεροχή, τοῦ τε ὑπὸ εθ, θδ μετὰ τοῦ τρίτου μέρους τοῦ ἀπὸ τᾶς εδ, πρός τε τὸ ὑπὸ τῶν δθ, θγ. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δγ. ὑπερέχει δὲ τὰ συναμφότερα τῶν συναμφοτέρων, ᾧ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν εθ, θδ, τοῦ ὑπὸ τῶν δθ, θγ. ὑπερέχει δὲ τῷ ὑπὸ τῶν δθ, γε. τὸ ξ ἄρα ποτὶ τὸ κ λ μ ν λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν θδ, γε ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν δθ, θγ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γδ τετραγώνου. διὰ δὲ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται καὶ τὸ ν ποτὶ τὸ κ λ μ χωρίον, λόγον ἔχον τοῦτον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν θγ, βδ ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ γθ, β, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ γβ τετραγώνου. τὸ ν ἄρα ποτὶ τὸ κ λ μ ν χωρίον, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ θγ, βδ ποτὶ τὸ ὑπὸ θγ, θβ. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γβ. καὶ ἀνάπαλιν. ταῦτα δὲ ἴσα ἐντὶ τῷ τε ὑπὸ τᾶν δθ, θγ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς γδ τετραγώνου. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ξ χωρίον πρὸς τὸ κ λ μ ν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν θδ, γε ποτὶ τὰ συναμφότερα, τῷ τε ὑπὸ τᾶν δθ, γ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γδ τετραγώνου. τὰ δὲ κ λ μ ν ποτὶ τὸ ν ὄντα συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν δθ, γ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γδ τετραγώνου ποτὶ τὰ ὑπὸ τὰ θγ, δβ. ἔχει ἄρα καὶ τὸ ξ ποτὶ τὸ ν τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν θδ, γε, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν θγ, δβ. τὸ δὲ ὑπὸ τᾶν θδ, γε ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν θγ, δβ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ θδ ποτὶ τὰν θγ. ἐπεὶ ἴσαι ἐντὶ αἱ γε, βδ. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ ξ ποτὶ τὸ ν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ θδ ποτὶ τὰν θγ.

Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ τὸ ν ποτὶ τὸ μ τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἁ θγ ποτὶ τὰν θβ. καὶ τὸ μ ποτὶ τὸ λ, ὃν ἁ βθ ποτὶ τὸν αθ. αἱ δὲ εθ, δθ, γθ, βθ, αθ εὐθεῖαι, τὸν τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν λόγον ἔχοντι.

Εἴκα ἐπὶ τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν ὁποιαοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας δύο σημεῖα λαφθέωντι, μὴ τὰ πέ- κη
ρατα, ἀπὸ δὲ τῶν λαφθέντων σημείων ἐπιζευχθέωντι εὐθεῖαι ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ κέντρῳ μὲν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς ἕλικος, διαστήματι δὲ τοῖς ἀπὸ τῶν σημείων ἐπὶ τᾷ ἀρχᾷ τᾶς ἕλικος κύκλοι γραφέωντι, τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς μείζονος τᾶν περιφερειᾶν τᾶς μεταξὺ τᾶν εὐθειᾶν, καὶ τᾶς ἕλικος τᾶς μεταξὺ τᾶν αὐτᾶν εὐθειᾶν, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐκβληθείσας, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον ποτὶ τὸ ἀπολαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἐλάσσονος περιφερείας, καὶ τᾶς αὐτᾶς ἕλικος καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ πέρατα αὐτᾶν, ὃν ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου μετὰ δύο τριταμοριῶν τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου ἐλάσσονος κύκλου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου μετὰ ἑνὸς τριταμορίου τᾶς αὐτᾶς ὑπεροχᾶς. ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς ἁ αβγδ μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένα. καὶ λελάφθω ἐπ' αὐτᾶς δύο σημεῖα τὰ α, γ, ὥστε τὸ θ σημεῖον ἀρχὰν εἶμεν τᾶς ἕλικος. καὶ ἀπὸ τῶν α, γ, ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι ἐπὶ τὸ θ. καὶ κέντρῳ τῷ θ, διαστήματι δὲ τοῖς θα, θγ, κύκλοι γεγράφθωσαν. δεικτέον ὅτι τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ π τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἁ θα, καὶ δύο τριταμόρια τᾶς ηα, ποτὶ συναμφότερον τάν τε θα, καὶ ἓν τριταμόριον τᾶς ηα, τὸ γὰρ χωρίον τὸ ν π ποτὶ τὸν ηγθ τομέα, δέ-

δεικται

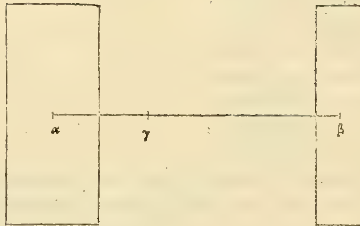
δείκνυται ἴσον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει τό τε ὑπὸ τᾶν κθ, αθ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ακ τετραγώνου, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κθ τετραγώνου, αὐτὸ ἄρα τὸ ξ ποτὶ τὸ νπ ἴσον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν θα κ μετὰ δύο τριταμοριῶν τοῦ ἀπὸ τᾶς κα τετραγώνου, ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν αθ κ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα. καὶ ἐπεὶ τὸ νπξ χωρίον ποτὶ τὸν νξ τομέα ἴσον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον, τό τε ὑπὸ τῶν θα, θκ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θκ τετραγώνον. ὁ δὲ νπξ τομεὺς ποτὶ τὸν ν τομέα ἴσον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θκ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θα. ἕξει καὶ τὸ νπ χωρίον ποτὶ τὸν ν τομέα, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον τό τε ὑπὸ θα, θκ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα, ποτὶ τὸ ἀπὸ θα. τὸ ἄρα νπ χωρίον πρὸς τὸ π λόγον ἔχει, ὃν συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν κθα. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα ποτὶ συναμφότερον, τό τε ὑπὸ τᾶν κα, θα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα τετραγώνου. ἐπεὶ οὖν τὸ ξ. χωρίον ποτὶ τὸν π ἴσον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον, τό τε ὑπὸ θα κ, καὶ δύο τριταμόρια τοῦ ἀπὸ τᾶς κα τετραγώνου ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν κθα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα. τὸ δὲ νπ χωρίον ποτὶ τὸ π ἴσον ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν κθα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα τετραγώνου, ποτὶ συναμφότερον, τό τε ὑπὸ τᾶν κα θ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα τετραγώνου. ἕξει καὶ τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ π, ἴσον τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν θα, κα, καὶ δύο τριταμόρια τοῦ ἀπὸ τᾶς κα, ποτὶ συναμφότερον, τό τε ὑπὸ τᾶν θα, κα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα. τὰ δὲ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν θα, κα, καὶ δύο τριταμόρια τοῦ ἀπὸ τᾶς κα, ποτὶ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν θα, κα καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα τετραγώνου, ἴσον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα, ἅτε θα καὶ δύο τριταμόρια τᾶς κα, ποτὶ συναμφοτέραν, τάν θα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τᾶς κα. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ ν χωρίον ἴσον ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμφότερα, ἅτε θα, καὶ δύο τριταμόρια τᾶς κα, ποτὶ συναμφότερον τάν θα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τᾶς κα.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΩΝ, Η ΚΕΝΤΡΑ ΒΑΡΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ.

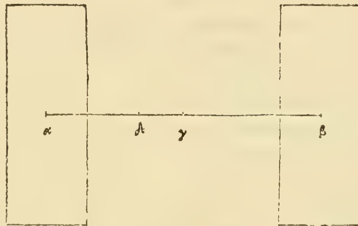
Αἰτούμεθα τὰ ἴσα βαρέα ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων ἰσοῤῥοπεῖν, τὰ δὲ ἴσα βαρέα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων μὴ ἰσοῤῥοπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος μάκεος. εἴκα βαρέων ἰσοῤῥοπεόντων ἀπό τινων μακέων ποτὶ τὸ ἕτερον τῶν βαρέων ποτιτεθῇ μὴ ἰσοῤῥοπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος ἐκείνω ᾧ ποτετέθη. ὁμοίως δὲ καὶ εἴκα ἀπὸ τοῦ ἑτέρου τῶν βαρέων ἀφαιρεθῇ τι, μὴ ἰσοῤῥοπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος ἐφ' οὗ οὐκ ἀφῃρέθη, τῶν ἴσων καὶ ὁμοίων σχημάτων ἐπιπέδων ἐφαρμοζομένων ἐπάλληλα, καὶ τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐφαρμόζῃ ἐπάλληλα. τῶν δὲ ἀνίσων, ὁμοίων δὲ τὰ κέντρα τῶν βαρέων ὁμοίως ἔσαι κείμενα. ὁμοίως δὲ λέγομεν σαμεῖα κέεσθαι ποτὶ τὰ ὅμοια σχήματα, ἀφ' ὧν ἐπὶ τὰς ἴσας γωνίας ἀγόμεναι εὐθεῖαι ποιῶντι γωνίας ἴσας ποτὶ τὰς ὁμολόγους πλευράς. εἴκα μεγέθεα ἀπό τινων μακέων ἰσοῤῥοπέωντι, καὶ τὰ ἴσα αὐτοῖς ἀπὸ τῶν αὐτῶν μακέων ἰσοῤῥοπήσει, παντὸς σχήματος οὗ ἁ περίμετρος ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλα ᾖ, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐντὸς εἶναι δεῖ τοῦ σχήματος. τούτων δὲ ὑποκειμένων, τὰ ἀπὸ ἴσων μακέων ἰσοῤῥοπέοντα βαρέα ἴσα ἐντί. εἰ γὰρ ἄνισα ἔσσεινται, ἀφαιρεθείσας ἀπὸ τοῦ μείζονος τᾶς ὑπεροχᾶς, τὰ λοιπὰ οὐκ ἰσοῤῥοπησοῦντι, ἐπειδὴ ἰσοῤῥοπεόντων ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἀφῄρηται. ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων βαρέα ἰσοῤῥοπέοντα, ἴσα ἐντὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἴσων

τῶν ἴσων μακέων ἄνισα βαρέα, οὐκ ἰσορροποῦντι, ἀλλὰ ῥέψει ἐπὶ τὸ μεῖζον, ἀφαιρεθείσας τᾶς ὑπεροχᾶς ἰσορροπησοῦντι, ἐπειδὴ τὰ ἴσα ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων ἰσορροπέοντι. ποτιτεθέντος οὖν τοῦ ἀφαιρεθέντος ῥέψει ἐπὶ τὸ μεῖζον, ἐπεὶ ἰσορροπεόντων τῷ ἑτέρῳ ποτιτεθείη.

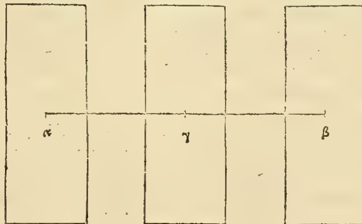
Τὰ ἄνισα βαρέα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων ἰσορροπησοῦντι, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος. ἔστω ἄνισα βαρέα τὰ α, β. καὶ ἔστω τὸ α, καὶ ἰσορροπέοντα ἀπὸ τῶν αγ, γβ μακέων. δεικτέον ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἁ αγ τᾶς γβ. μὴ γίνεται. ἔστω. ἀφαιρεθείσας δὲ τᾶς ὑπεροχᾶς ᾇ ὑπερέχει τὸ α τοῦ β. ἐπειδὴ ἰσορροπεόντων ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἀφήρηται, ῥέψει ἐπὶ τὸ β. οὐ ῥέψει δέ. εἴτε γὰρ ἴσα ἐστὶν ἁ γα τᾷ γβ, ἰσορροπησοῦντι γὰρ ἴσα ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων. εἴτε μείζων ἁ γα τᾶς γβ, ῥέψει ἐπὶ τὸ α. τὰ γὰρ ἴσα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων οὐκ ἰσορροπέοντι, ἀλλὰ ῥέπει ἀπὸ τοῦ μείζονος μάκεος. διὰ δὴ ταῦτα, ἐλάσσων ἐστὶν ἁ αγ τᾶς γβ. φανερὸν δὲ, ὅτι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων ἰσορροπέοντα, ἄνισά ἐντι, καὶ μείζων ἐστὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος. α



Εἴκα δύο ἴσα μεγέθεα, μὴ τὸ αὐτὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχοντι, τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἔσται τοῦ βάρεος τὸ μέσον τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τῶν μεγεθέων τὰ κέντρα τοῦ βάρεος. ἔστω τοῦ μὲν α κέντρον τοῦ βάρεος τὸ α, τοῦ δὲ β τὸ β. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἁ αβ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ γ. λέγω ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον ἐστὶ τὸ γ. εἰ γὰρ μὴ, ἔστω τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α, β μεγεθέων κέντρον τοῦ βάρεος τὸ δ, εἰ δυνατόν. ὅτι γὰρ ἐστὶν ἐπὶ τᾶς αβ, προδέδεικται. ἐπεὶ οὖν τὸ δ σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ ἐκ τῶν α, β συγκειμένου μεγέθεος, κατεχομένου τοῦ δ ἰσορροπήσει. τὰ ἄρα α, β μεγέθεα ἰσορροποῦντι ἀπὸ τῶν αδ, δβ μακέων, ὅπερ ἀδύνατον. τὰ γὰρ ἴσα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων οὐκ ἰσορροπέοντι. δῆλον οὖν τὸ ὅτι γ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος, τοῦ ἐκ τῶν α, β συγκειμένου μεγέθεος. β



Εἴκα τριῶν μεγεθέων τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἐπ᾽ εὐθείας ἔωντι κείμενα, καὶ τὰ μεγέθεα ἴσον βάρος ἔχοντι, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι ἔωντι, τοῦ ἐκ πάντων μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ σημεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου αὐτῶν κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος. ἔστω τρία μεγέθεα τὰ α, β, γ. κέντρα δὲ αὐτῶν τοῦ βάρεος, τὰ α, β, γ, σημεῖα ἐπ᾽ εὐθείας κείμενα. ἔστω δὲ τά τε α, β, γ ἴσα. καὶ αἱ αγ, γβ ἴσαι εὐθεῖαι. λέγω ὅτι τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ γ σαμεῖον. ἐπεὶ γὰρ τὰ α, β μεγέθεα ἴσον βάρος ἔχει, κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ γ σαμεῖον. ἐπειδὴ ἴσαι ἐντὶ αἱ αγ, γβ. ἐστὶ δὲ καὶ τοῦ γ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ γ σημεῖον, δῆλον ὅτι καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος. γ



Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ὁποσωνοῦν καὶ τῷ πλήθει περισσῶν μεγεθέων τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἐπ᾽ εὐθείας ἔωντι κείμενα, εἴκα τά τε ἴσον ἀπέχοντα, ἀπὸ τοῦ μέσου μεγέθεος

ἴσον βάρος ἔχωντι, καὶ αἱ εὐθεῖαι αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων αὐτῶν ἴσαι ἐῶντι, τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγέθεων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου αὐτῶν κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος. εἴκα καὶ ἄρτια ἐόντι τῷ πλήθει τὰ μεγέθεα, καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπ' εὐθείας ἐῶντι κείμενα, καὶ τὰ μέσα αὐτῶν ἴσον βάρος ἔχοντι, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι ἐῶντι, τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγέθεων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος, τὸ μέσον τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ βάρεος τῶν μεγέθεων, ὡς ὑπογέγραπται.

δ Τὰ σύμμετρα μεγέθεα ἰσορροπέωντι ἀπὸ μακέων ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς βάρεσιν. ἔστω σύμμετρα μεγέθεα τὰ α, β, ὧν κέντρα τὰ α, β. καὶ μᾶκος ἔστω τι τὸ εδ, καὶ ὡς τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως τὸ δγ μᾶκος πρὸς τὸ γε μᾶκος. δεικτέον ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α, β συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ γ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ α ποτὶ τὸ β, οὕτω τὸ δγ ποτὶ τὸ γε. τὸ δὲ α τῷ β σύμμετρον, καὶ τὸ γδ ἄρα τῷ γε σύμμετρον. τουτέστιν εὐθεῖα τᾷ εὐθείᾳ, ὥστε τῶν εγ, γδ ἐστὶ κοινὸν μέτρον. ἔστω δὴ τὸ ν, καὶ κείσθω τᾷ μὲν εγ ἴσα ἑκατέρα τῶν δη, δκ. τᾷ δὲ δγ ἴσα ἁ ελ. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἁ δη τᾷ γε, ἴσα καὶ ἁ δγ τᾷ εη, ὥστε καὶ ἁ λε ἴσα τᾷ εη. διπλασία ἄρα ἁ μὲν λη τᾶς δγ, ἁ δὲ ηκ τᾶς γε. ὥστε τὸ ν καὶ ἑκάτερον τῶν λη, ηκ μετρεῖ. ἐπειδήπερ καὶ τὰ ἥμισυ αὐτῶν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως ἁ δγ πρὸς γε. ὡς δὲ ἁ δγ πρὸς γε, οὕτως ἁ λη πρὸς ηκ. διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας. καὶ ὡς ἄρα τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως ἁ λη πρὸς ηκ. ὁσαπλασίων δ' ἐστὶν ἁ λη τᾶς ν, τοσαυταπλασίων ἔστω τὸ α τοῦ ζ. ἔστιν ἄρα ὡς ἁ λη πρὸς ν, οὕτως τὸ α πρὸς ζ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἁ κη πρὸς λη, οὕτως τὸ β πρὸς α. δι' ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς ἁ κη πρὸς ν, οὕτως τὸ β πρὸς ζ. ἰσάκις ἄρα πολλαπλασίων ἐστὶν ἁ κη τᾶς ν, καὶ τὸ β τοῦ ζ. ἐδείχθη δὲ τοῦ ζ καὶ τὸ α πολλαπλασίων ὄν, ὥστε τὸ ζ τῶν α, β κοινόν ἐστι μέτρον. διαιρεθείσας οὖν τᾶς μὲν λη εἰς τὰς τᾷ ν ἴσας, τοῦ δὲ α εἰς τὰ τῷ ζ ἴσα, τὰ ἐν τᾷ λη τμάματα ἰσομεγέθη τᾷ ν, ἴσα ἐστὶ τῷ πλήθει τοῖς ἐν τῷ α τμάμασιν ἴσοις οὖσι τῷ ζ. ὥστε αἴκ' ἐφ' ἕκαστον τῶν τμαμάτων τῶν ἐν τᾷ λη ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον τῷ ζ, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχον ἐπὶ μέσου τοῦ τμάματος, τά τε πάντα μεγέθεα ἴσα ἐντὶ τῷ α. καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ ε. ἄρτιά τε γάρ ἐστι τὰ πάντα τῷ πλήθει, διὰ τὸ ἴσαν εἶμεν τὰν λε τᾷ ηε. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι κἂν εἴκα ἐφ' ἕκαστον τῶν ἐν τᾷ κη τμαμάτων, ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον τῷ ζ, κέντρον τοῦ βάρεος ἔχον ἐπὶ τοῦ μέσου τοῦ τμάματος, τά τε πάντα μεγέθεα ἴσα ἐσσεῖται τῷ β, καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται τὸ δ. ἀλλ' οὖν τὸ μὲν α ἐπικείμενον κατὰ τὸ ε, τὸ δὲ β κατὰ τὸ δ. ἐσσεῖται δὴ μεγέθεα ἴσα ἀλλήλοις ἐπ' εὐθείας κείμενα, ὧν τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἴσα ἀπ' ἀλλήλων διεστάμεν συγκείμενα, ἄρτια τῷ πλήθει. δῆλον οὖν ὅτι τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἁ διχοτομία τᾶς εὐθείας τᾶς ἐχούσας τὰ κέντρα τῶν μέσων μεγεθέων. ἐπεὶ δὲ ἴσαι εἰσὶν ἁ μὲν λε τᾷ γδ, ἁ δὲ εγ τᾷ δκ, καὶ ὅλα ἄρα ἁ λγ ἴσα τᾷ γκ. ὥστε τοῦ ἐκ πάντων μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ γ σαμεῖον. τοῦ μὲν ἄρα α κειμένου κατὰ τὸ ε, τοῦ δὲ β κατὰ τὸ δ ἰσορροπησοῦντι κατὰ τὸ γ.

Καὶ

Καὶ τοίνυν εἴκα ἀσύμμετρα ἔωντι τὰ μεγέθεα, ὁμοίως ἰσορροπησοῦντι, ἀπὸ μακέων ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς μεγέθεσιν. ἔστω ἀσύμμετρα μεγέθεα τὰ α β, γ· μάκεα, τὰ δὲ δ ε, ε ζ. ἐχέτω δὲ τὸ α β ποτὶ τὸ γ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ τὸ ε δ ποτὶ τὸ ε ζ μᾶκος. λέγω ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α β, γ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ ε. εἰ γὰρ μή, ἰσορροπήσει τὸ α β τεθὲν ἐπὶ τῷ ζ, τῷ γ τεθέντι ἐπὶ τὸ δ, ἤτοι μεῖζόν ἐστι τὸ α β τοῦ γ, ὥστε ἰσορροπεῖν τῷ γ, ἢ οὔ. ἔστω μεῖζον. καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ α β ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ μεῖζόν ἐστι τὸ α β τοῦ γ, ὥστε ἰσορροπεῖν. ὥστε τὸ λοιπὸν τὸ α σύμμετρον εἶν τὸ γ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρά ἐστι τὰ α, γ μεγέθεα, καὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ α ποτὶ τὸ γ, ἢ ἁ δ ε πρὸς ε ζ, οὐκ ἰσορροπησοῦντι τὰ α, γ ἀπὸ τῶν δ ε, ε ζ μακέων, τεθέντος τοῦ μὲν α ἐπὶ τὸ ζ, τοῦ δὲ γ ἐπὶ τὸ δ. διὰ ταῦτα δὲ οὐδ' εἰ τὸ γ μεῖζόν ἐστιν, ἢ ὥστε ἰσορροπεῖν τὸ α. ε

Εἴκα ἀπό τινος μεγέθεος μέγεθος ἀφαιρεθῇ, μὴ τὸ αὐτὸ κέντρον ἔχον τῷ ὅλῳ, τοῦ λοιποῦ μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἐκβληθείσας τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τῶν βαρέων, τοῦ τε ὅλου μεγέθεος καὶ τοῦ ἀφῃρημένου ἐπὶ τὰ αὐτά, ἐφ' ὃ τὸ κέντρον τοῦ ὅλου μεγέθεος. καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς ἀπὸ τᾶς ἐκβληθείσας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ εἰρημένα κέντρα, ὥστε τὸ αὐτὸν ἔχειν λόγον πρὸς τὴν μεταξὺ τῶν κέντρων, ὃν ἔχει τὸ βάρος τοῦ ἀφῃρημένου μεγέθεος πρὸς τὸ τοῦ λοιποῦ βάρος, τὸ πέρας τᾶς ἀπολαφθείσας. ἔστω μεγέθεός τινος τοῦ α β κέντρον τοῦ βάρεος τὸ γ. καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ α β τὸ α δ. οὗτος κέντρον τοῦ βάρεος ἔστω τὸ ε. ἐπιζευχθείσας δὲ τᾶς ε γ, καὶ ἐκβληθείσας, ἀπολελάφθω ἁ γ ζ ποτὶ τὰν γ ε, λόγον ἔχουσα τὸν αὐτόν, ὃν ἔχει τὸ α δ μέγεθος ποτὶ τὸ δ η. δεικτέον ὅτι τοῦ δ η μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ ζ σημεῖον. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ θ σημεῖον. ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν α δ μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ ε, τοῦ δὲ δ η τὸ θ σημεῖον, τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α δ, δ η μεγεθέων, κέντρον τοῦ βάρεος ἔσσεται ἐπὶ τᾶς ε θ τμαθείσας, ὥστε τὰ τμάματα αὐτᾶς ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν λόγον τοῖς μεγέθεσιν, ὥστε οὐκ ἔσσεται τὸ γ σαμεῖον ἐπὶ τὰν ἀνάλογον τομὰν τᾶς εἰρημένας. οὐκ ἄρα ἐστὶ τὸ γ κέντρον τοῦ ἐκ τῶν α δ, δ η συγκειμένου μεγέθεος, τουτέστι τοῦ α β. ἐστὶ δέ. ὑπόκειται γάρ. οὐκ ἐστὶ ἄρα τὸ θ κέντρον βάρεος τοῦ δ η μεγέθους. ς

Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας, τὰς διχοτομίας, τὰς κατ' ἐναντίον τοῦ παραλληλογράμμου πλευράς. ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ α β γ δ. ἐπὶ δὲ τὰν διχοτομίαν τῶν α β, γ δ ἁ ε ζ. φημὶ δὴ ὅτι τοῦ α β γ δ παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔσται ἐπὶ τᾶς ε ζ. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν ἔστω τὸ θ. καὶ ἄχθω παρὰ τὰν α β ἁ θ ι. τᾶς δὲ δὴ ε β διχοτομουμένας αἰεὶ ἐσσεῖται ποκὰ καταλειπομένα ἐλάσσων τᾶς ι θ. καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα τῶν α ε, ε β εἰς τὰς τᾷ ε κ ἴσας. καὶ ἀπὸ τῶν ἐπὶ τὰς διαιρέσιας σαμείων ἄχθωσαν παρὰ τὰν ε ζ. διαιρεθήσεται δὴ τὸ ὅλον παραλληλόγραμμον εἰς παραλληλόγραμμα τὰ ἴσα καὶ ὅμοια τῷ κ ζ. τῶν οὖν παραλληλογράμμων τῶν ζ

ἴσων καὶ ὁμοίων τῷ κζ ἐφαρμοζομένων ἐπ' ἄλληλα, καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπ' ἄλληλα πεσοῦνται. ἐσσοῦνται δὴ μεγέθεά τινα παραλληλόγραμμα, ἴσα τῷ κζ, ἄρτια τῷ πλήθει. καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπ' εὐθείας κείμενα, καὶ τὰ μέσα ἴσα. καὶ πάντα τὰ ἐφ' ἑκάτερα τῶν μέσων, αὐτά τε ἴσα ἐντί, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι. τοῦ ἐκ πάντων αὐτῶν ἄρα συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον ἔσται τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ βάρεος τῶν μέσων χωρίων. οὐκ ἔστι δέ. τὸ γὰρ θ ἐκτός ἐστι τῶν μέσων παραλληλογράμμων. φανερὸν οὖν, ὅτι ἐπὶ τᾶς εζ εὐθείας τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ αβγδ παραλληλογράμμου.

η Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ αἱ διάμετροι συμπίπτοντι. ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ αβγδ, καὶ ἐν αὐτῷ ἁ εζ τέμνουσα τᾶς αβ, γδ. ἁ δὲ κλ τᾶς αγ, βδ. ἐστὶ δὴ τοῦ αβγδ παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εζ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. διὰ ταῦτα δὲ καὶ ἐπὶ τᾶς κλ. τὸ θ ἄρα σαμεῖον κέντρον τοῦ βάρεος. κατὰ δὲ τὸ θ, αἱ διάμετροι τοῦ παραλληλογράμμου πίπτοντι, ὥστε δέδεικται τὸ προτεθέν.

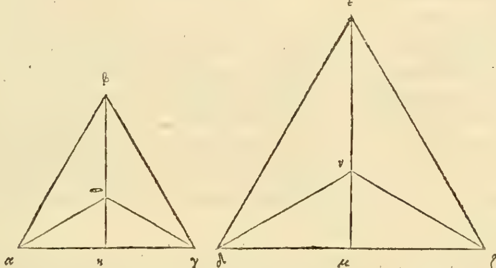
Ἐστὶ δὲ καὶ ἄλλως τὸ αὐτὸ δεῖξαι. ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ αβγδ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἁ δβ. τρίγωνα ἴσα ἐντί, καὶ ὅμοια ἀλλήλοις, ὥστε ἐφαρμοζομένων ἐπ' ἄλληλα τῶν τριγώνων, καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπ' ἄλληλα πεσοῦνται. ἔστω δὴ τοῦ αβδ τριγώνου, κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ε σαμεῖον. καὶ τετμήσθω δίχα ἁ δβ κατὰ τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἁ εθ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἀπειλήφθω ἁ ζθ ἴσα τᾷ θε. ἐφαρμοζομένου δὴ τοῦ αβδ τριγώνου ἐπὶ τὸ βδγ τρίγωνον, καὶ τεθεμένας τᾶς αβ πλευρᾶς ἐπὶ τὰν δγ, τᾶς δὲ αδ ἐπὶ τὰν βγ, ἐφαρμόζει καὶ ἁ θε εὐθεῖα ἐπὶ τὰν ζθ. καὶ τὸ ε σαμεῖον ἐπὶ τὸ ζ πεσεῖται. ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ αδγ τριγώνου. ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν αβδ τριγωνίου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ε σαμεῖον, τοῦ δὲ δβγ τὸ ζ. δῆλον ὡς τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ μέσον τᾶς εζ εὐθείας, ὅπερ ἐστὶ τὸ θ σαμεῖον.

θ Ἐὰν δύο τρίγωνα ὅμοια ἀλλήλοις ᾖ, καὶ ἐν αὐτοῖς σαμεῖα ὁμοίως κείμενα πρὸς τὰ τρίγωνα, καὶ τὸ ἐν σαμεῖον τοῦ ἐν ᾧ ἐστὶ τριγώνου κέντρον ᾖ τοῦ βάρεος, καὶ τὸ λοιπὸν σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος, τοῦ ἐν ᾧ ἐστὶ τριγώνου. ὁμοίως δὲ λέγομεν σαμεῖον κέεσθαι ποτὶ τὰ ὅμοια σχήματα, ἀφ' ὧν αἱ ἐπὶ τὰς ἴσας γωνίας ἀγόμεναι εὐθεῖαι, ἴσας ποιοῦσι γωνίας πρὸς ταῖς ὁμολόγοις πλευραῖς. ἔστω δύο τρίγωνα τὰ αβγ, δεζ. καὶ ἔστω ὡς ἁ αγ πρὸς δζ, οὕτως ἅ τε αβ πρὸς δε, καὶ ἁ βγ πρὸς εζ. καὶ ἐν τοῖς εἰρημένοις τριγώνοις σαμεῖα ὁμοίως κείμενα ἔστω τὰ θ, ν πρὸς τὰ αβγ, δεζ τρίγωνα. καὶ ἔστω

τὸ θ

τὸ θ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ αβγ τριγώνου. λέγω ὅτι καὶ τὸ ν κέντρον βάρεός ἐστι τοῦ δεζ τριγώνου. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ η κέντρον βάρεος τοῦ δεζ τριγώνου. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θα, θβ, θγ, δν, εν, ζν, δη, εη, ζη. ἐπεὶ οὖν ὅμοιόν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον τῷ δεζ τριγώνῳ, καὶ κέντρα τῶν βαρέων ἐστὶ τὰ θ, η σαμεῖα. τῶν δὲ ὁμοίων σχημάτων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ὁμοίως ἐντὶ κείμενα, ὥστε ἴσας ποιησοῦντι γωνίας πρὸς ταῖς ὁμολόγοις πλευραῖς, ἑκάστην ἑκάσταις. ἴση ἄρα ἁ ὑπὸ ηδε γωνία, τᾷ ὑπὸ θαβ. ἀλλὰ ἁ ὑπὸ θαβ γωνία ἴσα ἐντὶ τᾷ ὑπὸ εδν, διὰ τὸ ὁμοίως κεῖσθαι τὰ θν σημεῖα, καὶ ἁ ὑπὸ εδη γωνία ἄρα ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ εδν, ἁ μείζων τᾷ ἐλάσσονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οὐκ ἐστὶ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ δεζ τριγώνου τὸ ν σαμεῖον. ἐστὶν ἄρα τὸ ν σαμεῖον, ὅπερ.

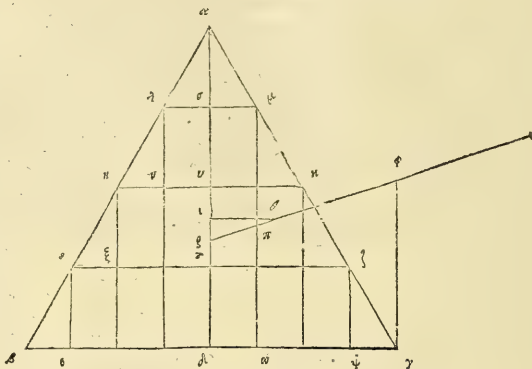
Εἴκα δύο τρίγωνα ὅμοια ἐῶντι, τοῦ δὲ ἑνὸς τριγώνου κέντρον ᾖ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας, ἃ ἐντὶ ἀ- ι
πό τινος γωνίας ἐπὶ μέσαν βάσιν ἀγομένα, καὶ τοῦ λοιποῦ τριγώνου τὸ κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ὁμοίας ἀγομένας γραμμᾶς. ἔστω δύο τρίγωνα, τὰ αβγ, δεζ. καὶ ἔστω ὡς ἁ αγ πρὸς δζ, οὕτως ἅ τε αβ πρὸς δε, καὶ ἁ βγ πρὸς ζε. καὶ τμαθείσας τᾶς αγ δίχα κατὰ τὸ η, ἐπιζεύχθω ἁ βη, καὶ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ αβγ τριγώνου, ἐπὶ τᾶς βη, τὸ θ. λέγω ὅτι καὶ τοῦ εδζ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς ὁμοίως ἀγομένας εὐθείας. τετμάσθω ἁ δζ δίχα κατὰ τὸ μ, καὶ ἐπιζεύχθω ἁ εμ καὶ γεγονέτω ὡς ἁ βη πρὸς βθ, οὕτως ἁ με πρὸς εν. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αθ, θγ, δν, νζ. ἐπεὶ ἐστὶ τᾶς μὲν γα, ἡμίσεια ἁ αη. τᾶς δὲ δζ, ἡμίσεια ἁ δμ. ἐστὶν ἄρα καὶ ὡς ἁ



βα πρὸς εδ, οὕτως ἁ αη πρὸς δμ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσι. ἴσα τε ἄρα ἐστὶν ἁ ὑπὸ αηβ, τᾷ ὑπὸ δμε. καὶ ἔστιν ὡς ἁ αη πρὸς δμ, οὕτως ἁ βη πρὸς εμ. ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ἁ βη πρὸς βθ, οὕτως ἁ με πρὸς εν. καὶ δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἁ αβ πρὸς δε, οὕτως ἁ βθ πρὸς εν. καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσι. εἰ δὲ τοῦτο, ἴσα ἐστὶ ἁ ὑπὸ βαθ γωνία τᾷ ὑπὸ εδν, ὥστε καὶ λοιπὰ ὑπὸ θαγ γωνία ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ νδζ γωνίᾳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἁ μὲν ὑπὸ βγθ γωνία ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ εζν. ἁ δὲ ὑπὸ θγη, τᾷ ὑπὸ νζμ ἴσα. ἐδείχθη δὲ καὶ ἁ ὑπὸ αβθ τᾷ ὑπὸ δεμ ἴσα, ὥστε καὶ λοιπὰ ἁ ὑπὸ θβγ γωνία ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ νεζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ πάντα ὁμοίως κεῖται τὰ θ, ν σαμεῖα ποτὶ ὁμολόγους πλευράς, καὶ ἴσας γωνίας ποιεῖ. ἐπεὶ οὖν ὁμοίως κεῖται τὰ θν σαμεῖα. καὶ ἐστὶ τὸ θ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ αβγ τριγώνου, καὶ τὸ ν ἄρα κέντρον βάρεος τοῦ δεζ.

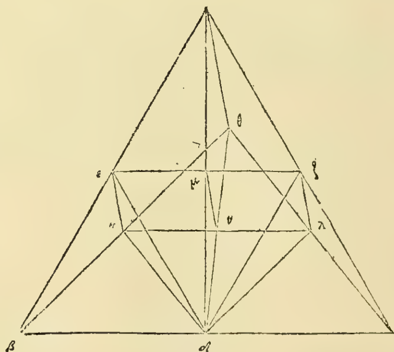
Παντὸς τριγώνου τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας, ἃ ἐστὶν ἐκ τᾶς γωνίας ἐπὶ μέσαν ια
ἀναγομένα τὰν βάσιν. ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ. καὶ ἐν αὐτῷ ἁ αδ ἐπὶ μέσαν τὰν βγ βάσιν. δεικτέον ὅτι ἐπὶ τᾶς αδ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ αβγ. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν ἔστω τὸ θ, καὶ δι' αὐτοῦ παρὰ τὰν βγ ἄχθω ἁ θι, ἁ εἴδη δίχα τεμνομένας τᾶς δγ ἔσται ἀποκα ἁ καταλειπομένα ἐλάσσων τᾶς θι. καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα τῶν βδ, δγ εἰς τὰς ἴσας. καὶ διὰ τῶν τομῶν παρὰ τὰν αδ ἄχθωσαν καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εζ, ηκ, λμ. ἐσσοῦνται δὴ αὗται παρὰ τὰν βγ. τοῦ δὴ παραλληλογράμμου τοῦ μὲν μν, τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος, ἐπὶ τᾶς υσ. τοῦ δὲ κξ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς τυ. τοῦ δὲ ζο, ἐπὶ τᾶς τδ. τοῦ ἄρα ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς σδ εὐθείας. ἔσται δὴ τὸ ρ. καὶ ἐπιζεύχθω ἁ ρθ, καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν αδ ἁ γφ. τὸ δὴ αδγ τρίγωνον ποτὶ πάντα τὰ τρίγωνα τὰ ἀπὸ τῶν αμ, μκ, κζ, ζγ ἀναγεγραμμένα ὅμοια τῷ αδγ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ γα πρὸς αμ. διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς αμ, μκ, κζ, ζγ. ἐπεὶ δὲ καὶ τὸ αδβ τρίγωνον ποτὶ πάντα τὰ ἀπὸ τῶν αλ, λη, ηε, εβ ἀναγεγραμμένα ὅμοια τρίγωνα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ βα πρὸς αλ. τὸ ἄρα αβγ τρίγωνον ποτὶ πάντα τὰ εἰρημένα τρίγωνα τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ γα πρὸς αμ. ἀλλὰ ἁ γα πρὸς αμ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἁ φρ πρὸς ρθ. ὁ γὰρ τᾶς γα πρὸς αμ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὅλας τᾶς φρ πρὸς ρπ, διὰ τὸ ὅμοια εἶναι τὰ τρίγωνα. καὶ τὸ αβγ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὰ εἰρημένα μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἁ φρ πρὸς ρθ. ὥς τε

καὶ διελόντι τὰ μν, κξ, ζο παραλληλόγραμμα πρὸς τὰ καταλειπόμενα τρίγωνα, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἁ φθ πρὸς θρ. γεγονέτω οὖν ἐν τῷ τῶν παραλληλογράμμων πρὸς τὰ τρίγωνα λόγῳ ἁ χθ πρὸς θρ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶ τὸ μέγεθος τὸ αβγ, οὗ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ θ. καὶ ἀφῄρηται ἀπ' αὐτοῦ μέγεθος τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν μν, κξ, ζο παραλληλογράμμων, καὶ ἐστὶ τοῦ ἀφῃρημένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ρ σημεῖον, τοῦ ἄρα λοιποῦ μεγέθεος τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν περιλειπομένων τριγώνων κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ τᾶς ρθ εὐθείας ἐκβληθείσας, καὶ ἀπολαφθείσας ἐπὶ ταὶ θρ, τὰν ἐχούσας τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἀφαιρεθὲν μέγεθος ποτὶ τὸ λοιπόν. τὸ ἄρα χ σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ συγκειμένου μεγέθεος ἐκ τῶν περιλειπομένων, ὅπερ ἀδύνατον. τᾶς γὰρ διὰ τοῦ χ εὐθείας παρὰ ταὶ αδ ἀγομένας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐπὶ ταῦτα πάντα ἐντί, τουτέστιν ἐπὶ θάτερον μέρος. δῆλον οὖν τὸ προτεθέν.



ΑΛΛΩΣ ΤΟ ΑΥΤΟ.

Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ ἄχθω ἁ αδ ἐπὶ μέσαν ταὶ βγ, λέγω ὅτι ἐπὶ τᾶς αδ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ αβγ τριγώνου. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν ἔστω τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν, αἱ τε αθ, θβ, θγ. καὶ αἱ εδ, ζε ἐπὶ μέσας τὰς βα, αγ. καὶ παρὰ ταὶ αθ ἄχθωσαν αἱ εκ, ζλ. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ κλ, λδ, δκ, δθ, μν. ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον τῷ δζγ τριγώνῳ, διὰ τὸ παράλληλον εἶν τὸν βα τᾷ ζδ. καὶ ἐστὶ τοῦ αβγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ θ σαμεῖον. καὶ τοῦ ζδγ ἄρα τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ λ σημεῖον. ὁμοίως γὰρ αὐτικείμενα τὰ θ, λ σαμεῖα ἐν ἑκατέρῳ τῶν τριγώνων. ἐπειδήπερ πρὸς τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἴσας ποιοῦντι γωνίας. φανερὸν γὰρ τοῦτο. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῦ εβδ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ κ σαμεῖον. ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν εβδ, ζδγ τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος ἐστίν, ἐπὶ μέσας τᾶς κλ εὐθείας. ἐπειδήπερ ἴσα ἐντὶ τὰ εβδ, ζδγ τρίγωνα. καὶ ἐστὶ τᾶς κλ μέσον τὸ ν. ἐπεί ἐστιν ὡς ἁ βε πρὸς εα, οὕτως ἁ βκ πρὸς θκ. ὡς δὲ ἁ γζ πρὸς ζα, οὕτως ἁ γλ πρὸς λθ. εἰ δὲ τοῦτο, ἐστὶν ἁ βγ τᾷ κλ παράλληλος. καὶ ἐπέζευκται ἁ δθ. ἐστὶν ἄρα ὡς ἁ βδ πρὸς δγ, οὕτως ἁ κν πρὸς ταὶ νλ. ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν εἰρημένων τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τὸ ν. ἐστὶ δὲ καὶ τοῦ αε, δζ παραλληλογράμμου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ μ σαμεῖον, ὥστε τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ τὰς μν εὐθείας. ἐστὶ δὲ καὶ τοῦ αβγ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ θ σαμεῖον. ἁ μν ἄρα ἐκβαλλομένα πο



ρεύεται

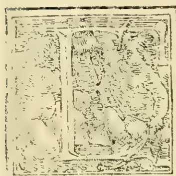
ρεῦνται διὰ τοῦ θ σαμείου, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ κέντρον τοῦ βάρεος, τοῦ αβγ τριγώνου, οὐκ ἐστὶν ἐπὶ τᾶς αδ εὐθείας. ἔστιν ἄρα ἐπ' αὐτᾶς.

Παντὸς τριγώνου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ συμπίπτοντι τοῦ τριγώνου αἱ ἐκ τῶν ιβ
γωνιῶν ἐπὶ μέσας τὰς πλευρὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι. ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ ἄχθω ἁ μὲν αδ ἐπὶ μέσαν τὰν βγ. ἁ δὲ βε ἐπὶ μέσαν τὰν αγ. ἐπεὶ δὴ τοῦ αβγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος, ἐφ' ἑκατέρας τῶν αδ, βε. δέδεικται γὰρ τοῦτο, ὥστε τὸ θ σαμεῖον, κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν.

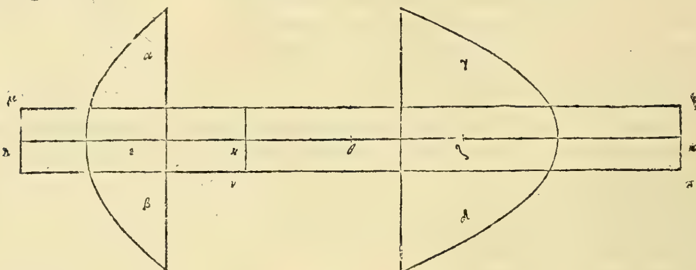
Παντὸς τραπεζίου τὰς δύο πλευρὰς ἔχοντος παραλλήλους ἀλλήλαις, τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς διχοτομίας τῶν παραλλήλων διαιρεθείσας, ὥστε τὸ τμᾶμα αὐτᾶς τὸ πέρας ἔχον τὰν διχοτομίαν τᾶς ἐλάσσονος τῶν παραλλήλων ποτὶ τὸ λοιπὸν τμᾶμα τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἁ ἴσα τᾶς διπλασίας τᾶς μείζονος μετὰ τᾶς ἐλάσσονος, πρὸς τὰν διπλασίαν τᾶς ἐλάσσονος μετὰ τᾶς μείζονος τῶν παραλλήλων. ιγ

ἔστω τραπέζιον τὸ αβγδ παραλλήλους ἔχον τὰς αδ, βγ. ἁ δὲ εζ ἐπιζευγνυέτω τὰς διχοτομίας τᾶν αδ, βγ. ὅτι οὖν ἐπὶ τᾶς εζ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ τραπεζίου, φανερόν. ἂν γὰρ ἐκβάλῃς τὰς γδη, ζεη, βαη, δῆλον ὅτι ἐπὶ τὸ αὐτὸ σαμεῖον ἔρχονται. ἔσται τὸ τοῦ ηβγ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ηζ. καὶ ὁμοίως τοῦ αηδ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος, ἐπὶ τᾶς εη. καὶ λοιποῦ ἄρα τοῦ αβγδ τραπεζίου κέντρον τοῦ βάρεος ἔσται ἐπὶ τᾶς εζ. ἐπιζευχθεῖσα δὲ ἁ βδ διῃρήσθω εἰς τρία ἴσα κατὰ τὰ κ, θ σαμεῖα, καὶ δι' αὐτῶν παρὰ τὰν βγ ἄχθωσαν αἱ λθμ, νκτ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δζ, βε, οξ. ἔσται δὴ τοῦ μὲν δβγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς θμ. ἐπειδήπερ τρίτον μέρος ἁ θβ τᾶς βδ, καὶ διὰ τοῦ θ σαμείου παράλληλος τᾷ βάσει ἦκται ἁ μθ. ἔστι δὲ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ δβγ τριγώνου, καὶ ἐπὶ τᾶς δζ. ὥστε τὸ ξ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ εἰρημένου τριγώνου. διὰ ταῦτα δὲ καὶ τὸ ο σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ αβδ τριγώνου. τοῦ ἄρα ἐξ ἀμφοτέρων τῶν αβδ, βδγ τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος, ὅπερ ἐστὶ τραπέζιον κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς οξ εὐθείας, ἐστὶ δὲ τοῦ εἰρημένου τραπεζίου κέντρον τοῦ βάρεος καὶ ἐπὶ τᾶς εζ. ὥστε τοῦ αβγδ τραπεζίου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ π σαμεῖον. ἔχοι δ' ἂν τὸ βγδ τρίγωνον πρὸς τὸ αβδ λόγον, ὃν ἁ οπ πρὸς πξ. ἀλλ' ὡς τὸ βδγ τρίγωνον πρὸς τὸ αβδ τρίγωνον, οὕτως ἐστὶ ἁ βγ πρὸς αδ. ὡς δὲ ἁ οπ πρὸς πξ, οὕτως ἁ πρ πρὸς πσ. καὶ ὡς ἄρα ἁ βγ πρὸς αδ, οὕτως ἁ ρπ πρὸς πσ. ὥστε καὶ ὡς δύο αἱ βγ μετὰ τᾶς αδ, πρὸς δύο τὰς αδ, μετὰ τᾶς βγ, οὕτως δύο αἱ ρπ μετὰ τᾶς πσ, πρὸς δύο τὰς πσ, μετὰ τᾶς πρ. ἀλλὰ δύο μὲν αἱ ρπ μετὰ τᾶς πσ, συναμφότερος ἐστὶν ἁ σρπ, τουτέστιν ἁ πε. δύο δὲ αἱ πσ μετὰ τᾶς πρ, συναμφότερος ἐστὶν ἁ ρπσ, τουτέστιν ἁ πζ. δέδεικται ἄρα τὰ προτεθέντα.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΚΩΝ Β.

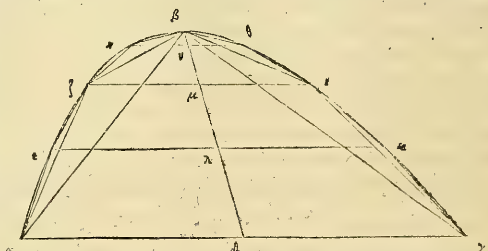


α Εἴκα δύο χωρία περιεχόμενα ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἃ δυνάμεθα παρὰ τὰν δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβαλεῖν, μὴ τὸ αὐτὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχοντα, τοῦ δὲ ἀμφοτέρων αὐτῶν συγκειμένου μεγέθεος, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν, διαιρέων οὕτως τὰν εἰρημέναν εὐθεῖαν, ὥστε τὰ τμάματα αὐτᾶς ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν τοῖς χωρίοις. ἔστω δύο χωρία τὰ αβ, γδ, οἷα εἴρηται. κέντρα δὲ αὐτῶν τοῦ βάρεος τὰ ε, ζ σαμεῖα, ὃν ἔχει λόγον τὸ αβ ποτὶ τὸ γδ, τοῦτον ἐχέτω ἁ ζθ πρὸς θε. δεικτέον ὅτι τοῦ δὲ ἀμφοτέρων τῶν αβ, γδ χωρίων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ θ σαμεῖον, ἔστω δὲ τᾷ μὲν εθ ἑκατέρα ἴσα τῶν ζη, ζκ, τᾷ δὲ ζθ, τουτέστι τᾷ ηε ἴσα ἁ ελ. ἔσται καὶ ἁ λθ τᾷ κθ ἴσα. καὶ



ἔτι ὡς ἁ λη πρὸς ηκ, οὕτως τὸ αβ πρὸς γδ. διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας. παραβεβλήσθω δὴ παρὰ τὰν λη τὸ σαμεῖον τοῦ αβ ἐφ' ἑκάτερα τᾶς λη. ὥστε εἰ μὲν τὸ μν ἴσον τῷ αβ. ἔσται διὰ τοῦ μν κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ε σαμεῖον. συμπεπληρώσθω δὴ τὸ νξ. ἕξει δὲ τὸ μν πρὸς τὸ νξ λόγον, ὃν ἁ λη πρὸς ηκ. ἔχει δὲ καὶ τὸ αβ πρὸς τὸ γδ, τὸν τᾶς λη πρὸς ηκ λόγον. καὶ ὡς ἄρα τὸ αβ πρὸς γδ, οὕτως τὸ μν πρὸς τὸ νξ. καὶ ἐναλλάξ. ἴσον δὲ τὸ αβ τῷ μν. ἴσον ἄρα καὶ τὸ γδ τῷ νξ. καὶ κέντρον ἐστὶν αὐτοῦ τοῦ βάρεος τὸ ζ σαμεῖον. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶν ἁ λθ τᾷ λκ, καὶ ὅλα ἁ λκ τᾶς ἀπεναντίον πλευρᾶς δίχα τέμνει, τοῦ ὅλου τοῦ πμ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ θ σαμεῖον, ἀλλὰ τὸ μπ ἴσον τῷ δὲ ἀμφοτέρων τῶν μν, νξ. καὶ τοῦ δὲ ἀμφοτέρων τῶν αβ, γδ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ θ σαμεῖον.

Εἴκα εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τρίγωνον ἐγγραφῆ, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον, καὶ πάλιν εἰς τὰ καταλειπόμενα τμάματα τρίγωνα ἐγγραφέωντι τὰς αὐτὰς βάσεις ἔχοντα τοῖς τμημάτεσι, καὶ ὕψος ἴσον, καὶ ἀεὶ εἰς τὰ καταλειπόμενα τμάματα τρίγωνα ἐγγραφέωντι τὸν αὐτὸν τρόπον, τὸ γενόμενον σχῆμα ἐν τῷ τμάματι γνωρίμως ἐγγράφεσθαι λεγέσθω. φανερὸν δὲ ὅτι τοῦ οὕτως ἐγγραφέντος σχήματος, αἱ τὰς γωνίας ἐπιζευγνύουσαι, τᾶς τε ἔγγιστα ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμάματος καὶ τὰς ἑξῆς, παρὰ τὰν βάσιν ἐσσοῦνται τοῦ τμάματος. καὶ δίχα τμαθήσονται ὑπὸ τᾶς τοῦ τμάματος διαμέτρου, καὶ τὰν διάμετρον οὕτως εἰς τοὺς τῶν ἑξῆς περισσῶν ἀριθμῶν λόγους, ἑνὸς λεγομένου ποτὶ τᾷ κορυφᾷ τοῦ τμάματος, τοῦτο δὲ δείκνυται ἐν ταῖς τάξεσιν.

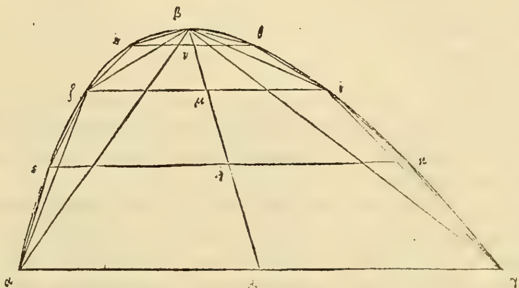


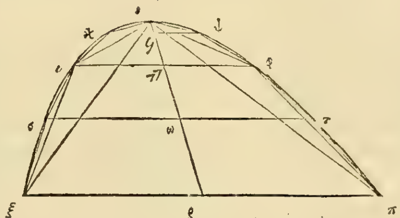
β Εἰ δὲ καὶ εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς εὐθύγραμμον γνωρίμως ἐγγραφῆ, τοῦ ἐγγραφέντος κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τοῦ τμάματος διαμέτρου. ἔστω τμᾶμα τὸ αβγ, οἷον εἴρηται. καὶ

ἐγγε-

ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ εὐθύγραμμον γνωρίμως τὸ αεζηβθικγ. διάμετρος δὲ τοῦ τμήματος ἔστω ἁ βδ. δεικτέον ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ εὐθυγράμμου ἐστὶν ἐπὶ τᾶς βδ. ἐπεὶ γὰρ τοῦ μὲν αεκγ τραπεζίου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς λδ ἐστί, τοῦ δὲ εζικ τραπεζίου τὸ κέντρον ἐπὶ τᾶς μλ. τοῦ δὲ ζηθι τραπεζίου τὸ κέντρον ἐπὶ τᾶς μν. ἔτι δὲ καὶ τοῦ ηβθ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς βν. δῆλον ὅτι καὶ τοῦ ὅλου εὐθυγράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς βδ ἐστίν.

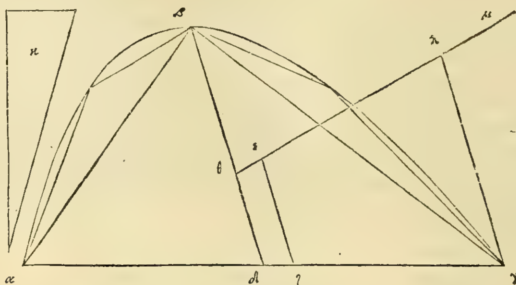
Εἴκα δύο τμαμάτων ὁμοίων περιεχομένων ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς εἰς ἑκάτερον εὐθύγραμμον ἐγγραφῇ γνωρίμως, ἔχωντι δὲ τὰ ἐγγραφέντα εὐθύγραμμα τὰς πλευρὰς ἴσας τῷ πλήθει ἀλλάλαις, τῶν εὐθυγράμμων τὰ κέντρα τῶν βαρέων, ὁμοίως τέμνοντι τὰς διαμέτρους τῶν τμαμάτων. ἔστω δύο τμάματα τὰ αβγ, ξοπ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὰ εὐθύγραμμα γνωρίμως καὶ τὰν πᾶσαν πλευρὰν τὸν ἀριθμὸν ἐχόντων ἀλλήλοις ἴσον. διάμετροι δὲ ἔστωσαν τῶν τμαμάτων αἱ βδ, ορ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εκ, ζι, ηθ. καὶ στ, υφ, χψ. ἐπεὶ οὖν ἅ τε βδ διαιρεῖται ὑπὸ τῶν παραλλήλων εἰς τοὺς τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν περισσοὺς λόγους, καὶ ἁ ορ, ὁμοίως καὶ τῷ πλήθει τὰ τμάματα αὐτῶν ἴσα ἐντί, δῆλον ὡς τά τε τμάματα τῶν διαμέτρων τοῖς αὐτοῖς λόγοις ἐσσεῖται. καὶ αἱ παράλληλοι τοὺς αὐτοὺς λόγους ἑξοῦνται. καὶ τῶν τραπεζίων, τοῦτε αεκγ. καὶ τοῦ ξστπ τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐσσεῖται ἐπὶ τῶν λδ, ωρ εὐθειῶν ὁμοίως κείμενα, ἐπεὶ τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον αἱ αγ, εκ ταῖς ξπ, στ. πάλιν δὴ καὶ τῶν εζικ, συφτ τραπεζίων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐσσοῦνται, ὁμοίως διαιρέοντα τὰς λμ, ωϟ. καὶ ἐν τοῖς ζθ, υψ τραπεζίοις τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐσσοῦνται ὁμοίως διαιρέοντα τὰς μν, ϟϛ. ἔσαι δὲ καὶ τῶν ηβθ, χοψ τριγώνων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐπὶ τῶν βν, οϛ ὁμοίως κείμενα. ἔχωντι δὲ αὐτὸν λόγον τὰ τραπέζια καὶ τὰ τρίγωνα, δῆλον οὖν ὅτι τοῦ ὅλου εὐθυγράμμου τοῦ ἐν τῷ αβγ τμάματι γεγραμμένου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ὁμοίως διαιρεῖ τὰν βδ. καὶ τοῦ ἐν τῷ ξοπ τμάματι ἐγγεγραμμένου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τὰν ορ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. γ





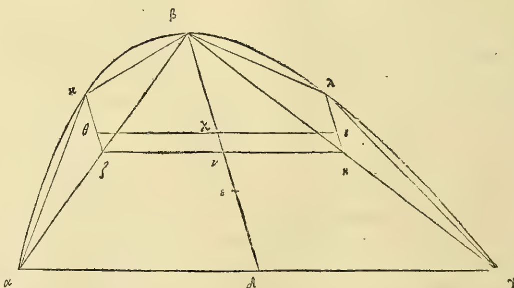
Παντὸς τμάματος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς τοῦ τμάματος διαμέτρου. ἔστω τμᾶμα ὡς εἴρηται τὸ αβγ, οὗ διάμετρος ἔστω ἁ βδ. δεικτέον ὅτι τοῦ εἰρημένου τμάματος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς βδ. εἰ γὰρ μή, ἔστω τὸ ε. καὶ δι' αὐτοῦ ἄχθω παρὰ τὰν βδ ἁ εζ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τμᾶμα τρίγωνον τὸ αβγ, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον καὶ ὕψος ἴσον. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ γζ πρὸς δζ, τοῦτον ἐχέτω τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὸ κ χωρίον. ἐγγεγράφθω δὲ καὶ εὐθύγραμμον εἰς τὸ τμᾶμα γνωρίμως. ὥστε τὰ περιλειπόμενα τμάματα ἐλάσσονα εἶναι τοῦ κ. τοῦ δὴ ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ τᾶς βδ. ἔστω τὸ θ. καὶ ἐπεζεύχθω ἁ θε, καὶ ἐκβεβλήσθω. καὶ παρὰ τὰν βδ ἄχθω ἁ γλ. δῆλον δὲ ὅτι μείζονα λόγον ἔχει τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τῷ τμάματι ποτὶ τὰ λειπόμενα τμάματα, ἢ τὸ αβγ τρίγωνον ποτὶ τὸ κ. ἀλλ' ἐστὶ ὡς τὸ αβγ τρίγωνον ποτὶ τὸ κ, οὕτως ἁ γζ πρὸς ζδ. καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον πρὸς τὰ περιλειπόμενα τμάματα μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ γζ πρὸς ζδ, τουτέστιν ἁ λε πρὸς εθ. ἐχέτω οὖν ἁ με πρὸς εθ τὸν αὐτὸν λόγον τοῦ ἐγγεγραμ- δ

μένου πρὸς τὰ τμάματα. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν Ε κέντρον τοῦ ὅλου τμάματος, τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου ἐν αὐτῷ εὐθυγράμμου τὸ Θ, δῆλον ὅτι λοιποῦ τοῦ συγκειμένου μεγέθεος ἐκ τῶν περιλειπομένων τμαμάτων τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐκβληθείσας τᾶς ΘΕ, καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς εὐθείας, ἃ λόγον ἔχει ποτὶ τὰν ΘΕ, ὃν τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον πρὸς τὰ



περιλειπόμενα τμάματα. ὥς τε εἴη κατὰ τοῦ συγκειμένου μεγέθεος ἐκ τῶν περιλειπομένων τμαμάτων, κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Μ σαμεῖον, ὅπερ ἄτοπον. τὰ γὰρ διὰ τοῦ Μ παρὰ τὰν ΒΔ ἀγομένας, ἐπὶ ταῦτα ἐσσοῦντι πάντα τὰ περιλειπόμενα τμάματα. δῆλον οὖν, ὅτι ἐπὶ τᾶς ΒΔ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος.

ε Εἴκα εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, εὐθύγραμμον ἐγγραφῇ γνωρίμως, τὸ τοῦ ὅλου τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐγγύτερον ἐστὶ τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμάματος, ἢ τὸ τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου κέντρον. ἔστω τὸ ΑΒΓ τμᾶμα, οἷον εἴρηται. διάμετρος δὲ αὐτοῦ, ἁ ΔΒ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον πρῶτον γνωρίμως τὸ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω ἁ ΒΔ κατὰ τὸ Ε. ὥς τε εἶμεν διπλασίαν τὰν ΒΕ τᾶς ΕΔ, ἔστιν οὖν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Ε σαμεῖον. τετμάσθω δὴ δίχα ἑκατέρα τᾶν ΑΒ, ΒΓ, κατὰ τὰ Ζ, Η. καὶ διὰ τᾶν Ζ, Η παρὰ τὰν ΒΔ ἄχθωσαν αἱ ΖΚ, ΛΗ. ἔσται ἄρα τοῦ μὲν ΑΚΒ τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΖΚ. τοῦ δὲ ΒΓΛ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΗΛ. ἔστω δὲ τὰ Θ, Ι. καὶ

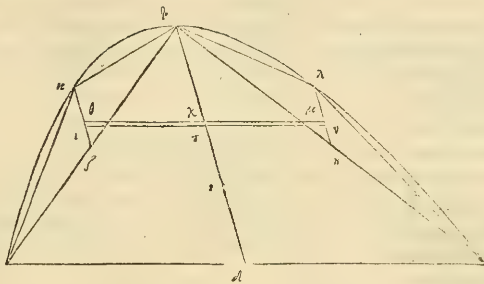


ἐπεζεύχθω ἁ ΘΙ, ΖΗ. καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμον ἐστὶ τὸ ΘΖΗΙ, καὶ ἴσα ἐστὶ τᾶ ΖΝ ἁ ΝΗ, ἐστὶν ἄρα ἁ ΧΘ ἴσα τᾶ ΧΙ. ὥς τε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΚΒ, ΒΛΓ τμαμάτων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ μέσας τᾶς ΘΙ. ἐπειδήπερ ἴσα ἐντὶ τμάματα, τουτέστι τὸ Χ σαμεῖον. ἐπεὶ δὲ τοῦ μὲν ΑΒΓ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ Ε σαμεῖον, τοῦ δὲ συγκειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΚ ΒΛΓ τὸ Χ, δῆλον οὖν ὅτι ὅλου τοῦ τμάματος τοῦ ΑΒΓ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ τᾶς ΧΕ, τουτέστι μεταξὺ τῶν Χ, Ε σαμείων, ὥς τε εἴη κα ἐγγύτερον τᾶς τοῦ τμάματος κορυφᾶς τὸ κέντρον τοῦ ὅλου τμάματος, ἢ τοῦ ἐγγραφομένου τριγώνου γνωρίμως.

Ἐγγεγράφθω πάλιν εἰς τὸ τμᾶμα πεντάγωνον εὐθύγραμμον γνωρίμως τὸ ΑΚΒΛΓ. καὶ ἔστω τοῦ μὲν ὅλου τμάματος διάμετρος ἁ ΒΔ. ἑκατέρου δὲ τῶν τμαμάτων, ἑκατέρα τῶν ΚΖ, ΛΗ διαμέτρων. καὶ ἐπεὶ ἐν τῷ ΑΚΒ τμάματι ἐγγέγραπται εὐθύγραμμον γνωρίμως, τοῦ ὅλου τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐγγύτερον τᾶς κορυφᾶς, ἢ τὸ τοῦ εὐθυγράμμου. ἔστω οὖν τοῦ μὲν ΑΚΒ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Θ, τοῦ δὲ τριγώνου τὸ Ι. πάλιν δὲ ἔστω τοῦ μὲν ΒΛΓ τμάματος, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Μ, τοῦ δὲ τριγώνου τὸ Ν, καὶ ἐπεζεύχθω τὰ ΘΜ, ΙΝ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἁ ΘΧ

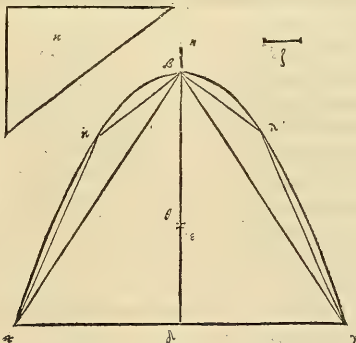
τᾶ ΧΜ,

τᾶς χμ, ἁ δὲ ιτ τᾶς τν. ἀλλὰ καὶ τριγώνω τῶ ακβ ἴσον ἐστὶ τὸ βλγ. τμᾶμα δὲ τὸ ακβ τμάματι τῶ βλγ. δέδεικται γὰρ ἐν ἄλλοις, τὰ τμάματα ἐπίτριτα εἶμεν τῶν τριγώνων. ἔσαι οὖν τοῦ μὲν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ακβ, βλγ τμαμάτων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον τοῦ βάρεος τὸ χ. τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ακβ, βλγ τριγώνων τὸ τ. πάλιν οὖν ἐπεὶ τοῦ αβγ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ ε. τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ακβ, βλγ τμαμάτων, τὸ χ. δῆλον ὡς τοῦ ὅλου τοῦ αβγ τμάματος



τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς χε τμαθείσας οὕτως, ὥς τε ὃν ἔχει λόγον τὸ αβγ τρίγωνον ποτὶ τὰ συναμφότερα τὰ ακβ, βλγ τμάματα, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν τὸ τμᾶμα αὐτᾶς, τὸ πέρας ἔχον τὸ χ, ποτὶ τὸ ἔλασσον τμᾶμα. τοῦ δὲ ακβλγ πενταγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ τὰς ετ εὐθείας τμαθείσας οὕτως, ὥς τε ὃν ἔχει λόγον τὸ αβγ τρίγωνον ποτὶ τὰ ακβ, βλγ τρίγωνα, τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον τὸ τμᾶμα αὐτᾶς τὸ πέρας ἔχον τὸ τ ποτὶ τὸ λοιπόν. ἐπεὶ οὖν μείζονα λόγον ἔχει τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὰ καβ, λβγ τρίγωνα, ἢ ποτὶ τμάματα. δῆλον οὖν ὅτι τοῦ αβγ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος, ἐγγύτερον ἐστὶ τῆς β κορυφῆς, ἢ τὸ τοῦ ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου. καὶ ἐπὶ πάντων εὐθυγράμμων, τῶν ἐγγραφομένων ἐν τὰ τμάματα γνωρίμως ὁ αὐτὸς λόγος.

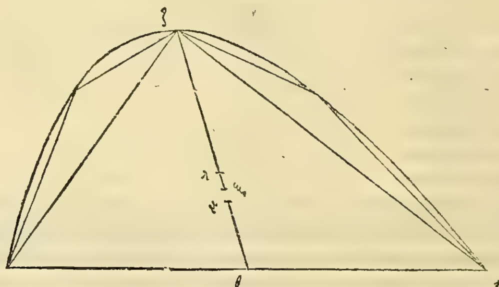
Τμάματος δοθέντος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, δυνατόν ἐντὶ τὸ τμᾶμα εὐθύγραμμον γνωρίμως ἐγγράψαι, ὥς τε τὰν μεταξὺ εὐθεῖαν τῶν κέντρων τοῦ βάρεος τοῦ τμάματος καὶ τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου, ἐλάσσονα εἶμεν τᾶς προτεθείσας εὐθείας. δεδόσθω τμᾶμα τὸ αβγ, οἷον εἴρηται. οὗ κέντρον ἔστω τοῦ βάρεος τὸ θ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον γνωρίμως τὸ αβγ. καὶ ἔστω ἁ προτεθεῖσα εὐθεῖα ἁ ζ. καὶ ὃν λόγον ἔχει ἁ βθ πρὸς ζ, τοῦτον τὸν λόγον ἐχέτω τὸ αβγ τρίγωνον, πρὸς τὸ κ χωρίον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ αβγ τμᾶμα εὐθύγραμμον γνωρίμως τὸ ακβλγ. ὥς τε τὰ περιλειπόμενα τμάματα ἐλάσσονα εἶμεν τοῦ κ. καὶ ἔστω τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ε. φημὶ δὴ τὰν θε ἐλάσσονα εἶμεν τᾶς ζ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴσα ἐστὶν ἢ μείζων. ἐπεὶ δὲ τὸ ακβλγ εὐθύγραμμον πρὸς τὰ περιλειπόμενα τμάματα μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς κ, τουτέστιν ἡ θβ πρὸς ζ. ἔχει δὲ καὶ ἁ βθ πρὸς ζ οὐκ ἐλάσσονα λόγον, ἢ ὃν ἔχει πρὸς θε. διὰ τὸ μὴ ἐλάσσονα εἶμεν τὰν θε τᾶς ζ. πολλῷ ἄρα τὸ ακβλγ εὐθύγραμμον πρὸς τὰ περιλειπόμενα τμάματα μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ βθ πρὸς θε. ὥς τε ἐὰν ποιῶμεν, ὡς τὸ ακβλγ εὐθύγραμμον πρὸς περιλειπόμενα τμήματα, οὕτως ἄλλαν τινὰ πρὸς θε, ἔσαι μείζων τᾶς βθ. καὶ

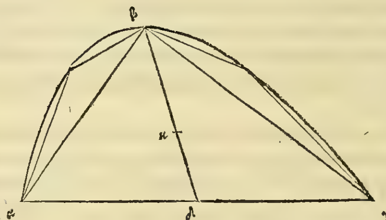


ἔστω ἁ θη. ἐπεὶ δὴ τοῦ αβγ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ θ, εὐθυγράμμου δὲ τοῦ ακβλγ τὸ ε, ἐκβληθείσας τᾶς εθ, καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς εὐθείας ἐχούσας λόγον πρὸς τὰν εθ, ὃν τὸ ακβλγ εὐθύγραμμον πρὸς τὰ περιλειπόμενα τμάματα, ἔσαι μείζων τᾶς θβ. ἐχέτω οὖν ἁ ηθ πρὸς θε,

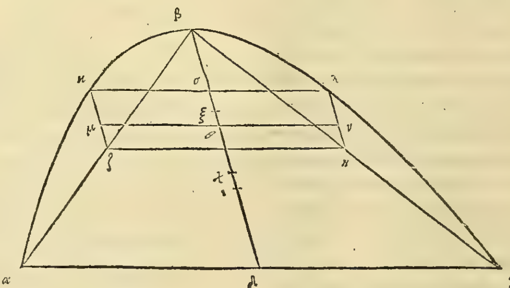
τὸ κ ἄρα κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν περιλειπομένων τμαμάτων, ὅπερ ἀδύνατον. τὰς γὰρ διὰ τοῦ κ ἀχθείσας παρὰ τὰν α γ ἐπὶ τὰ αὐτά ἐστι τῷ τμάματι, δηλονότι ἁ θ ε ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ζ. ἔδει δὲ τοῦτο δεῖξαι.

ζ' ΔΥο τμαμάτων ὁμοίων περιεχομένων ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, τὰ κέντρα τῶν βαρέων εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τέμνοντι τὰς διαμέτρους. ἔστω δύο τμάματα, οἷα εἴρηται τὰ α β γ, ε ζ η. ὧν διάμετροι αἱ β δ, ζ θ. καὶ ἔστω τοῦ μὲν α β γ τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ κ σαμεῖον, τοῦ δὲ ε ζ η τὸ λ. δεικτέον ὅτι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τέμνοντι τὰς διαμέτρους τὰ κ, λ. εἰ γὰρ μή, ἔστω ὡς ἁ κ β πρὸς κ δ, οὕτως ἁ ζ μ πρὸς θ μ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ε ζ η τμᾶμα εὐθύγραμμον γνωρίμως, ὥστε τὴν μεταξὺ τοῦ κέντρου τοῦ τμάματος καὶ τοῦ ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου ἐλάσσονα εἶμεν τᾶς λ μ. καὶ ἔστω τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ξ σαμεῖον. ἐγγεγράφθω δὲ εἰς τὸ α β γ τμᾶμα τῷ ἐν τῷ ε ζ η ἐγγεγραμμένῳ εὐθυγράμμῳ ὅμοιον εὐθύγραμμον, τουτέστιν ὁμοίως γνωρίμως, οὗ κέντρον τοῦ βάρεος τᾶς κορυφᾶς ἐγγύτερον ἤπερ τοῦ τμάματος, ὅπερ ἀδύνατον. δῆλον οὖν ὅτι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ β πρὸς κ δ, ὃν ἁ ζ λ πρὸς λ θ.





η' ΠΑντὸς τμάματος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, κέντρον τοῦ βάρεος διαιρεῖ τὰν τοῦ τμάματος διάμετρον, ὥστε εἶμεν ἁμιόλιον τὸ μέρος αὐτᾶς τὸ ποτὶ τᾷ κορυφᾷ τοῦ τμάματος, τοῦ ποτὶ τὰν βάσιν. ἔστω τὸ α β γ τμᾶμα, οἷον ὡς εἴρηται, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἁ β δ. κέντρον δὲ τοῦ βάρεος τὸ θ σαμεῖον. δεικτέον ὅτι ἁμιόλια ἐστὶν ἁ β θ τᾶς θ δ. ἐγγεγράφθω δὴ τὸ α β γ τμᾶμα γνωρίμως τρίγωνον τὸ α β γ. οὗ κέντρον τοῦ βάρεος ἔστω τὸ ε. καὶ τετμάσθω δίχα ἑκατέρα τῶν α β, β γ, κατὰ τὰ ζ η, καὶ ἄχθωσαν παρὰ τὰν β δ, αἱ κ ζ, η λ. διάμετροι ἄρα γίνονται τῶν α κ β, β λ γ τμαμάτων. ἔστω δὴ τοῦ μὲν α κ β τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ μ. τοῦ δὲ β λ γ τὸ ν. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζ η, μ ν, κ λ. τοῦ ἄρα δὴ ἀμφοτέρων τμαμάτων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ χ, καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἁ β θ πρὸς θ δ, οὕτως



ἁ κ μ

ἁ κμ πρὸς μζ. καὶ συνθέντι καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἁ βδ πρὸς τὰν κζ, οὕτως ἁ θδ πρὸς τὰν μζ. ἁ δὲ βδ τετραπλασίων τᾶς κζ. τοῦτο γὰρ ὧδε τέλει δείκνυται, οὗ σαμεῖον ὁ ϑ. τετραπλασίων ἄρα καὶ ἁ δθ τᾶς μζ. ὥστε καὶ λοιπὰ ἁ βθ λοιπᾶς τᾶς κμ, τουτέστι τᾶς σχ τετραπλασίων. καὶ λοιπὸν ἄρα συναμφότερα ἁ βσ, χθ τριπλασίων τᾶς σχ. ἔστω τριπλὰ ἁ βσ τᾶς σξ. καὶ ἁ χθ ἄρα τᾶς ξχ ἐστὶ τριπλασία. καὶ ἐπεὶ τετραπλασίων ἁ βδ τᾶς βσ, καὶ τῶς τοῦτο δείκνυται. ἁ δὲ βσ τᾶς σξ τριπλασίων. ἁ ξβ ἄρα τᾶς βδ τρίτον μέρος ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἁ εδ τᾶς δβ τρίτον μέρος. ἐπειδήπερ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ αβγ τριγώνου ἐστὶ τὸ ε, καὶ λοιπὰ ἄρα ἁ ξε τρίτον μέρος τᾶς βδ. καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν ὅλου τμάματος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ θ σαμεῖον, τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ακβ, βλγ τμαμάτων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ χ. τοῦ δὲ αβγ τριγώνου τὸ ε. ἔσται ὡς τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὰ καταλειπόμενα τμάματα, οὕτως ἁ χθ πρὸς θε. τριπλοῦν δὲ τὸ αβγ τρίγωνον τῶν τμαμάτων. ἐπειδήπερ τὸ ὅλον τμᾶμα ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ αβγ τριγώνου. τριπλασία ἄρα καὶ ἁ χθ τᾶς θε. ἐδείχθη δὲ ἁ χθ τριπλασία καὶ τᾶς χξ. πενταπλασία ἄρα ἐστὶν ἁ ξε τᾶς εθ, τουτέστιν ἁ δε τᾶς εθ. ἴσαι γάρ ἐστιν αὐταῖ. ὥστε ἑξαπλασία ἐστὶν ἁ δθ τᾶς θε. καὶ ἐντὶ τᾶς δε τριπλασία ἁ βδ. ἁμιολία ἄρα ἐντὶ ἁ βθ τᾶς θδ.

Εἴκα τέσσαρες γραμμαὶ ἀνὰ λόγον ἐῶντι ἐν τᾷ συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ ἐλαχίστα ποτὶ τὰν ὑπεροχὰν ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας, τοῦτον ἔχουσά τις λαφθῇ ποτὶ τὰ τρία πεμπταμόρια τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἀνὰ λόγον τᾶς τρίτας. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ἴσα τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς μεγίστας τᾶς ἀνὰ λόγον, καὶ τᾷ τετραπλασίᾳ τᾶς δευτέρας, καὶ τᾷ ἑξαπλασίᾳ τᾶς γ, καὶ τᾷ γ τᾶς δ, ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ τε ε τᾶς μεγίστας, καὶ τᾷ ι τᾶς β, καὶ τᾷ ι τᾶς γ, καὶ τᾷ πενταπλασίᾳ τᾶς δ, τοῦτον ἔχουσά τις λαφθῇ ποτὶ τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἀνὰ λόγον τᾶς τρίτας, συναμφότεραι αἱ λαφθεῖσαι ἐσσοῦνται δύο πεμπταμόρια τᾶς μεγίστας. ἔστωσαν τέσσαρες γραμμαὶ ἀνὰ λόγον αἱ αβ, βγ, βδ, βε. καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἁ βε πρὸς εα, τοῦτον ἐχέτω ἁ ζη ποτὶ τὰ τρία πεμπταμόρια τᾶς αδ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ἴσα τᾷ β τᾶς αβ, καὶ δ τᾶς βγ, καὶ ς τᾶς βδ, καὶ γ τᾶς βε, ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ ε τᾶς αβ, καὶ ι τᾶς γβ, καὶ ι τᾶς βδ, καὶ ε τᾶς βε, τοῦτον ἐχέτω τὸν λόγον ἁ ηθ ποτὶ τὰν αδ. δεικτέον ὅτι ἁ ζθ δύο θ

α γ δ ε β

ζ η θ

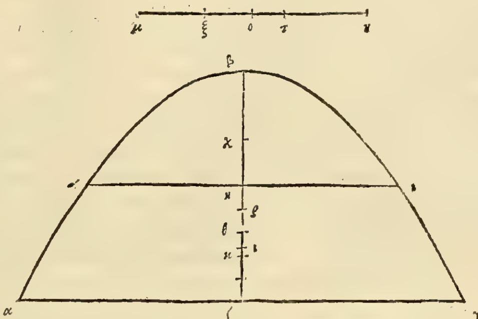
πεμπταμόρια ἐντὶ τᾶς αβ. ἐπεὶ γὰρ ἀνὰ λόγον ἐντὶ αἱ αβ, βγ, βδ, βε, καὶ αἱ αγ, γδ, δε, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἐντί. καὶ συναμφότερος ἁ αβ, βγ πρὸς τὰν βδ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ αδ ποτὶ τὰν δε. καὶ συναμφότερος ἁ βδ, βγ ποτὶ τὰν εβ. καὶ πάντα πρὸς πάντα. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει ἁ αδ ποτὶ τὰν δε, ὃν ἁ ἴσα τᾷ τε β τᾶς αβ, καὶ τᾷ γ τᾶς γβ, καὶ ἁ δβ ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ τε β, τᾶς βδ καὶ τὰν βε. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ἴσα τᾷ τε β τᾶς αβ, καὶ τᾷ δ τᾶς βγ, καὶ τᾷ δ τᾶς βδ, καὶ τᾷ β τᾶς βε, ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ τε β τᾶς δβ, καὶ τὰν εβ, τοῦτον ἕξει ἁ δα πρὸς ἐλάσσονα τᾶς δε. ἐχέτω οὖν πρὸς δθ. καὶ ἀμφότεραι δὲ ποτὶ τὰς πρώτας αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον. ἕξει οὖν ἁ οα πρὸς αδ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ἴσα τᾷ τε β τᾶς αβ, καὶ δ τᾶς γβ, καὶ ς τᾶς βδ, καὶ γ τᾶς βε, πρὸς τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς β συναμφοτέρας τᾶς αβ, εβ, καὶ δ συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ. ἔχει δὲ καὶ ἁ αδ πρὸς ηθ, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ε συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, μετὰ τᾶς ι συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ, πρὸς τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς β τᾶς αβ, καὶ τᾶς δ τᾶς γβ, καὶ τᾶς γ τᾶς εβ, καὶ ς τᾶς βδ. ἀνομοίως δὲ τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστιν ἐν τεταραγμέναις ἀναλογίᾳ, δι' ἴσου τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ οα πρὸς ηθ, ὃν ἁ πενταπλασία συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, μετὰ τᾶς ι τᾶς γβ, βδ. πρὸς τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, καὶ τᾶς τετραπλασίας συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ, ἀλλ' ἁ συγκειμένα

ἐκ τε τᾶς ε̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, μετὰ τᾶς ι̅ συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ. πρὸς τὰν συγκειμέναν ἐκ τε τᾶς β̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ, λόγον ἔχει ὃν πέντε πρὸς δύο. καὶ ἁ αο ε πρὸς ηθ λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. πάλιν ἐπεὶ ἁ οδ πρὸς δα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ εβ, μετὰ τᾶς β̄ τᾶς βδ, πρὸς τὰν ἴσαν τὰ συγκειμένα ἐκ τε τᾶς β̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, μετὰ τᾶς δ̄ συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ. δεῖ δὲ καὶ ὡς ἁ αδ πρὸς δε, οὕτως ἁ συγκειμένα ἐκ τε τᾶς β̄ τᾶς αβ, καὶ γ̄ τᾶς γβ, καὶ τᾶς β̄ δ ποτὶ τὰν ἴσαν τᾶ τε εβ, καὶ τᾶ ϐ̄ τᾶς βδ. ἀνομοίως οὖν τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστιν τεταραγμένας οὔσας τὰς ἀναλογίας, δι' ἴσου ἐστὶν ὡς ἁ οδ πρὸς δε, οὕτως ἁ β̄ τᾶς αβ, μετὰ τᾶς γ̄ τᾶς βγ. καὶ ἁ β̄ δ πρὸς τὰν συγκειμέναν ἐκ τᾶς β̄, συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, καὶ τᾶς δ̄ τᾶς γβ, βδ. ὥστε καὶ ὡς ἁ εο πρὸς εδ ἐστίν, οὕτως ἁ γβ μετὰ τᾶς γ̄ τᾶς βδ, καὶ β̄ τᾶς εβ, πρὸς τὰν β̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἁ δε πρὸς εβ, οὕτως ἅ τε αγ πρὸς γβ. ἐπεὶ καὶ κατὰ σύνθεσιν καὶ ἁ γ̄ τᾶς γδ, πρὸς τὰν γ̄ τᾶς δβ. καὶ ἁ β̄ τᾶς δε, πρὸς τὰν β̄ τᾶς εβ. ὥστε καὶ ἁ συγκειμένα ἐκ τε τᾶς αγ, καὶ ἁ γ̄ τᾶς γδ, καὶ β̄ τᾶς δε, πρὸς τὰν συγκειμέναν ἐκ τε τᾶς γϐ, καὶ γ̄ τᾶς δϐ, καὶ ϐ̄ τᾶς εϐ. ἀνομοίως οὖν πάλιν τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστιν ἐν τεταραγμένᾳ ἀναλογίᾳ, δι' ἴσου τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ εο πρὸς εβ, ὃν ἁ αγ μετὰ τᾶς γ̄ τᾶς γδ, καὶ ϐ̄ τᾶς δε. πρὸς διπλασίαν συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, μετὰ τᾶς δ̄ συναμφοτέρου τᾶς γϐ, ϐδ. ὅλα οὖν ἁ οϐ πρὸς τὰν εβ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἴσα τᾶ τε γ̄ τᾶς αϐ μετὰ τᾶς ς̄ τᾶς γϐ, καὶ τᾶ γ̄ τᾶς ϐδ πρὸς τὰν ϐ, συναμφοτέρου τᾶς αϐ, ϐε, μετὰ τᾶς δ̄ συναμφοτέρου τᾶς γϐ, ϐδ. καὶ ἐπεὶ αἵ τε εδ, δγ, γα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἐντί, καὶ συναμφότερος ἑκάστα τῶν εβ, ϐδ, δϐ, ϐγ, γδ, γα. ἔσται καὶ ὡς ἁ εδ πρὸς δα, οὕτως συναμφότερος ἁ εϐ, ϐδ, πρὸς συναμφότερον τὰν δϐ, βγ, μετὰ τᾶς συναμφοτέρου τᾶς γβ, ϐα. καὶ συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς αε πρὸς αδ, οὕτως συναμφότερος ἁ εϐ, ϐδ, μετὰ συναμφοτέρου τᾶς αβ, βγ καὶ συναμφοτέρου τᾶς γβ δ. ὃ δεῖ συναμφότερος ἁ εϐα, μετὰ τᾶς β̄ συναμφοτέρου τᾶς δβγ, πρὸς συναμφότερον τὰν ϐδ, ϐα, μετὰ τᾶς β̄ τᾶς βγ. ὥστε καὶ ἁ ϐ̄ πρὸς τὰν ϐ̄ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, τουτέστιν ὡς ἁ εα πρὸς αδ, οὕτως ἁ β̄ συναμφοτέρου τᾶς εϐα, μετὰ τᾶς δ̄ συναμφοτέρου τᾶς γβδ, πρὸς τὰν ϐ̄, συναμφοτέρου τᾶς αβδ, μετὰ τᾶς δ̄ τᾶς γϐ. ὥστε ἁ εα πρὸς τὰ τρία πέμπτα τᾶς αδ, οὕτως ἁ συγκειμένα ἐκ τε τᾶς συναμφοτέρου τᾶς αβε καὶ δ̄ συναμφοτέρου τᾶς γϐδ, πρὸς τὰ τρία πέμπτα τᾶς συγκειμένας ἐκ τε τᾶς ϐ̄ συναμφοτέρου τᾶς αϐδ, καὶ δ̄ τᾶς γϐ. ἀλλ' ὡς ἁ εα πρὸς τὰ τρία πέμπτα τᾶς αδ, οὕτως ἐστὶν ἁ εϐ πρὸς ζη. καὶ ὡς ἄρα ἁ εϐ πρὸς ζη, οὕτως ἁ ϐ̄ συναμφοτέρου τᾶς αϐε, μετὰ τᾶς δ̄ συναμφοτέρου τᾶς δϐγ, πρὸς τὰ τρία πέμπτα τᾶς συγκειμένας ἐκ τε τᾶς ϐ̄ συναμφοτέρου τᾶς αϐδ, μετὰ τᾶς δ̄ τᾶς γϐ. ἐδείχθη δὲ ὡς οϐ πρὸς εϐ, οὕτως ἁ γ̄ συναμφοτέρου τᾶς αϐδ, μετὰ τᾶς ς̄ τᾶς γϐ, πρὸς τὰν ϐ̄ συναμφοτέρου τᾶς αϐε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τᾶς γϐδ. καὶ δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἁ οϐ, οὕτως ἁ συγκειμένα ἐκ τε τᾶς γ̄ συναμφοτέρου τᾶς αϐδ, καὶ ς̄ τᾶς γϐ, πρὸς τὰ τρία πέμπτα τᾶς συγκειμένας ἐκ τε τᾶς ϐ̄ συναμφοτέρου τᾶς αϐδ, καὶ δ̄ τᾶς γϐ. ἀλλὰ ἁ συγκειμένα ἐκ τε τᾶς γ̄ συναμφοτέρου τᾶς αϐδ, καὶ ς̄ τᾶς γϐ, πρὸς μὲν τὰν συγκειμέναν ἐκ τε τᾶς ϐ̄ συναμφοτέρου τᾶς αϐδ, τᾶς γϐ, λόγον ἔχει ὃν τρία πρὸς δύο. πρὸς δὲ τὰ τρία πέμπτα τᾶς αὐτᾶς λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. ἐδείχθη δὲ καὶ ἁ αο πρὸς ηθ λόγον ἔχουσα, ὃν πέντε πρὸς δύο. καὶ ὅλα ἄρα ἁ βα πρὸς ὅλαν τὰν ζθ, λόγον ἔχει ὃν πέντε πρὸς δύο, εἰ δὲ τοῦτο, δύο πεμπτημόρια ἐντὶ ἁ ζθ τᾶς αβ, ὅπερ ἔδει.

ι ΠΑντὸς τόμου ἀπὸ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἀφαιρουμένου, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας ἐστὶν ἃ διάμετρος ἐστὶ τοῦ τόμου. τὸν δὲ τρόπον κείμενον, διαιρεθείσας τᾶς εὐθείας εἰς ἴσα πέντε ἐπὶ μέσου πεμπταμορίου. ὥστε τὸ τμῆμα αὐτοῦ τὸ ἐγγύτερον τᾶς ἐλάσσονος βάσιος τοῦ τόμου ποτὶ τὸ λοιπὸν τμᾶμα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ ἡμίσεος τᾶς μείζονος τῶν βάσεων τοῦ τόμου, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν συναμφοτέρα τᾶ τε διπλασίᾳ τᾶς ἐλάσσονος τῶν βάσεων, καὶ τὸ μείζονι ποτὶ τὸ στερεόν, τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ ἡμίσεος τᾶς ἐλάσσονος τᾶν βάσεων τοῦ τόμου, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἀμφοτέρας, τᾶ τε διπλασίᾳ τᾶς μείζονος καὶ τᾶ ἐλάσσονι αὐτᾶν. ἔστωσαν ὀρθογωνίου κώνου τομαὶ δύο εὐθεῖαι αἱ αγ, δε. διάμετρος δὲ ἔστω τοῦ αβγ τμάματος, ἁ βζ. φανερὸν δ' ὅτι καὶ τοῦ αδεγ διάμετρος ἐστὶν ἁ ηζ. καὶ αἱ μὲν αγ, δε παράλληλοι ἐντὶ τᾷ κατὰ τὸ β ἐφαπτομένᾳ τᾶς τομᾶς. καὶ τᾶς ηζ εὐθείας, διαιρεθείσας εἰς πέντε ἴσα μέσον ἔστω πεμπταμόριον ἁ θκ. ἁ δὲ θι πρὸς τὰν ικ, τὸν αὐτὸν

τὸν

τὸν ἐχέτω λόγον, ὃν ἔχει τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ τᾶς α ζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τᾶ τε β τᾶς δ η, καὶ τᾶ α ζ, ποτὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ τᾶς δ η τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τᾶ β τᾶς α ζ, καὶ τᾶ δ η. δεικτέον ὅτι τοῦ α δ ε γ τόμου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ ι σαμεῖον. ἔστω δὴ τᾶ μὲν ζ β ἴσα ἁ μ ν, τᾶ δὲ η β ἴσα ἁ ν ο. καὶ εἰλήφθω τᾶν μὲν μ ν ο μετὰ ἀνάλογον ἁ ν ξ. τετάρτη δ' ἀνὰ λόγον ἁ τ ν. καὶ ὡς τ μ πρὸς τ ν, οὕτως ἁ ζ θ πρὸς τινα ἀπὸ τοῦ ι, ὅπου ἂν ἔρχηται τὸ ἕτερον σαμεῖον. οὐδὲν γὰρ διαφέρει, εἴτε καὶ μεταξὺ τῶν ζ, η, εἴτε καὶ μεταξὺ τῶν η, β, τὰν ι ρ.



καὶ ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ διάμετρός ἐστι τοῦ τμάματος ἁ ζ β. ἁ β ζ δὲ, ἤτοι ἀρχὴ ἐστὶ τῆς τομῆς, ἡ παρὰ τὴν διάμετρον ἦκται. αἱ δὲ α ζ, δ η εἰς αὐτὴν τεταγμέναι εἰσὶ κατηγμέναι. ἐπειδὴ παράλληλοι εἰσὶ τᾷ ἀπὸ τοῦ β τᾶς τομᾶς ἐφαπτομένᾳ. εἰ δὲ τοῦτο, ἐστὶν ὡς ἡ α ζ πρὸς δ η δυνάμει, οὕτως ἁ ζ β πρὸς β η μάκει, τουτέστιν ἁ μ ν πρὸς ν ο. ὡς δὲ ἁ μ ν πρὸς ν ο μάκει, οὕτως ἁ μ ν πρὸς ν ξ δυνάμει. καὶ ὡς ἄρα ἁ α ζ πρὸς δ η δυνάμει, οὕτως ἁ μ ν πρὸς ν ξ δυνάμει. ὥστε καὶ μάκει ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. καὶ ὡς ἄρα ὁ ἀπὸ α ζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δ η κύβον, οὕτως ὁ ἀπὸ μ ν κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ ν ξ κύβον. ἀλλ' ὡς μὲν ὁ ἀπὸ α ζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δ η κύβον, οὕτω τὸ β α γ τμᾶμα πρὸς τὸ δ β ε τμᾶμα. ὡς δὲ ὁ ἀπὸ μ ν κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ ν ξ κύβον, οὕτως ἁ μ ν πρὸς ν τ. ὥστε καὶ διελόντι ἐστὶν ὡς ὁ α δ γ ε τόμευς πρὸς τὸ δ β ε τμᾶμα, οὕτως ἁ μ τ πρὸς ν τ, τουτέστι τὰ γ ε τᾶς η ζ πρὸς ν τ. καὶ ἐπεὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ α ζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμέναν, ἔκ τε τᾶς β τᾶς δ η καὶ τᾶς α ζ, πρὸς τὸν ἀπὸ α ζ κύβον λόγον ἔχει, ὃν ἁ β τᾶς δ η μετὰ τᾶς α ζ πρὸς ζ α. ὥστε καὶ ἁ β τᾶς ν ξ μετὰ τᾶς ν μ, πρὸς ν μ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ ἀπὸ α ζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δ η κύβον, οὕτως ἁ μ ν πρὸς ν τ. ὡς δὲ ὁ ἀπὸ δ η κύβος πρὸς τὸ στερεὸν, τὸ βάσιν μὲν ἔχον, τὸ ἀπὸ δ η τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς διπλασίας τῆς α ζ, μετὰ τᾶς δ η, οὕτως ἁ δ η πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς α ζ, καὶ τᾶς δ η. ὥστε καὶ ἁ τ ν πρὸς τὴν συγκειμένην, ἔκ τε τᾶς β τᾶς ο ν καὶ τᾶς τ ν. γέγονεν οὖν τέσσαρα μεγέθη, τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ α ζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλᾶς τᾶς δ η, καὶ τᾶς α ζ. καὶ ὁ ἀπὸ α ζ κύβος, καὶ ὁ ἀπὸ δ η κύβος, καὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ δ η τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην, ἔκ τε τῆς β τῆς α ζ, καὶ τῆς δ η, τέταρσι μεγέθεσιν ἀνάλογον σὺν δύο λαμβανομένοις, τῇ τε συγκειμένῃ ἔκ τε τῆς β τᾶς ν ξ, καὶ τῆς ν μ, καὶ ἑτέρου μεγέθεος τῆς μ ν. καὶ ἄλλο ἑξῆς ἡ ν τ. καὶ τελευταῖον ἡ συγκειμένη, ἔκ τε τῆς β τῆς ν ο, καὶ τῆς ν τ. δι' ἴσου ἄρα γίνεται, ὡς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ α ζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς δ η, καὶ τῆς α ζ, πρὸς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ δ η τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς α ζ, καὶ τῆς δ η, οὕτως ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς β τῆς ν ξ, καὶ τῆς μ ν, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς ν ο, καὶ τῆς ν τ. ἀλλ' ὡς τὸ εἰρημένον στερεὸν πρὸς τὸ εἰρημένον στερεὸν, οὕτως ἡ θ ι πρὸς ι κ. καὶ ὡς ἄρα ἡ θ ι πρὸς ι κ, οὕτως ἡ συγκειμένη πρὸς τὴν συγκειμένην. ὥστε καὶ συνθέντι, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ πενταπλάσια. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ζ η πρὸς ι κ, οὕτως ἡ πενταπλῆ συναμφοτέρου τῆς μ ν τ, καὶ ι συναμφοτέρου τῆς ν ξ, ν ο, πρὸς τὴν β τῆς ο ν, καὶ τὴν ν τ. καὶ ὡς ἡ ζ η πρὸς ζ η οὖσαν αὐτῆς δύο πέμπτα, οὕτως ἡ ε συναμφοτέρου τῆς μ ν τ, καὶ δεκαπλῆ

συναμ-

συναμφοτέρου τῆς νξ ο, πρὸς τὴν β συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς νξ ο. ἔσται οὖν ὡς ζη πρὸς ζι, οὕτως ἡ ε συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ ι συναμφοτέρου τῆς ξν ο πρὸς τὴν συγκειμένην, ἔκ τε τῆς β τῆς μν, καὶ δ τῆς νξ, καὶ ς τῆς ον, καὶ γ τῆς ντ. ἐπεὶ οὖν τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνὰ λόγον αἱ μν ξ, ο ντ. καὶ ἔστιν ὡς μὲν ἡ ντ πρὸς τμ, οὕτως εἰλημμένη τὶς ἡ ρι πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς ζη, τουτέστι τῆς μο. ὡς δὲ ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς β τῆς νμ, καὶ δ τῆς νξ, καὶ ς τῆς νο, καὶ γ τῆς ντ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς ε συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ ι συναμφοτέρου τῆς ξν ο, οὕτως ἑτέρα τις εἰλημμένη ἡ ιζ πρὸς τὴν ζη, τουτέστι πρὸς τὴν μο, ἔσται διὰ τὰ πρότερον ἡ ρζ δύο πέμπτα τῆς μν. τουτέστι τῆς ζβ. ὥστε κέντρον βάρεος ἐστὶ τοῦ αβγ τμήματος τὸ ρ σαμεῖον. ἔστω δὴ καὶ τοῦ δβε τμάματος κέντρον βάρεος τὸ χ σαμεῖον. τοῦ αδεγ τόμου ἔσται τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τῆς ἐπ' εὐθείας τῆς χρ, τὸν αὐτὸν πρὸς αὐτὴν λόγον ἐχούσης, ὃν ἔχει ὁ τομεὺς πρὸς τὸ λοιπὸν τμᾶμα. ἔστι δὲ τὸ ι σαμεῖον. ἐπεὶ γὰρ τῆς μὲν ζβ τρία πέμπτα ἐστὶν ἡ βρ, τῆς δὲ ηβ τρία πέμπτα ἐστὶν ἡ βχ. καὶ λοιπῆς ἄρα τῆς ηζ, τρία πέμπτα ἐστὶν ἡ χρ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν, ὡς μὲν ὁ αδεγ τομεὺς πρὸς τὸ δβε τμῆμα, οὕτως ἡ μτ πρὸς ντ. ὡς δὲ ἡ μτ πρὸς τὴν ντ, οὕτως τὰ τρία πέμπτα τῆς ηζ, ἥ τις ἐστὶν ἡ χρ πρὸς ρι. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ὁ αδεγ τομεὺς πρὸς τὸ δβε τμᾶμα, οὕτως ἡ χρ πρὸς ρι. καὶ ἔστι μὲν τοῦ ὅλου τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ρ σαμεῖον, τοῦ δὲ δβε κέντρον βάρεος τὸ χ. φανερὸν οὖν, ὅτι καὶ τοῦ δεγ τομέως τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ι σημεῖον.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΨΑΜΜΙΤΗΣ.

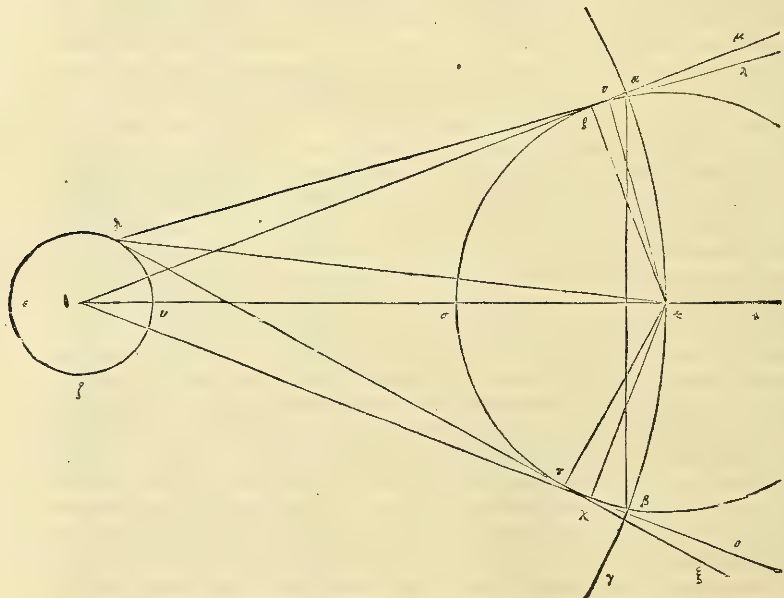
Οἴονται τινὲς βασιλεῦ Γέλων τοῦ ψάμμου τὸν ἄπειρον εἶμεν τῷ πλήθει. λέγω δὲ οὐ μόνον τοῦ περὶ Συρακούσας τε καὶ τὰν ἄλλαν Σικελίαν ὑπάρχοντος, ἀλλὰ καὶ τοῦ κατὰ πᾶσαν χώραν τάν τε οἰκημέναν καὶ τὰν ἀοίκητον. * ἐντι νὲς δὲ αὐτὸν ἄπειρον ἐν εἶμεν οὐχ ὑπολαμβάνοντι, μηδένα μέντοι ταλικοῦτον κατωνομασμένον ὑπάρχειν, ὅς τις ὑπερβάλλει τὸ πλῆθος αὐτοῦ. οἱ δὲ οὐ † δοξάζοντες, δῆλον ὡς εἰ νοήσαιεν ἐκ τοῦ ψάμμου ταλικοῦτον ὄγκον συγκείμενον τᾶ μὲν ἁλίκαν ὁ πᾶς γᾶς ὄγκος ἀναπεπληρωμένων ἐν αὐτῷ τῶν τε πελαγέων πάντων, καὶ τῶν κοιλωμάτων τᾶς γᾶς ἴσον ὕψος τοῖς ὑψηλοτάτοις τῶν ὀρέων πολλαπλασίως μὴ γνωσοῦντι μηδ' ἐν ἀκαρεῖ ἔμμεναι ὑπερβάλλοντα τὸ πλῆθος αὐτοῦ. ἐγὼ δὲ πειρασοῦμαι τοι τὸ δεικνύειν διὰ ἀποδείξεων γεωμετρικῶν, αἷς παρακολουθήσεις, ὅτι τῶν ὑφ' ἁμῶν κατονομασμένων ἀριθμῶν, καὶ ἐνδεδομένων ἐν τοῖς ποτὶ Ζεύξιππον γεγραμμένοις, ὑπερβάλλοντι τινὲς οὐ μόνον τὸν ς τοῦ ψάμμου τοῦ μέγεθος, ἔχοντος ἴσον τᾶ γᾶ πεπληρωμένα, καθάπερ εἴπαμεν, ἀλλὰ καὶ τὸν τοῦ μέγεθος ἴσον ἔχοντος τῷ κόσμῳ. κατέχεις δὲ διότι καλεῖται κόσμος ὑπὸ μὲν τῶν πλείονων ἀστρολόγων ἁ σφαῖρα, ἇς ἐστὶ κέντρον μὲν τὸ τᾶς γᾶς κέντρον. ἡ δὲ τοῦ κέντρου εὐθεῖα τᾶ μεταξὺ τοῦ κέντρου τοῦ ἁλίου, καὶ τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς. ταῦτα γὰρ ἐν ταῖς γραφομέναις παρὰ τῶν ἀστρολόγων διακούσας. Ἀρίσταρχος ὁ Σάμιος ὑποθεσίων ἐξέδωκεν γράψας, ἐν αἷς ἐκ τῶν ὑποκειμένων συμβαίνει τὸν κόσμον πολλαπλάσιον εἶμεν τοῦ νῦν εἰρημένου. ὑποτίθεται γὰρ τὰ μὲν ἀπλανῆ τῶν ἄστρων, καὶ τὸν ἅλιον μένειν ἀκίνητον, τὰν δὲ γᾶν περιφέρεσθαι περὶ τὸν ἅλιον κατὰ κύκλου περιφέρειαν, ὅς ἐστιν ἐν μέσῳ τῷ δρόμῳ κείμενος, τὰν δὲ τῶν ἀπλανῶν ἄστρων σφαῖραν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ ἁλίῳ κειμέναν τῷ μεγέθει ταλικαύταν εἶμεν. ἔστι ὥστε τὸν κύκλον καθ' ὃν τὰν γᾶν ὑποτίθεται περιφέρεσθαι, τοιαύταν ἔχειν ἀναλογίαν ποτὶ τὰν τῶν ἀπλανῶν ἀποστασίαν, οἵαν ἔχει τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν. τοῦτο δ' εὔδηλον, ὡς ἀδύνατον ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ τὸ τῆς σφαίρας κέντρον οὐδὲν ἔχει μέγεθος, οὐδὲ λόγον ἔχειν οὐδένα ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τᾶς σφαίρας ὑπολαπτέον αὐτό. ἐκδεκτέον δὲ τὸν Ἀρίσταρχον διανοεῖσθαι τόδε. ἐπειδὴ τὰν γᾶν ὑπολαμβάνομεν, ὡς περὶ μὲν τὸ κέντρον τοῦ κόσμου, ὃν ἔχει λόγον ἁ γᾶ ποτὶ τὸν ὑφ' ἁμῶν εἰρημένον κόσμον, τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον τὰν σφαῖραν, ἐν ᾗ ἐστὶν ὁ κύκλος καθ' ὃν τὰν γᾶν ὑποτίθενται περιφέρεσθαι ποτὶ τὰν τῶν ἀπλανῶν ἄστρων σφαῖραν τὰς ἀποδείξειας τῶν φαινομένων οὕτως ὑποκείμενον ἐναρμόζει. καὶ μάλιστα φαίνεται τὸ μέγεθος τᾶς σφαίρας, ἐν ᾇ ποιεῖται τὰν γᾶν κινουμέναν ἴσον ὑποτίθεται τῷ ὑφ' ἁμῶν εἰρημένῳ κόσμῳ. φαμὲν δὴ καὶ εἰ γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκαν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν εἶμεν. καὶ

οὐ τινὰς,

† οὔτως

ὔτινάς, δειχθεῖσι τῶν ἐν ἀρχαῖς τὴν κατονομαξίαν ἐχόντων, ὑπερβάλλοντας τῷ πλήθει τὸν καὶ τοῦ τοῦ ψάμμου, τοῦ μεγέθους ἔχον τὸ ἴσον τῇ εἰρημένῃ σφαίρᾳ. ὑποκειμένων τῶνδε, πρῶτον μὲν τὴν περίμετρον τᾶς γᾶς εἶμεν, ὡς τῶν μυριάδων σταδίων καὶ μείζων, καὶ περὶ τῶν πειραμένων ἀποδεικνύειν, καθὼς καί τοι παρακολουθεῖς ἐοῦσαν αὐτάν, ὡς λ̄ μοιριάδων σταδίων. ἐγὼ δ' ὑπερβαλλόμενος καθεὶς τὸ μέγεθος τᾶς γᾶς ὡς δεκαπλασίων τοῦ ὑπὸ τῶν προτέρων δεδοξασμένων, τὰν περίμετρον αὐτᾶς ὑποτίθεμαι εἶμεν, ὡς τῶν λ̄ λ σταδίων, καὶ μείζων. μετὰ δὲ τοῦτο τὰν διάμετρον τᾶς γᾶς μείζονα ἔκειμεν τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας. καὶ τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου μείζονα εἶμεν τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς, ὁμοίως τὰ αὐτὰ λαμβάνων τοῖς πλείστοις τῶν προτέρων ἀστρολόγων. μετὰ δὲ ταῦτα τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας, ὡς τριακονταπλασίαν εἶμεν, καὶ μὴ μείζονα. καὶ περὶ τῶν προτέρων ἀστρολόγων εὐδοξοῦ μὲν, ὡς ἐννεαπλάσιον ἀποφαινομένου. φειδία δὲ τοῦ ἀκούπατρος, ὡς δὴ δωδεκαπλασίαν. ἀριστάρχου δὲ πεπειραμένου δεικνύειν, ὅτι ἐστὶν ἁ διάμετρος ἁλίου τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας, μείζων μὲν ἢ ὀκτωκαιδεκαπλασίων, ἐλάττων δὲ ἢ εἰκοσαπλασίων. ἐγὼ δὲ ὑπερβαλλόμενος καὶ τοῦτον, ὅπως τὸ ὑποκείμενον ἀμφίλογον ἦ δεδειγμένον, ὑποτίθεμαι τὰν διάμετρον τᾶς σελήνας, ὡς τριακονταπλασίας εἶμεν, καὶ μὴ μειζόνων. ποτὶ δὲ τούτοις τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου μείζονα εἶμεν τᾶς τοῦ χιλιαγώνου πλευρᾶς, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου τῶν ἐν τῷ κόσμῳ. τοῦτο δὲ ὑποτίθεμαι. ἀριστάρχου μὲν εἰρηκότος τοῦ κύκλου τῶν ζῳδίων τὸν ἅλιον φαινόμενον, ὡς τὸ εἰκοστὸν καὶ ἑπτακοσιοστόν. αὐτὸς δὲ ἐπισκεψάμενος τόνδε τὸν τρόπον ἐπειράθην ὀργανικῶς λαβεῖν τὰν γωνίαν ὡς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζῃ τὰν κορυφὰν ἔχουσα ποτὶ τᾷ ὄψει, τὸ μὲν ὅμοιον ἀκριβὲς λαβεῖν οὐκ εὐχερές ἐστι διὰ τὸ μήτε τὰν ὄψιν, μήτε τὰς χεῖρας μήτε τὰ ὄργανα, δι' ὧν λαβεῖν ἀξιοπίστας εἶμεν τὸ ἀκριβὲς ἀποφαίνεσθαι. περὶ δὲ τούτων ἐπὶ τοῦ παρόντος οὐκ εὔκαιρον μακύνειν, ἄλλως τε καὶ πλεονάκις τοιούτων ἐμπεφανισμένων. ἀπόχρη δέ μοι εἰς τὰν ἀπόδειξιν τοῦ προκειμένου γωνίαν λαβεῖν, ἅ τις ἐστὶ μείζων τᾶς γωνίας αἷς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζῃ τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ ὄψει, καὶ πάλιν ἄλλαν γωνίαν λαβεῖν, ἅ τις ἐστὶν οὐκ ἐλάττων τᾶς γωνίας ἃς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζῃ τὰν κορυφάν, ἔχουσαν ποτὶ τῇ ὄψει. τεθέντος οὖν μακροῦ κανόνος ἐπίπεδον ὀρθὸν ἐν τόπῳ κειμένου, ὅθεν ἤμελλεν ἀνατέλλειν ὁ ἅλιος ὁρᾶσθαι, καὶ κυλίνδρου μικροῦ τορνευθέντος, καὶ τεθὲν ἐπὶ τὸν κανόνα ὀρθοῦ εὐθέως μετὰ τὰν ἀνατολὰν τοῦ ἁλίου. ἔπειτ' ἰόντος αὐτοῦ ποτὶ τῷ ὁρίζοντι, καὶ δυναμένου τοῦ ἀντιβλέπεσθαι ἐπεστραφῆ ὁ κανὼν ἐς τὸν ἅλιον, καὶ ἁ ὄψις κατεστάθη ἐπὶ τὸ ἄκρον τοῦ κανόνος. ὁ δὲ κύλινδρος ἐν μέσῳ κείμενος, τοῦ τ' ἁλίου καὶ τᾶς ὄψιος, ἐπεσκότει τῷ ἁλίῳ, ἀποχωριζόμενος τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τᾶς ὄψιος ἐν ᾧ ἄρξατο παραφαίνεσθαι τοῦ ἁλίου μικροῦ ἐφ' ἑκάτερα τοῦ κυλίνδρου κατεστάθη ὁ κύλινδρος, εἰ μὲν ὁμοίως συνέβαινεν τὰν ὄψιν ἀφ' ἑνὸς σαμείου βλέπειν εὐθεῖαν ἀχθεῖσαν ἀπὸ ἄκρου τοῦ κανόνος. ἐν ᾧ τόπῳ ἁ ὄψις κατεστάθη ἐπιψαύουσα τοῦ κυλίνδρου. ἁ περιεχομένα γωνία ὑπὸ τὰν ἀχθεῖσαν ἐλάσσων κα εἰς τὰς γωνίας, αἷς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζῃ τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει. διὰ τὸ περιβλέπεσθαί τι τοῦ ἁλίου ἐφ' ἑκάτερα τοῦ κυλίνδρου. ἐπεὶ δ' αἱ ὄψιες οὐκ ἀφ' ἓν σημεῖον βλέποντι, ἀλλὰ ἀπό τινος μεγέθεος, ἐλάφθη τι μέγεθος στρογγύλον, οὐκ ἔλαττον ὄψιος. καὶ τεθέντος τοῦ μεγέθεος ἐπὶ τὸ ἄκρον τοῦ κανόνος, ἐν ᾧ τόπῳ ἁ ὄψις κατεστάθη ἀχθεῖσα εὐθεῖα ἐπιψαύουσα τοῦ μεγέθεος καὶ τοῦ κυλίνδρου. ἁ οὖν περιεχομένα γωνία ὑπὸ τὰν ἀχθεῖσαν ἐλάττων ἦς τᾶς γωνίας, αἷς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζῃ τὰν κορυφὰν ἐχούσας ποτὶ τᾷ ὄψει. τὸ δὲ μέγεθος τὸ οὐκ ἔλαττον ὄψιος, τὸν δὲ τρόπον εὑρίσκεται. δύο κυλίνδρια λαμβάνεται λεπτὰ ἰσοταχέα ἀλλήλαν, τὸ μὲν λευκόν, * τὸ δὲ οὔ. καὶ προστίθενται πρὸς τὰς ὄψιας, τὸ μὲν λευκὸν ἀφεστακὸς ἀπ' αὐτᾶς, τὸ δὲ οὐ λευκὸν ὅς ἐστι ἐγγυτάτω τᾶς ὄψιος, ὥς τε καὶ θιγγάνειν τοῦ προσώπου. εἰ μὲν οὖν τὰ λαφθέντα κυλίνδρια λεπτότατα ἐόντι τᾶς ὄψιας, περιλαμβάνεται ὑπὸ τᾶς ὄψιος τὸ ἐγγὺς κυλίνδριον, καὶ ὁρῆται ὑπὸ αὐτᾶς τὸ λευκὸν εἰκόνα παραπολὺ λεπτοτέραν ἐόντα τᾶν, εἰ δέκα μὴ παραπολυμερέα τινὰ τοῦ λευκοῦ ὁρῶνται ἀφ' ἑκάτερα τᾶς ἐγγὺς τᾶς ὄψιος. λαφθέντων δὲ τῶνδε τῶν κυλίνδρων, ἔπειτα δι' ὧν πῶς τῷ πάχει ἐπισκότει τὸ ἕτερον αὐτῶν τῷ ἑτέρῳ, καὶ οὐ πλείονι τόπῳ τὸ δὴ ταλικοῦτον μέγεθος ἁλίκον ἐστὶ τὸ πάχος τῶν κυλίνδρων τῶν τοῦτο ποιούντων μάλιστα πῶς ἐστὶν οὐκ ἔλαττον τᾶς ὄψιος, οὐδὲ γωνία, οὐκ ἐλάττων τᾶς γωνίας αἷς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει. οὕτως ἐλάφθη ἀποσταθέντος ἀπὸ τοῦ κανονίου τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τᾶς ὄψιος οὕτως ὡς ἐπισκοτεῖν τὸν κύλινδρον ὅλῳ ἁλίῳ, καὶ ἀχθεῖσαν εὐθεῖαν ἀπ' ἄκρου τοῦ κανόνος, ἐν ᾧ τόπῳ ἁ ὄψις κατεστάθη. ἐπιψαύουσαν τοῦ κυλίνδρου ἁ περιεχομένα γωνία ὑπὸ τὰν ἀχθεισᾶν εὐθειᾶν οὐκ ἐλάττων γίνεται τᾶς γωνίας, αἷς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζῃ τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει.

ταῖς δὴ γωνίαις ταῖς οὕτως λαφθείσαις καταμετρηθείσας ὀρθὰς γωνίας ἐγγύτατα ἁ μὲν ἐστιν διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς ρξδ´ ἐλάσσων ἢ ἓν μέρος τούτων. ἁ δὲ ἐλάσσων διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς σ´, μείζων ἢ ἓν μέρος τούτων. δῆλον οὖν, ὅτι ἁ γωνία ἁ ἴσαν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει, ἐλάσσων μέν ἐστιν, ἢ διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς, εἰς ρξδ´. τούτων ἓν μέρος μείζων δέ, ἢ διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς σ´, τούτων ἓν μέρος. πεπιστευμένων δὲ τούτων δεῖ ὧν διάμετρος τοῦ ἁλίου μείζων ἐοῦσα τᾶς τοῦ χιλιαγωνίου πλευρᾶς, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου τᾶς ἐν τῷ κόσμῳ. νοείσθω γὰρ ἐπίπεδον ἐκβεβλημένον διά τε τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς, καὶ διὰ τᾶς ὄψιος, μικρὸν ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα ἐόντος τοῦ ἁλίου. τεμνέτω δὲ τὸ ἐκβεβλημένον ἐπίπεδον, τὸν μὲν κόσμον κατὰ τὸν αβγ κύκλον, τὰν δὲ γᾶν κατὰ τὸν δεζ. τὸν δὲ ἅλιον κατὰ τὸν ση κύκλον. κέντρον δὲ ἔστω τᾶς μὲν γᾶς τὸ θ´, τοῦ δ᾽ ἁλίου τὸ κ´, ὄψις δὲ ἔστω τὸ δ´. καὶ ἄχθωσαν εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι τοῦ ση κύκλου. ἀπὸ μὲν τοῦ δ´ αἱ δ´λ, δ´ξ. ἐπιψαυόντων δέ, κατὰ τὸ ν´ καὶ τὸ τ´. ἀπὸ δὲ τοῦ θ´, αἱ θ´μ, θ´ο. ἐπιψαυόντων δὲ κατὰ τὸ χ´ καὶ τὸ ρ´. τὸν δὲ αβγ κύκλον τεμνόντων αἱ θ´μ, θ´ο κατὰ τὸ α´ καὶ τὸ β´. ἐστι δὴ μείζων ἁ θ´κ τᾶς δ´κ, ἐπεὶ ὑπόκειται ὁ ἅλιος ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα εἶμεν, ὥς τε ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τῶν δ´λ, δ´ξ μείζων ἐστὶ τᾶς γωνίας τᾶς περιεχομένας ὑπὸ τῶν θ´μ, θ´ο. ἁ δὲ περιεχομένα



γωνία ὑπὸ τῶν δ´λ, δ´ξ, μείζων μέν ἐστιν ἢ διακοσιοστὸν μέρος ὀρθᾶς. ἐλάσσων δέ, ἢ τᾶς ὀρθᾶς διαιρεθείσας εἰς ρξδ´. τούτων ἓν μέρος, * ἴσον γωνίαι ἐστὶ τᾷ γωνίᾳ, αἷς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει. ὥς τε ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν θ´μ, θ´ο ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τᾶς ὀρθᾶς διαιρεθείσας εἰς ρξδ´, τούτων ἓν μέρος. ἁ δὲ αβ εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ὑποτεινούσας ἓν τμᾶμα διαιρεθείσας τᾶς τοῦ αβγ κύκλου περιφερείας εἰς χνϛ. ἁ δὲ τοῦ εἰρημένου πολυγωνίου περίμετρος ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ αβγ κύκλου, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὰ μδ´ ποτὶ τᾶ ζ´. διὰ τὸ παντὸς πολυγωνίου ἐγγεγραμμένου ἐν κύκλῳ τὰν περίμετρον ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὰ μδ´ ποτὶ τᾶ ζ´. ἐπίσασαι γὰρ δεδειγμένον ὑφ᾽ ἁμῶν, ὅτι παντὸς κύκλου ἁ περιφέρεια μείζων ἐστὶν ἢ τριπλασίων τᾶς διαμέτρου, ἐλάσσονι ἢ ἑβδόμῳ μέρει, τᾶς δὲ ἐλάσσω λόγον ἔχει, ἢ ἁ βα ποτὶ τὰν θ´κ. ἢ τὰ ια ποτὶ τὰ αρμη. ὥς τε ἐλάσσων ἐστὶν ἁ βα τᾶς θ´κ, ἢ ἑκατοστὸν μέρος. τᾷ δὲ βα ἴσα ἐστὶν ἁ διάμετρος τοῦ ση κύκλου. διότι καὶ ἁ ἡμίσεια αὐτᾶς ἁ φα, ἴσα ἐστὶ τᾷ κρ. ἴσαν γὰρ ἐοῦσαν τὰν θ´κ τᾷ θ´α, ἀπὸ τῶν περάτων κάθετοι ὑποζευγνύμεναι ἐπὶ

τὰν

αὐτὴ ἡ γωνία ἴση τᾷ γωνίᾳ

ταν αὐτὰν γωνίαν. δῆλον οὖν, ὅτι ἁ διάμετρος τοῦ α β γ κύκλου ἐλάσσων ἐστὶν ἢ ἑκατοστὸν μέρος τᾶς θ κ. καὶ ἁ ε θ υ γωνία ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς διαμέτρου τοῦ α β γ κύκλου, ἐπεὶ ἐλάσσων ἐστὶν ὁ δ ε ζ κύκλος τοῦ σ η κύκλου. ἐλάσσονες ἄρα ἐντὶ ἀμφότεραι αἱ θ υ, κ σ, ἢ ἑκατοστὸν μέρος τοῦ θ κ. ὥστε ἁ θ κ ποτὶ τὰν ... ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὰ ρ ποτὶ τὰ ϙθ. καὶ ἐπεὶ ἁ μὲν θ κ ... ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς θ ρ, ἁ δὲ σ υ ἐλάσσων τᾶς δ τ, ἐλάσσω ἄρα καὶ λόγον ἔχει ἁ θ ρ ποτὶ τὰ δ τ, ἢ τὰ ρ ποτὶ τὰ ϙθ, ἐπὶ τῶν θ κ ρ, δ κ τ τριγώνων ὀρθογωνίων ἐόντων, αἱ μὲν κ ρ, κ τ πλευραὶ ἴσαι ἐντί. αἱ δὲ θ ρ, δ τ ἄνισοι. καὶ μείζων ἁ ο ρ α γωνία περιεχομένα ὑπὸ τῶν δ τ, δ κ, ποτὶ ταν γωνίαν τὰν περιεχομέναν ὑπὸ τῶν θ ρ, θ κ, μείζονα μὲν ἔχει λόγον ἢ ἁ θ κ ποτὶ τὰν δ κ. ἐλάσσω δὲ, ἢ ἁ θ ρ ποτὶ τὰν δ τ. εἰ γὰρ κα δυῶν τριγώνων ὀρθογωνίων αἱ μὲν ἅτεραι πλευραὶ αἱ περὶ τὰν ὀρθὰν γωνίαν ἴσαι ἔωντι, αἱ δὲ ἅτεραι ἄνισοι, ἁ μείζων γωνία τῶν ποτὶ ταῖς ἀνίσοις πλευραῖς ποτὶ τὰν ἐλάσσονα, μείζονα μὲν ἔχει λόγον ἢ ἁ μείζων γραμμὰ τᾶν ὑπὸ τὰν ὀρθὰν γωνίαν ὑποτείνουσα, ποτὶ τὰν ἐλάσσονα. ἐλάσσονα δὲ, ἢ ἁ μείζων γραμμὰ τᾶν περὶ ταν ὀρθὰν γωνίαν ποτὶ ταν ἐλάσσονα. ὥστε ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τῶν δ λ, δ ξ ποτὶ τὰν γωνίαν τὰν περιεχομέναν ὑπὸ τῶν θ υ, θ μ, ἐλάσσω λόγον ἔχει, ἢ ἁ θ ρ ποτὶ ταν δ τ. ἅ περ ἐλάσσω λόγον ἔχει, ἢ τὰ ρ ποτὶ τὰ ϙθ. ὥστε ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν δ λ, δ ξ, ποτὶ τὰν γωνίαν τὰν περιεχομέναν ὑπὸ τᾶν θ μ, θ ο, ἐλάσσω λόγον ἔχει ἢ τὰ ρ ποτὶ τὰ ϙθ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν δ λ, δ ξ μείζων ἢ διακοσιοστὸν μέρος, ὀρθᾶς, εἴη κα ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν θ μ, θ ο μείζων, ἢ τᾶς ὀρθᾶς διαιρεθείσας εἰς δισμύρια τούτων ϙθ μέρος, ὥστε μείζων ἐστὶν ἢ διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς σ, καὶ γ τούτων ἓν μέρος. ἄρα ἁ β α μείζων ἐστὶ τᾶς ὑποτεινούσας, ἓν τμᾶμα διῃρημένας τᾶς τοῦ α β γ κύκλου περιφερείας, αἷς ω ι β, τὰν δὲ β ἴσα ἐντὶ ἁ τοῦ ἁλίου διαμετρος. δῆλον οὖν, ὅτι μείζων ἐστὶν ἁ τοῦ ἁλίου διαμετρος τᾶς τοῦ χιλιαγώνου πλευρᾶς.

Τούτων δὲ ὑποκειμένων, δείκνυται καὶ τάδε, οἷον ἁ διαμετρος τοῦ κόσμου τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ μυριοπλασίων, καὶ ἔτι ἁ διαμετρος τοῦ κόσμου ἐλάσσων ἐστὶν ἢ σταδίων μυριάκις, μυριάδες ρ. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου μὴ μείζων εἶμεν ἢ τριακονταπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας, τὰν δὲ διάμετρον τᾶς γᾶς μείζων εἶμεν τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας, δῆλον ὡς ἁ διαμετρος τοῦ ἁλίου ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τριακονταπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς. πάλιν δὲ ἐπεὶ ἐδείχθη ἁ διαμετρος τοῦ ἁλίου μείζων ἐοῦσα τᾶς τοῦ χιλιαγώνου πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου τῶν ἐν τῷ κόσμῳ, φανερὸν ὅτι ἁ τοῦ χιλιαγώνου περίμετρος τοῦ εἰρημένου ἐλάσσων ἐστὶν ἢ χιλιοπλασίων τᾶς διαμέτρου τοῦ ἁλίου. ἁ δὲ διαμετρος τοῦ ἁλίου ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τριακονταπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς. ὥστε ἁ περίμετρος τοῦ χιλιαγώνου ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ τρισμυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς. ἐπεὶ οὖν ἁ περίμετρος τοῦ χιλιαγώνου, τᾶς μὲν διαμέτρου τᾶς γᾶς ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ τρισμυριοπλασίων, τᾶς δὲ διαμέτρου τοῦ κόσμου μείζων ἢ τριπλασίων. δέδεικται γάρ τοι, διότι παντὸς κύκλου ἁ διαμετρος ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ τρίτον μέρος παντὸς πολυγωνίου περιμέτρου, ὁ καὶ εἰς ὁ ε θ πλευρον, καὶ πολυγώνου. ὅτι τοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου μὲν τοῦ κύκλου εἴη, καὶ ἁ διαμετρος τοῦ κόσμου ἐλάσσων ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς. ἁ μὲν οὖν διάμετρος τοῦ κόσμου ἐλάσσων ἐοῦσα, ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τοῦ κόσμου, ἢ σταδίων μυριάκις μυριάδες ρ, ἐκ τούτου δῆλον. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται, τὸν περίμετρον τᾶς γᾶς μὴ μείζονα εἶμεν, ἢ τριακοσίας μυριάδας σταδίων ἐστίν. ἁ δὲ περίμετρος τᾶς γᾶς, μείζων ἐστὶ τριπλασία τᾶς διαμέτρου, διὰ τὸ παντὸς κύκλου τὰν περιφέρειαν μείζονα εἶμεν ἢ τριπλασίων τᾶς διαμέτρου, δῆλον ἁ διάμετρος τᾶς γᾶς ἐλάσσων ἐστὶν ἢ σταδίων ρ μυριάδων. ἐπεὶ οὖν ἁ τοῦ κόσμου διάμετρος ἐλάσσων ἐστὶν ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς, δῆλον ὡς ἁ τοῦ κόσμου διάμετρος ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ σταδίων μυριάκις μυριάδων ρ. περὶ μεγεθέων καὶ τῶν ἀποστημάτων ταῦτα ὑποτίθεμαι. περὶ δὲ τοῦ ψάμμου τάδε. εἴκα ἢ τι συγκείμενον μέγεθος ἐκ τοῦ ψάμμου, μὴ μείζων μάκωνος, τὸν ἀριθμὸν αὐτοῦ μὴ μείζονα εἶμεν μυρίων, καὶ τὰν διάμετρον τᾶς μάκωνος μὴ ἐλάσσονα εἶμεν ἢ τετρωκοστὸν μόριον δακτύλου. ὑποτίθεμαι δὲ τοῦτο, ἐπισκεψάμενος τόνδε τὸν τρόπον. ἐτέθην ἐπὶ κανόνα λεῖον μάκωνας ἐπ' εὐθείας ἐπὶ μίαν κείμενας, ἁπτομένας ἀλλάλων. καὶ ἀνέλαβον αἱ κε μάκωνες πλέονα τόπον δακτυλιαίου μάκεος. ἐλάσσονα θεὶς τὰν διάμετρον τᾶς μάκονος, ὑποτίθεμαι ὡς τετρωκοστομόριον εἶμεν δακτύλου, καὶ μὴ ἐλάσσονα βουλόμενος καὶ διὰ τούτων ἀναμφιλογώτατον δείκνυσθαι τὸ προκείμενον. ἃ μὲν οὖν ὑποτίθεμαι, ταῦτα. χρήσιμον δὲ εἶμεν ὑπολαμβάνω τὰν κατονόμαξιν τῶν ἀριθμῶν ῥηθῆμεν, ὅπως καὶ τῶν ἄλλων οἱ τῷ βιβλίῳ μὴ περιτετεύχατε τῷ ποτὶ Ζεύξιππον γεγραμμένῳ μὴ πλανῶνται, διὰ τὸ μηδὲν εἶμεν

ὑπὲρ αὐτᾶς ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ προειρημένων. συμβαίνει δὴ τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν ἐς τὰ μὲν τῶν μυρίων ὑπάρχειν ἁμῖν παραδεδομένα, καὶ ὑπὲρ τῶν μυρίων μὲν ἀπαρκεόντως ἐγιγνώσκομεν, μυριάδων ἀριθμὸν λέγοντες ἐς τοὺς ποτὶ τὰς μυριάδας. ἔστω οὖν ἁμῖν, οἱ μὲν νῦν εἰρημένοι ἀριθμοὶ ἐς τὰν μυρίαν μυριάδων πρῶτοι καλούμενοι. τῶν δὲ πρώτων ἀριθμῶν αἱ μυρίαι μυριάδες μονὰς καλείσθω δευτέρων καὶ ἀριθμῶν τῶν δευτέρων μονάδες, καὶ ἐκ τᾶν μονάδων δεκάδες, καὶ ἑκατοντάδες καὶ χιλιάδες, καὶ μυριάδες ἔσται μυρίων μυριάδων. πάλιν δὲ καὶ αἱ μύριαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν, μονὰς καλείσθω τρίτων ἀριθμῶν, καὶ ἀριθμείσθω τῶν τριῶν ἀριθμῶν μονάδες καὶ αἱ ἀπὸ τᾶν μονάδων δεκάδες, καὶ ἑκατοντάδες, καὶ χιλιάδες, καὶ μυριάδες, ἔσται μυρίαι μυριάδες. τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ τῶν τρίτων ἀριθμῶν μυρίαι μυριάδες μονὰς καλείσθω τετάρτων ἀριθμῶν, καὶ αἱ τῶν τετάρτων ἀριθμῶν μύριαι μυριάδες μονὰς καλείσθω πέμπτων ἀριθμῶν, καὶ ἀεὶ οὕτως προάγοντες οἱ ἀριθμοὶ τὰ ὀνόματα ἔχοντες ἔσται μυριάκις μυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίαι μυριάδες. ἀπαρκέοντι μὲν οὖν καὶ ἐπὶ τοσοῦτον οἱ ἀριθμοὶ γινωσκόμενοι. ἔξεστι δὲ καὶ ἐπὶ πλέον προάγειν. ἔστων γὰρ οἱ μὲν νῦν εἰρημένοι ἀριθμοὶ πρώτης περιόδου καλούμενοι, ὁ δὲ ἔσχατος ἀριθμὸς τᾶς περιόδου μονὰς καλείσθω δευτέρας περιόδου πρώτων ἀριθμῶν. πάλιν δὲ καὶ αἱ μυρίαι μυριάδες τᾶς δευτέρας περιόδου δευτέρων ἀριθμῶν. ὁμοίως δὲ καὶ τούτων ὁ ἔσχατος μονὰς καλείσθω δευτέρας περιόδου τρίτων ἀριθμῶν. καὶ ἀεὶ οὕτως οἱ ἀριθμοὶ προάγοντες, τὰ ὀνόματα ἐχόντων τᾶς δευτέρας περιόδου, ἔσται μυριάκις μυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίαι μυριάδες. πάλιν δὲ καὶ ὁ ἔσχατος ἀριθμὸς τᾶς δευτέρας περιόδου μόνας καλείσθω τρίτας περιόδου πρώτων ἀριθμῶν, καὶ ἀεὶ οὕτως προαγόντων ἔσται μυριάκις μυριοστᾶς περιόδου μυριάκις μυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίαι μυριάδες. τούτων δὲ οὕτως κατωνομασμένων, εἴκα ἐῶντι ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἑξῆς κείμενοι, ὁ δὲ παρὰ τὰν μονάδα δεκάς, τοὶ ὀκτὼ εἶεν αὐτῶν, οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων ἀριθμῶν καλουμένων ἐσσοῦνται. οἱ δὲ μετ' αὐτοὺς ἄλλοι ὀκτὼ τῶν δευτέρων καλούμενοι, καὶ οἱ ἄλλοι τὸν αὐτὸν τρόπον τούτοις τῶν συνωνύμων καλουμένων ἐσσοῦνται ἀποστάσει τᾶς ὀκτάδος τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τᾶς πρώτας ὀκτάδος τῶν ἀριθμῶν. ἁ μὲν οὖν πρώτας ὀκτάδος τῶν ἀριθμῶν ὄγδοος ἐστὶν ἀριθμὸς χίλιαι μυριάδες. τᾶς δὲ δευτέρας ὀκτάδος ὁ πρῶτος, ἐπεὶ δεκαπλασίων ἐστὶ τοῦ πρὸ αὐτοῦ μυρίαι μυριάδες ἐσσεῖται. οὗτος δὲ ἐστὶ μονὰς τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. ὁ δὲ ὄγδοος τᾶς δευτέρας ὀκτάδος ἐστὶ χίλιαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. πάλιν δὲ καὶ τᾶς τρίτας ὀκτάδος, ὁ πρῶτος. ἐπεὶ δεκαπλασίων ἐστὶ τοῦ πρὸ αὐτοῦ μυρίαι μυριάδες ἐσσεῖται τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. οὗτος δὲ ἐστὶ μονὰς τῶν τρίτων ἀριθμῶν. φανερὸν δέ, ὅτι πολλαὶ ὀκτάδες ἐξοῦντι ὡς εἴρηται. χρήσιμον δὲ ἐστὶ καὶ τόδε γιγνωσκόμενον. εἴκα ἀριθμῶν ἀπὸ τᾶς μονάδος ἀνάλογον ἐόντων πολλαπλασιάζοντες, τινὲς ἀλλάλους τῶν ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, ὅταν ὁμοίως ἐσσεῖται ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἀπέχων. ἀπὸ μὲν οὖν τῶν πολλαπλασιαξάντων ἀλλάλους, ὅσους ὁ ἐλάσσων τῶν πολλαπλασιαξάντων ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἀπέχη. ἀπὸ δὲ τᾶς μονάδος ἀφέξει ἑνὶ ἐλάσσονας, ἢ ὅσος ἐστὶν ἀριθμὸς συναμφοτέρων, ὡς ἀπέχοντι ἀπὸ μονάδος οἱ πολλαπλασιάξαντες ἀλλάλους. ἔστων γὰρ ἀριθμοί τινες ἀνὰ λόγον ἀπὸ μονάδος, οἱ α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ι, κ, λ. μονὰς δὲ ἔστω ὁ α, καὶ πεπολλαπλασιάσθω ὁ δ τῷ θ. ὁ δὲ γενόμενος ἔστω ὁ χ λ. εἰλήφθω δὴ ὁ θ κ τᾶς ἀναλογίας ὁ φ λ, ἀπέχων ἀπὸ τοῦ θ τοσούτους, ὅσους ὁ δ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει. δεικτέον ὅτι ἴσον ἐστὶν ὁ χ τῷ λ. ἐπεὶ οὖν ἀνάλογον ἐόντων ἴσον ἴσους ἀπέχει ὅτε δ ἀπὸ τοῦ α, καὶ ὁ λ ἀπὸ τοῦ θ, τὰν αὐτὰν ἔχει λόγον ὁ δ ποτὶ τὸν α, ὃν ὁ λ ποτὶ τὸν θ. πολλαπλασίων δέ ἐστιν ὁ δ τοῦ α, τῷ δ. πολλαπλασίων ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ λ τοῦ θ τῷ δ. ὥστε ἴσος ἐστὶν ὁ λ τῷ χ. δῆλον οὖν ὅτι γενόμενος ἐκ τᾶς ἀναλογίας τέ ἐστιν καὶ ἀπὸ τοῦ μείζονος πολλαπλασιαξάντων ἀλλάλους ἴσον ἀπέχων, ὅσους ὁ ἐλάσσων ἀπὸ τᾶς μονάδος ἀπέχει. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει ἑνὶ ἐλάσσονας ἢ ὅσος ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς συναμφοτέρων οὓς ἀπέχοντι ἀπὸ τᾶς μονάδος. οἵδε μὲν γὰρ οἱ α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, τοσοῦτοι ἐντὶ ὅσους ὁ θ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει. οἱ δὲ ι κ λ ἑνὶ ἐλάσσονες, ἢ ὅσους ὁ δ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει. σὺν γὰρ τῷ θ, τοσοῦτοι ἐντί.

Τούτων δὲ τῶν μὲν ὑποκειμένων, τῶν δὲ ἀποδεδειγμένων τὸ προκείμενον δειχθήσεται. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται τὰν διάμετρον τᾶς μάκωνος μὴ ἐλάσσονα εἶμεν, ἢ τετρωκοστημόριον δακτύλου, δῆλον ὡς ἁ σφαῖρα δακτυλιαίαν ἔχουσα τὰν διάμετρον, οὐ μείζων ἐστίν, ἢ ὥστε χωρεῖν μάκωνας ἑξακισμυρίας καὶ τετρακισχιλίας. τᾶς γὰρ σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον τετρακοσομόριον δακτύλου πολλαπλασία ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ ἀριθμῷ. δέδεικται γὰρ τοῦτο ὅτι αἱ σφαῖραι τριπλάσιον λόγον ἔχοντι ποτὶ ἀλλάλας τᾶν διαμέτρων. ἐπεὶ δὲ ὑπόκειται καὶ τοῦ ψάμμου τὸν ἀριθμόν, εἰς τὸ τᾶς μάκωνος μέγεθος, μὴ μεῖζον εἶμεν μυρίων. δῆλον ὡς εἰ πληρωθείη ψάμμου ἁ σφαῖρα ἁ δακτυλιαίαν

ἔχουσα

ἔχουσα τὰν διάμετρον, ὃ μεῖζον κα εἴη ὁ ἀριθμὸς τοῦ ψάμμου ἢ μυριάκις τὰ ἐξακισμύρια καὶ τετρακισχίλια. οὗτος δέ ἐστιν ὁ ἀριθμὸς, μονάδες τε ἀριθμὸς τῶν δευτέρων ἀριθμῶν, καὶ τῶν πρώτων μυριάδες τετρακισχίλιαι. ἐλάσσων οὖν ἐστιν ἢ ι̅ μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. ἁ δὲ τῶν ρ̅ δακτύλων ἔχουσα τὰν διάμετρον σφαῖρα πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς δακτυλιαίας ἐχούσας τὸν διάμετρον ἐφ᾽ ταῖς ρ̅ μυριάδεσσι, διὰ τὸ τριπλάσιον ἔχειν ποτ᾽ ἀλλάλαν τὰν διάμετρον τᾶς σφαίρας. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα τηλικαύτη τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον δακτύλων ρ̅, δῆλον ὡς ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθέντων τᾶν δεκαμονάδων τῶν δευτέρων ἀριθμῶν ταῖς ρ̅ μυριάδεσσιν. ἐπεὶ δὲ τῶν δευτέρων ἀριθμῶν δέκα μονάδες, δέκατός ἐστιν ἀριθμὸς ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἐόντων τῶν δέκα πλευρῶν ὅρων ἀνάλογον. αἱ δὲ ἑκατὸν μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὡς ὁ γενόμενος ἐκτὸς ἐσσεῖται τῶν ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἑκκαιδέκατος ἀπὸ μονάδος. δέδεικται γὰρ ὅτι ἐν ἐλάσσονας ἀπὸ τᾶς μονάδος ἀσσός ἐστιν ἐλάττων συναμφοτέρου, ὅσους ἀπέχοντι ἀπὸ μονάδος οἱ πολλαπλασιάξαντες ἀλλάλους. τῶν δὲ ἑκκαίδεκα τούτων ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ τῶν δευτέρων. καὶ ὁ ἔσχατος ἐστὶν αὐτῶν χίλιαι μυριάδες ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ρ̅ δακτύλων ἐχούσῃ, ἐλάττων ἐστὶν ἢ χίλιαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. πάλιν δὲ καὶ ἁ σφαῖρα, ἁ τῶν μυρίων δακτύλων ἔχουσα τὰν διάμετρον πολλαπλασία τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον ρ̅ δακτύλων ταῖς ρ̅ μυριάδεσσι. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ ἔχουσα σφαῖρα τὰν διάμετρον μυριάδων δακτύλων, δῆλον ὡς ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου πολλαπλασιασθείσαν τὰν χιλιᾶν μυριάδων τῶν δευτέρων ἀριθμῶν ταῖς ρ̅ μυριάδεσσιν. ἐπεὶ δ᾽ αἱ μὲν τῶν δευτέρων ἀριθμῶν χίλιαι μυριάδες ἑκκαιδέκατός ἐστιν ἀριθμὸς ἀπὸ μονάδος, ἀναλογίας δὲ ρ̅ μυριάδες ἕβδομος, ἀπὸ μονάδος ἐν τᾷ αὐτᾷ ἀναλογίᾳ, δῆλον ὡς ὁ γενόμενος ἐσσεῖται δύο καὶ εἰκοστὸς τῶν ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἀπὸ μονάδος. τῶν δὲ δύο καὶ εἴκοσι τούτων, ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐστίν. ὀκτὼ δὲ οἱ μετὰ τοὺς δευτέρων καλουμένων. οἱ δὲ λοιποὶ ἐκ τῶν τρίτων καλουμένων, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ δέκα μυριάδες τῶν τρίτων ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μεγέθους ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ μυρίων δακτύλων, ἔλασσον ἐστὶν ἢ ι̅ μυριάδες τρίτων ἀριθμῶν. καὶ ἐπεὶ ἐλάσσων ἐστὶν ἁ σταδιαίαν ἔχουσα τὰν διάμετρον σφαῖρα, τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσης τὰν διάμετρον μυρίων δακτύλων, δῆλον ὅτι καὶ τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μεγέθεος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδιαίαν, ἔλασσον ἐστὶν ἢ ι̅ μυριάδες τῶν τρίτων ἀριθμῶν. πάλιν δὴ ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον ρ̅ σταδίων, πολλαπλασίων ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον σταδιαίαν ταῖς ρ̅ μυριάδεσσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἔχουσα τὰν διάμετρον ρ̅ σταδίων, δῆλον ὅτι ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ, πολλαπλασιασθεισᾶν τὰν δέκα μυριάδων τρίτων ἀριθμῶν ταῖς ρ̅ μυριάδεσσι. καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν τῶν τρίτων ἀριθμῶν δέκα μυριάδες δύο καὶ εἰκοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ρ̅ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὡς ὁ γενόμενος ἐσσεῖται ὀκτὼ καὶ εἰκοστὸς ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἀπὸ μονάδος, τῶν δὲ ὀκτὼ καὶ εἴκοσι τούτων, ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ὀκτὼ τῶν τρίτων, οἱ δὲ λοιποὶ τέσσαρες τῶν τετάρτων καλουμένων, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ χίλιαι μυριάδες τῶν τετάρτων ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν, ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μεγέθεος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων ρ̅, ἔλασσον ἐστὶν ἢ χίλιαι μονάδες. τῶν δὲ τετάρτων ἀριθμῶν, πάλιν δὴ ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον μυρίων σταδίων, πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον σταδίων ρ̅, ταῖς ρ̅ μυριάδεσσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων μυρίων, δῆλον ὅτι ἐλάσσων ἐσσεῖται τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθεισᾶν τᾶν χιλιᾶν μονάδων τῶν τετάρτων ἀριθμῶν ταῖς ρ̅ μυριάδεσσιν. ἐπεὶ δὲ αἱ μὲν τῶν τετάρτων ἀριθμῶν χίλιαι μονάδες ὀκτὼ καὶ εἰκοστός ἐστιν, ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον. αἱ δὲ ἑκατὸν μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος, ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὅτι ὁ γενόμενος ἐσσεῖται ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, τέταρτος καὶ τριακοστὸς ἀπὸ μονάδος. τῶν δὲ τεσσάρων καὶ τριάκοντα τούτων ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ τῶν δευτέρων. καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν τρίτων. καὶ οἱ μετὰ τούτους ὀκτὼ, τῶν

τετάρτων. οἱ δὲ λοιποὶ δύο τῶν πέμπτων καλουμένων ἐσοῦνται. καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ δέκα μονάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. δῆλον οὖν ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων μυρίων, ἔλασσον ἐστὶν ἢ ι̅ μονάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. πάλιν δὴ ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων ρ̅, μυριάδων πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς σφαίρας τὰν διάμετρον ἐχούσας σταδίων μυρίων, ταῖς ρ̅ μυριάδεσσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαῦτα, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων ρ̅ μυριάδων, δῆλον ὡς ἐλάσσων ἐστὶν ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασίας θεῖσαν. τᾶν δὲ μονάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν ταῖς ρ̅ μυριάσι. καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν τῶν πέμπτων ἀριθμῶν δέκα μονάδες, τέταρτος ἐστὶ καὶ τριακοστὸς ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ρ̅ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὅτι ὁ γενόμενος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἐσεῖται τετρωκοστὸς ἀπὸ μονάδος, τῶν δὲ τεσσαράκοντα τούτων ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τῇ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί. οἱ δὲ μετὰ ταῦτα ἄλλοι ὀκτὼ τῶν δευτέρων. καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν τρίτων. οἱ δὲ μετὰ τοὺς τρίτους ὀκτὼ τῶν τετάρτων. οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ τῶν πέμπτων καλουμένων. καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ χίλιαι μυριάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων ρ̅ μυριάδες, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ χίλιαι μυριάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. ἁ δὲ τὰν διάμετρον ἔχουσα σφαῖρα σταδίων μυριὰς μυριάδων πολλαπλασίων ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον σταδίων ρ̅ μυριάδων ταῖς ρ̅ μυριάδεσσιν. εἰ δὲ γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαῦτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων μυριὰς μυριάδων, φανερὸν ὅτι ἐλάσσων ἐσεῖται τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλάσιον χιλίαν μυριάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν ταῖς ρ̅ μυριάσιν. ἐπεὶ δ᾽ αἱ μὲν τῶν πέμπτων ἀριθμῶν χίλιαι μυριάδες τετρακοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ρ̅ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὡς ὁ γενόμενος ἐσεῖται ἕκτος καὶ τετρακοστὸς ἀπὸ μονάδος. τῶν δὲ τεσσαράκοντα καὶ ἓξ τούτων εἰμὲν, οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, ὀκτὼ δὲ οἱ μετὰ τοὺς τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν τρίτων. οἱ δὲ μετὰ τοὺς τρίτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν τετάρτων, καὶ οἱ μετὰ τοὺς τετάρτους ὀκτὼ τῶν πέμπτων, οἱ δὲ λοιποὶ τῶν ἐκ τῶν καλουμένων ἐντί, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτός ἐστι ι̅ μυριάδων τῶν ἐκτῶν ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν, ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων μυριάκις μυριάδων μυρίων ἐλάσσων ἐστὶν ἢ ι̅ μυριάδες τῶν ἐκτῶν ἀριθμῶν. ἁ δὲ τὰν διάμετρον ἔχουσα σφαῖρα σταδίων μυριάκις μυριάδων ρ̅, πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον σταδίων μυριάδας μυρίας, ταῖς ρ̅ μυριάδεσσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαῦτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων μυριάκις μυριάδων, φανερὸν ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος ἔλασσον ἐσεῖται τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασίων τᾶν ι̅ μυριάδων, τῶν ἐκτῶν ἀριθμῶν ταῖν ρ̅ μυριάδες. ἐπεὶ δ᾽ αἱ μὲν τῶν ἐκτῶν ἀριθμῶν δέκα μυριάδες ἕκτος καὶ τεσσαρακοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ρ̅ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος, ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὅτι ὁ γενόμενος ἐσσεῖται δύο καὶ πεντακοστὸς ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας. τῶν δὲ δύο καὶ πεντήκοντα τούτων, οἱ μὲν ὀκτὼ καὶ τεσσαράκοντα σὺν τᾷ μονάδι, οἵ τε πρῶτοι καλούμενοι ἐντὶ καὶ οἱ δεύτεροι καὶ τρίτοι καὶ τέταρτοι καὶ πέμπτοι καὶ ἕκτοι. οἱ δὲ λοιποὶ τέσσαρες τῶν ἑβδόμων καλουμένων ἐντί, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ χίλιαι μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσα τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὸν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων μυριάκις μυριάδων ρ̅, ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ ͵α μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ἁ τοῦ κόσμου διάμετρος ἐλάσσων ἐοῦσα σταδίων μυριάκις μυριάδων ρ̅, δῆλον ὅτι καὶ τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῷ κόσμῳ, ἔλασσον ἐστὶν ἢ ͵α μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. ὅτι μὲν ὁμοίως τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν πλείστων ἀστρολόγων καλουμένῳ κόσμῳ, ἔλασσον ἐστὶν ἢ ͵α μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν, δέδεικται. ὅτι δὲ καὶ τὸ πλῆθος τοῦ ψάμμου τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ ταλικαύτᾳ, ἁλίκαν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν, εἰμὲν ἐλάσσων ἐστὶν ἢ ͵α μυριάδες τῶν ὀγδόων ἀριθμῶν, δειχθήσεται. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται τὰν γᾶν τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον ποτὶ τὸν ὑφ᾽ ἁμῶν εἰρημένον κόσμον, ὃν ἔχει λόγον ὁ εἰρημένος κόσμος ποτὶ τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν, ἂν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται. καὶ αἱ διάμετροι τᾶν σφαιρᾶν τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτὶ ἀλλάς. ἁ δὲ τοῦ κόσμου διάμετρος τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς δέδεικται ἐλάσσων ἐοῦσα ἢ μυριοπλασίαν. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ ἁ διάμετρος τᾶς τῶν ἀπλανέων ἄστρων

σφαίρας

σφαίρας ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τοῦ κόσμου. ἐπειδὴ αἱ σφαῖραι τριπλάσιον λόγον ἔχοντι ποτ᾽ ἀλλάλαν τᾶν διαμέτρων, φανερὸν, ὅτι ἁ τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖρα ἂν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται, ἐλάττων ἐστὶν ἢ μυριάκις μυριάδεσσι πολλαπλασίων τοῦ κόσμου. δέδεικται γὰρ τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῷ κόσμῳ, ἔλασσον ἐστὶν ἢ ͵α μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. δῆλον οὖν ὅτι εἰ γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκαν ὁ Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν εἶμεν, ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασίαν τᾶν χιλίων μονάδων, ταῖς μυριάκις μυρίαις μυριάδεσσι. καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν τῶν ἑβδόμων ͵α μονάδες δύο καὶ πεντηκοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος. ἀνάλογον δὲ μυριάκις μύριαι μυριάδες τρισκαιδέκατος ἀπὸ μονάδος, ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας δῆλον, ὅτι ὁ γενόμενος ἐσσεῖται τέταρτος καὶ ἑξηκοστὸς ἀπὸ μονάδος, ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας. οὗτος δὲ ἐστὶ τῶν ὀγδόων ὄγδοος καὶ πενταχίλιαι μυριάδες τῶν ὀγδόων ἀριθμῶν. φανερὸν τοίνυν, ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαίρᾳ ἂν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται, ἔλασσον ἐστὶν ἢ ͵α μυριάδες τῶν ὀγδόων ἀριθμῶν. ταῦτα δὲ βασιλεῦ Γέλων, τοῖς μὲν πολλοῖς καὶ μὴ κεκοινωνηκότεσσι τῶν μαθημάτων οὐκ εὔπιστα φανήσειν ὑπολαμβάνω, τοῖς δὲ μεταλελαβηκότεσσι καὶ περὶ τῶν ἀποστημάτων καὶ τῶν μεγέθεων τᾶς τε γᾶς καὶ τοῦ ἁλίου, καὶ τᾶς σελάνας καὶ τοῦ ὅλου κόσμου πεφροντικότεσσι πιστὰ, διὰ τὰν ἀπόδειξιν ἐσσεῖσθαι. διόπερ ᾠήθην καὶ τινας οὐκ ἀνάρμοστον εἴη ἔτι ἐπιθεώρηται ταῦτα.

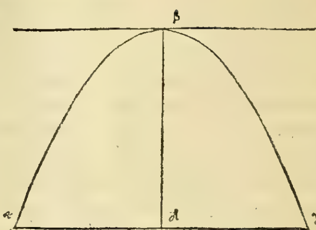
ΑΡΧΙΜΗΔΟΥ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ.

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΔΟΣΙΘΕΩ ΕΥΠΡΑΤΤΕΙΝ.

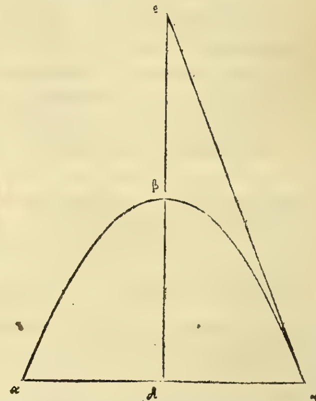
Ἀκούσας Κόνωνα μὲν τετελευτηκέναι, ὃς ἦν ἔτι λείπων ἡμῖν ἐν φιλίᾳ, τινὰ δὲ Κόνωνος γνώριμον γεγενῆσθαι καὶ γεωμετρίας οἰκεῖον εἶμεν, τοῦ μὲν τετελευτηκότος εἵνεκεν ἐλυπήθημεν, ὡς καὶ φίλου τοῦ ἀνδρὸς γενομένου, καὶ ἐν τοῖς μαθήμασι θαυμαστοῦ τινος. ἐπεχειρήσαμεν δὲ ἀποστεῖλαι, γράψαντες ὡς Κόνωνι γράφειν ἐγνωκότες εἶμεν γεωμετρικῶν θεωρημάτων, ὃ πρότερον μὲν οὐκ ἦν τεθεωρημένον. νῦν δὲ ὑφ᾽ ὑμῶν τεθεώρηται, πρότερον μὲν διὰ μηχανικῶν εὑρεθὲν, ἔπειτα δὲ καὶ διὰ τῶν γεωμετρικῶν ἐπιδειχθέν, τῶν μὲν πρότερον περὶ γεωμετρίαν πραγματευθέντων ἐπεχείρησάν τινες γράφειν, ὡς δυνατὸν ἐὸν κύκλῳ τῷ δοθέντι, καὶ κύκλου τμήματι τῷ δοθέντι χωρίον εὑρεῖν εὐθύγραμμον ἴσον. καὶ μετὰ ταῦτα τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς ὅλου τοῦ κώνου τομᾶς καὶ εὐθείας τετραγωνίζειν ἐπειρῶντο, λαμβάνοντες οὐκ εὐπαραχώρητα λήμματα, ὅπερ αὐτοῖς ὑπὸ τῶν πλείστων οὐχ εὑρισκόμενα ταῦτα κατεγνώσθεν, τὸ καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τμῆμα περιεχόμενον, οὐδένα τῶν πρώτων ἐγχειρήσαντα τετραγωνίζειν ἐπιστάμεθα, ὃ δὴ νῦν ὑφ᾽ ὑμῶν εὕρηται. δείκνυται γὰρ ὅτι πᾶν τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἐπίτριτον ἐστὶ τοῦ τριγώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν, καὶ ὕψος ἴσον τῷ τμήματι, λαμβανομένου τοῦδε τοῦ λήμματος εἰς τὰν ἀπόδειξιν αὐτοῦ, τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχὰν ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, δυνατὸν εἶμεν αὐτὰν συντιθεμέναν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου. κέχρηνται δὲ καὶ οἱ πρότερον γεωμέτραι τῷδε τῷ λήμματι. τούς τε γὰρ κύκλους διπλασίονα λόγον ἔχειν πρὸς ἀλλήλους τῶν διαμέτρων ἀποδεδείχασιν αὐτῷ τῷ λήμματι χρώμενοι. καὶ τὰς σφαίρας ὅτι τριπλασίονα λόγον ἔχοντι πρὸς ἀλλήλας τᾶν διαμέτρων. ἔτι δὲ καὶ πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τᾷ πυραμίδι, καὶ ὕψος ἴσον. καὶ διότι πᾶς κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τῷ κώνῳ, καὶ ὕψος ἴσον. ὁμοίως τῷ προκειμένῳ λήμματι λαμβάνοντες ἔγγραφον συμβαίνει τῶν προειρημένων θεωρημάτων ἕκαστον μηδενὸς ἧσσον τοῦ τούτου λήμματος, ἀποδεδειγμένων πεπιστευκέναι. ἄρτι δὲ εἰς τὰν ὁμοίαν πίστιν τούτου ἀναγμένον τῶν ὑφ᾽ ἡμῶν ἐκδιδομένων. ἀναγράψαντες οὖν αὐτοῦ τὰς ἀποδείξεις, ἀποστέλλομεν πρῶτον μὲν, ὡς διὰ τῶν μηχανικῶν ἐθεωρήθη. μετὰ ταῦτα δὲ καὶ ὡς διὰ τῶν γεωμετρουμένων ἀποδείκνυται. προγράφεται δὲ καὶ στοιχεῖα κωνικὰ χρείαν ἔχοντα εἰς τὰν ἀπόδειξιν. ἔρρωσο.

Εἰκα

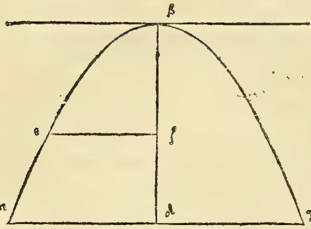
α Εἴκα ᾖ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ β γ, ᾖ δὲ ἁ μὲν β δ παρὰ τὰν διάμετρον ἢ αὐτὰ διάμετρος, ἁ δὲ α δ γ παρὰ τὰν κατὰ τὸ β, ἐπιψαύουσαν τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ β, ἐσσοῦνται αἱ α δ, δ γ ἴσαι.



β Εἴκα ᾖ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ α β, ᾖ δὲ ἁ β δ παρὰ τὰν διάμετρον, ἢ αὐτὰ διάμετρος, ἁ δὲ α δ γ παρὰ τὰν κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσαν τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, καὶ ἁ γ ε τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς ἐπιψαύουσα κατὰ τὸ γ, ἐσσοῦνται αἱ δ β, β ε ἴσαι.



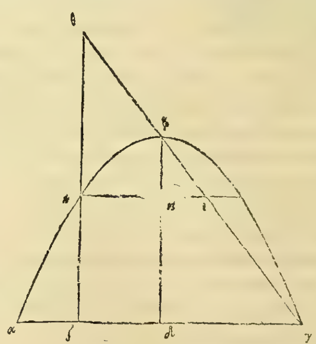
γ Εἴκα ᾖ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ α β, ᾖ δὲ β δ παρὰ τὰν διάμετρον ἢ αὐτὰ ἁ διάμετρος, καὶ ἀχθῶσι τινὲς αἱ α δ, ε ζ παρὰ τὰν κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσαν τᾶς τοῦ



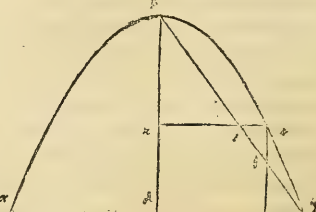
κώνου τομᾶς, ἐσσεῖται ὡς ἁ β δ μάκει ποτὶ τὰν β ζ, οὕτως δυνάμει ἁ α δ ποτὶ τὰν ε ζ. ἀποδέδεικται δὲ ταῦτα ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις.

δ Ἔστω τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας, καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, τὸ α β γ. ἁ δὲ β δ ἀπὸ μέσας τᾶς α γ παρὰ τὰν διάμετρον ἄχθω, ἢ αὐτὴ διάμετρος ἔστω, καὶ ἁ β γ εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω. εἰ δὴ καταχθείη τις ἄλλη ἁ ζ θ παρὰ τὰν β δ τέμνουσαν,* τὰν διὰ τῶν α γ εὐθειᾶν, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ ζ θ ποτὶ τὰν θ η, ὃν ἁ δ α ποτὶ τὰν δ ζ. ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ κ παρὰ τὰν α γ ἁ κ η. ἔστιν ἄρα ὡς ἁ β δ ποτὶ τὰν β κ μάκει, οὕτως ἁ δ γ ποτὶ τὰν κ η δυνάμει. ἀποδέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐσσεῖται ἄρα ὡς ἁ β γ ποτὶ τὰν β ι μάκει, οὕτως ἁ β γ ποτὶ τὰν β θ δυνάμει. ὥστε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ β γ ποτὶ τὰν β θ, ὃν ἁ γ θ ποτὶ τὰν θ ι. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γ δ ποτὶ τὰν δ ζ, οὕτως ἁ θ ζ ποτὶ τὰν θ η. τᾷ δὲ δ γ ἴσα ἐστὶν ἁ δ α. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ δ α ποτὶ τὰν δ ζ, ὃν ἁ ζ θ ποτὶ τὰν θ η.

*τέμνουσα ἑκατέραν τὰν α γ β εὐθεῖαν



ε Ἔστω τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὸ α β γ. καὶ ἄχθω ἀπὸ τοῦ α παρὰ τὰν διάμετρον ἁ ζ α, ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς



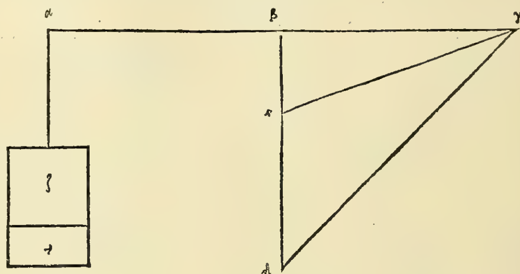
κατὰ

κατὰ τὸ γ, ἁ γζ. εἰ δή τις ἀχθείη ἐν τῷ ζαγ τριγώνῳ παρὰ τὰν αζ, τὸν αὐτὸν λόγον ἁ ἀχθεῖσα τετμήσεται ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἁ αγ ὑπὸ τᾶς ἀχθείσας (ἀνάλογον) ὁμόλογον δὲ ἐσσεῖται τὸ τμᾶμα τᾶς αγ ποτὶ τὸ α, τῷ τμάματι τᾶς ἀχθείσας τῷ ποτὶ τᾷ α. ἄχθω γάρ τις ἁ δε παρὰ τὰν αζ. καὶ τεμνέτω πρῶτον ἁ δε τὰν αγ δίχα. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ αβγ, καὶ ἀγμένα ἁ βδ παρὰ τὰν διάμετρον. αἱ δὲ αδ, δγ ἴσαι. ἐσσεῖται τᾷ αγ παράλληλος ἁ κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. πάλιν ἐπεὶ παρὰ τὰν διάμετρον ἐστὶν ἁ δε, καὶ ἀπὸ τοῦ γ ἁ γε, ἅπτεται ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἁ δὲ δγ παράλληλος τᾷ κατὰ τὸ β ἐπιψαυούσᾳ, ἴσα ἐστὶν ἁ εβ τᾷ βδ, ὥστε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ αδ ποτὶ τὰν δγ, ὃν ἁ δβ ποτὶ τὰν βε. εἰ μὲν οὖν δίχα τέμνει ἁ ἀχθεῖσα τὰν αγ, δέδεικται. εἰ δὲ μή, ἄχθω τις ἄλλα ἁ κλ παρὰ τὰν αζ. δεικτέον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ακ ποτὶ τὸν κγ, ὃν ἁ κθ ποτὶ τὰν θλ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἁ βε τᾷ βδ, ἴση ἐστὶ καὶ ἁ ιλ τᾷ κι, τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει ποτὶ τὰν κι, ὃν ἁ αγ ποτὶ τὰν δα. ἔχει δὲ καὶ ἁ κι ποτὶ τὰν θκ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ δα ποτὶ τὰν ακ. δέδεικται γὰρ ἐν τῷ προτέρῳ, ὡς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ κθ ποτὶ τὰν θλ, ὃν ἁ ακ ποτὶ τὰν κγ. δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

Νοείσθω δὲ τό, ὅτε ἐστὶ τὸ ἐν τᾷ θεωρίᾳ προκείμενον ὁρώμενον ὡς ὀρθοῦ ποτὶ τὸν ὁρίζοντα καὶ τᾶς αβ γραμμᾶς. ἔπειτα τὰ μὲν ὡς τὰ αὐτὰ τῷ δ κάτω νοείσθω, τὰ δὲ ὡς θάτερα ἄνω. τὸ δὲ β[δ]γ τρίγωνον ἔστω ὀρθογώνιον, ὀρθὰν ἔχον τὰν ποτὶ τᾷ β γωνίαν, καὶ τὰν βγ πλευρὰν ἴσαν τᾷ [ἡμισ]είᾳ τοῦ ζυγοῦ, δῆλον ὅτι ἴσης οὔσης τᾶς αβ τᾷ βγ. κρεμάσθω δὲ τὸ τρίγωνον ἐκ τῶν β, γ σαμείων. κρεμάσθω δὲ καὶ ἄλλο χωρίον τὸ ζ ἐκ τοῦ ἑτέρου μέρους τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ α. καὶ ἰσορροπείτω τὸ ζ χωρίον κατὰ τὸ α, κρεμάμενον τῷ βδγ τριγώνῳ, οὕτως ἐόντι ὡς νῦν κεῖται. φαμὶ δὴ τὸ ζ χωρίον τοῦ βδγ τριγώνου μέρος τρίτον εἶναι. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται ἰσορρόπων ὁ ζυγὸς εἶναι, καὶ ἁ αγ γραμμὰ αὐτόν. ὁρίζονται δὲ ποτ᾽ ὀρθὰς ἀγόμεναι τᾷ αγ ἐν τῷ ὀρθῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸν ὁρίζοντα, καθέτοι ἐσσοῦνται ἐπὶ τὸν ὁρίζοντα. τετμήσθω δὴ ἁ βγ γραμμὰ κατὰ τὸ ε οὕτως, ὥστε διπλασίονα εἶμεν τὰν γε τᾶς εβ. καὶ ἄχθω παρὰ τὰν δβ ἁ κε. καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ θ. τοῦ δὴ βδγ τριγώνου κέντρον βάρεος ἐστὶ τὸ θ σαμεῖον. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς μηχανικοῖς. εἰ καὶ οὖν τοῦ βδγ τριγώνου, ὁ μὲν κατὰ τὰ βγ κρέμασις λυθείη, κατὰ δὲ τὸ ε κρεμασθῇ, μένει τὸ τριγώνιον, ὡς νῦν ἔχει. ἕκαστον γὰρ τῶν κρεμαμένων ἐξ οὗ σαμείου κατασταθῇ ἐν μένει, ὥστε κατὰ κάθετον εἶμεν τό τε σαμεῖον τοῦ κρεμαστοῦ, καὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ κρεμαμένου. δέδεικται οὖν καὶ τοῦτο. ἐπεὶ οὖν τὰν αὐτὰν ἕξει κατάστασιν τὸ βγδ τρίγωνον ποτὶ τὸν ζυγόν, ἰσορροπήσει ὁμοίως τὸ ζ χωρίον. ἐπεὶ δὲ ἰσορροπέοντι τὸ μὲν ζ κρεμάμενον κατὰ τὸ α, τὸ δὲ βδγ κατὰ τὸ ε, δῆλον ὡς ἀντιπέπονθε τοῖς μα-

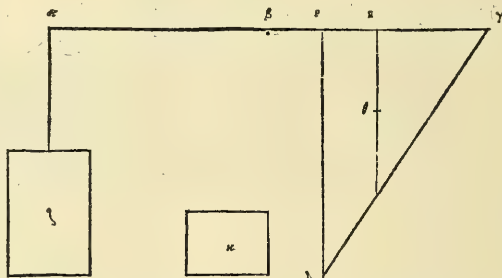
κεσι. καί ἐστιν ὡς ἁ α β ποτὶ τὰν β ε, οὕτως τὸ β δ γ τρίγωνον ποτὶ τὸ ζ χωρίον. τριπλασία δέ ἐστιν ἁ α β τᾶς β ε. καὶ τὸ β δ γ ἄρα τρίγωνον τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ζ χωρίου. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ εἴκα τριπλάσιον ᾖ τὸ β δ γ τρίγωνον τοῦ ζ χωρίου, ὅτι ἰσορροπήσει.

ζ Ἔστω πάλιν ζυγὸς ὁ α γ γραμμά, μέσον δὲ αὐτοῦ ἔστω τὸ β. καὶ κρεμάσθω κατὰ τὸ β τὸ γ δ η τρίγωνον. τὸ δὲ γ δ η ἔστω τρίγωνον ἀμβλυγώνιον, βάσιν ἔχον τὰν δ η, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἐοῦσαν τᾷ ἡμισείᾳ τοῦ ζυγοῦ. καὶ κρεμάσθω τὸ δ γ η τρίγωνον ἐκ τῶν β γ σαμείων, τὸ δὲ ζ χωρίον κρεμάμενον κατὰ τὸ α ἰσορροπὲς ἔστω τῷ γ δ η τριγώνῳ, οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. ὁμοίως δὲ

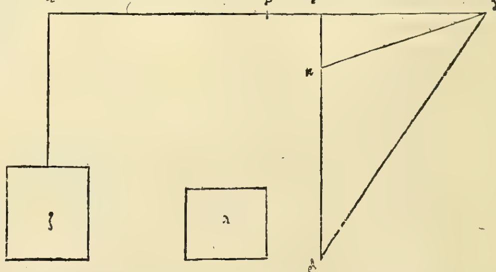


δειχθήσεται τὸ ζ χωρίον τρίτον μέρος τοῦ γ δ η τριγώνου. κρεμάσθω γὰρ καὶ ἄλλο χωρίον ἐκ τοῦ α, τρίτον μέρος ἐὸν τοῦ β γ η τριγώνου. ἰσορροπήσει δὲ τὸ β δ γ τρίγωνον τῷ ζ λ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν β γ η τρίγωνον ἰσορροπεῖ τῷ α, τὸ δὲ β γ δ τῷ ζ λ, καὶ τρίτον ἐστὶ τοῦ β γ δ τὸ ζ λ, φανερὸν ὅτι καὶ τὸ γ δ η τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ ζ.

η Ἔστω ζυγὸς ὁ α β, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ β. καὶ κρεμάσθω κατὰ τὸ β τὸ γ δ ε τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὀρθὰν ἔχον τὰν ποτὶ τὰν ε γωνίαν. καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ γ ε. τὸ δὲ ζ χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ α. καὶ ἰσορροπείτω τῷ γ δ ε οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ α β ποτὶ τὰν β ε, τοῦτον ἐχέτω τὸ γ δ ε τρίγωνον ποτὶ τὸ κ χωρίον. φαμὶ δὴ τὸ ζ χωρίον τοῦ μὲν γ δ ε τριγώνου ἔλασσον εἶμεν, τοῦ δὲ κ μεῖζον. λελάφθω γὰρ τοῦ δ ε γ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος,



καὶ ἔστω τὸ θ. καὶ ἁ θ η ἄχθω παρὰ τὰν δ ε. ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ τὸ γ δ ε τρίγωνον τῷ ζ χωρίῳ, τὸ αὐτὸ ἔχει λόγον τὸ γ δ ε χωρίον ποτὶ τὸ ζ, ὃν ἁ α β ποτὶ τὰν β η. ὥστε ἔλασσόν ἐστι τὸ ζ τοῦ γ δ ε. καὶ ἐπεὶ τὸ γ δ ε τρίγωνον ποτὶ μὲν τὸ ζ τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἁ β α ποτὶ τὰν β η, ποτὶ δὲ τὸ κ, ὃν ἁ β α ποτὶ τὰν β ε. δῆλον ὡς μείζονα λόγον ἔχει τὸ γ δ ε τρίγωνον ποτὶ τὸ κ, ἢ ποτὶ τὸ ζ. ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ ζ τοῦ κ.

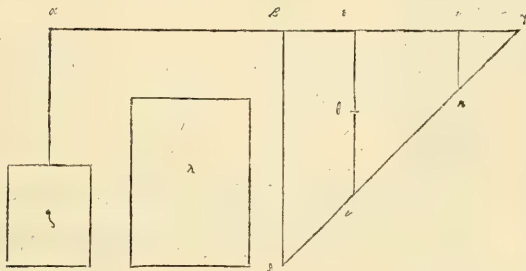


θ Ἔστω πάλιν τὸ μὲν α γ ζύγιον, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ β. τὸ δὲ γ δ κ τρίγωνον ἀμβλυγώνιον βάσιν μὲν ἔχον τὰν δ κ, ὕψος δὲ τὰν ε γ. καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ γ, ε, τὸ δὲ ζ χωρίον κρεμάσθω

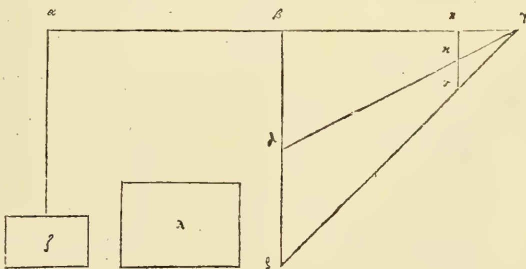
κατὰ

ἐπὶ τὸ α, καὶ ἰσορροπείτω τῷ δεκ τριγώνῳ, οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ αβ ποτὶ τὰν βε, τοῦτον ἐχέτω τὸ γδη τρίγωνον ποτὶ τὸ λ. φαμὶ δὴ τὸ ζ τοῦ μὲν λ μεῖζον εἶμεν, τοῦ δὲ δγκ ἔλασσον. δειχθήσεται ὁμοίως τῷ πρότερον.

Ἔστω πάλιν τὸ μὲν αβγ ζύγιον, καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ β. τὸ δὲ βδκη τραπέζιον, τὰς μὲν ποτὶ τοῖς β, η σαμείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον. τὰν δὲ κδ πλευρὰν, ἐπὶ τὸ γ νεύουσαν. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ βα ποτὶ τὰν βη, τοῦτον ἐχέτω τὸ βδηκ τραπέζιον ποτὶ τὸ λ. κεκρεμάσθω δὲ τὸ βδηκ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τῶν β, η σημείων. κεκρεμάσθω δὲ καὶ τὸ ζ χωρίον κατὰ τὸ α. καὶ ἰσορροπείτω τῷ βδκη τραπεζίῳ, οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν ὑπόκειται. φημὶ τὸ ζ χωρίον ἔλασσον εἶμεν τοῦ λ. τετμήσθω γὰρ ἁ αγ κατὰ τὸ ε οὕτως, ὥστε ὃν ἔχει λόγον ἁ διπλασία τᾶς δβ, καὶ ἁ κη ποτὶ τὰν διπλασίαν τᾶς κη, καὶ τᾶς βδ, τοῦτον ἔχειν τὰν εη ποτὶ τὰν βε. καὶ διὰ τοῦ ε παρὰ τὰν βδ ἀχθεῖσα ἁ εν τετμήσθω δίχα ἐπὶ τὸ θ, τοῦ δὴ βδηκ τραπεζίου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ θ. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς μηχανικοῖς. ἢν οὖν τὸ βδηκ τραπέζιον ἐπὶ μὲν τὸ ε κρεμασθῇ, ἀπὸ δὲ τῶν β, η σημείων λυθέῃ, μένει τὰν αὐτὰν ἔχον κατάστασιν, διὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, καὶ ἰσορροπήσει τῷ ζ χωρίῳ. ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ τὸ βδηκ τραπέζιον κατὰ τὸ ε κρεμάμενον, τῷ ζ χωρίῳ ἐπὶ τὸ α κρεμαμένῳ, ἐσσεῖται ὡς ἁ βα ποτὶ τὰν βε, τὸ βδηκ τραπέζιον ποτὶ τὸ ζ χωρίον, μείζονα ἄρα λόγον ἔχει τὸ βδηκ τραπέζιον ποτὶ τὸ ζ, ἤπερ ποτὶ τὸ λ. ἐπεὶ καὶ ἁ αβ ποτὶ τὰν βε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ποτὶ τὰν βη. ὥστε ἔλασσον ἔσται τὸ ζ τοῦ λ. ι

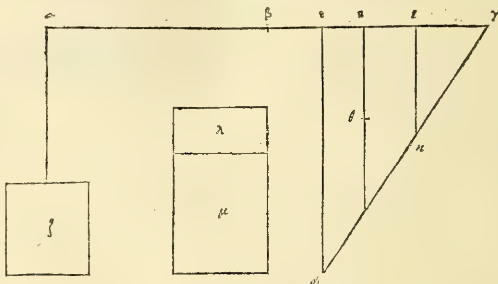


Ἔστω πάλιν τὸ μὲν αγ ζύγιον, καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ β. τὸ δὲ κδτρ τραπέζιον ἔστω τὰς μὲν κδ, τρ πλευρὰς ἔχον ἐπὶ τὸ γ νευούσας. τὰς δὲ δρ, κτ καθέτους ἐπὶ τὰν βγ. καὶ ἁ δρ ἐπὶ τὸ β πιπτέτω. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ αβ ποτὶ τὰν βη, τοῦτον ἐχέτω τὸ δκτρ τραπέζιον ποτὶ τὸ λ. τὸ δὲ δκτρ τραπέζιον κεκρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ β, η, καὶ τὸ ζ κατὰ τὸ α, καὶ ἰσορροπείτω τὸ ζ τῷ δκρτ τραπεζίῳ, οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται ἔλασσον τὸ ζ χωρίον τοῦ λ. ια



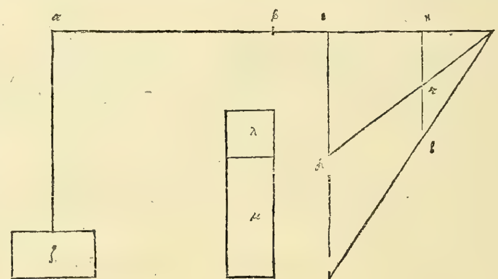
Ἔστω πάλιν τὸ μὲν αγ ζύγιον, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ β. τὸ δὲ δεκη τραπέζιον ἔστω τὰς μὲν ποτὶ τοῖς ε, η σημείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰς δὲ κδ, εη γραμμὰς ποτὶ τὸ γ νευούσας. καὶ ὃν μὲν λόγον ἔχει ἁ αβ ποτὶ τὰν βη, τοῦτον ἐχέτω τὸ δκεη τραπέζιον ποτὶ τὸ μ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ αβ ποτὶ τὰν βε, τοῦτον τὸν λόγον ἐχέτω τὸ δκεη τραπέζιον, ποτὶ τὸ λ. κεκρεμάσθω δὲ τὸ δκεη τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ ε, η. τὸ δὲ ζ χωρίον ἐκκρεμάσθω κατὰ τὸ α, καὶ ἰσορροπείτω τῷ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν ὑπόκειται. φαμὶ δὴ τὸ ζ τοῦ λ μεῖζον εἶμεν, τοῦ δὲ μ ἔλασσον. ἔλαβον γὰρ τοῦ δκεη τραπεζίου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος. ἔστω δὲ τὸ θ. ληφθήσεται δὲ ὁμοί- ιβ

ως τῷ πρότερον. καὶ ἄγω ταὶ θι παρὰ τὰν δε. αὖ οὖν τὸ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κρεμασθήσεται κατὰ τὸ ι, ἀπὸ δὲ τῶν ε, η λυθῇ. μενεῖ τὰν αὐτὰν ἔχον κατάστασιν, καὶ ἰσορροπήσει τῷ ζ, διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ τὸ τραπέζιον κρεμάμενον κατὰ τὸ ι, τῷ ζ κρεμαμένῳ κατὰ τὸ α, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον τὸ τραπέζιον ποτὶ τὸ ζ, ὃν ἁ αβ ποτὶ τὰν βι. δῆλον οὖν,



ὅτι τὸ δηεκ ποτὶ μὲν τὸ λ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ποτὶ τὸ ζ. ποτὶ δὲ τὸ μ ἐλάσσονα ἢ ποτὶ τὸ ζ. ὥστε τὸ ζ, τοῦ μὲν λ μεῖζόν ἐστι, τοῦ δὲ μ ἔλασσον.

ιγ Ἔστω πάλιν τὸ μὲν αγ ζύγιον, κατὰ μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ β. τὸ δὲ κδ, τρ τραπέζιον. ὥστε τὰς μὲν κδ, τρ πλευρὰς νευούσας εἶμεν ἐπὶ τὸ γ. τὰς δὲ δτ, κρ καθέτους ἐπὶ τὰν βγ. κεκρεμάσθω δὲ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ ε, η. τὸ δὲ ζ χωρίον κεκρεμάσθω κατὰ τὸ α. καὶ ἰσορροπείτω τῷ δκτρ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται. καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἁ αβ ποτὶ τὰν

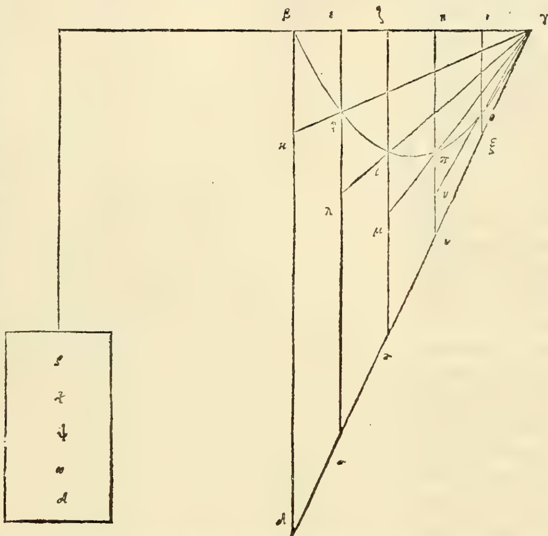


βε, τοῦτον ἐχέτω τὸ δκ, τρ τραπέζιον ποτὶ τὸ λ χωρίον. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ αβ ποτὶ τὰν βη, τοῦτον ἐχέτω τὸ αὐτὸ τραπέζιον ποτὶ τὸ μ. ὁμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται τὸ ζ τοῦ μὲν λ μεῖζον, τοῦ δὲ μ ἔλασσον.

ιδ Ἔστω τμῆμα τὸ βθγ, περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. ἔστω δὴ πρῶτον ἁ βγ ποτ' ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ. καὶ ἄχθω ἀπὸ μὲν τοῦ β σαμείου ἁ βδ παρὰ τὰν διάμετρον. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἁ γδ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἐσσεῖται δὴ τὸ βγδ τρίγωνον ὀρθογώνιον, διῃρήσθω δὴ ἁ βγ εἰς τὰ τμήματα ὁποσαοῦν τὰ βε, εζ, ζη, ηι, καὶ ἀπὸ τᾶν τομᾶν ἄχθωσαν παρὰ τὰν διάμετρον αἱ εσ, ζτ, ηυ, ιξ. ἀπὸ δὲ τῶν σαμείων καθ' ἃ τέμνουσιν αὗται τὰν τοῦ κώνου τομὰν, ἐπεζεύχθωσαν κατὰ τὸ γ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν. φαμὶ δὴ τὸ τρίγωνον τὸ βδγ, τῶν μὲν τραπεζίων τῶν κε, λζ, μη, νι, καὶ τοῦ ξιγ τριγώνου ἔλασσον εἶμεν ἢ τριπλάσιον. τῶν δὲ τραπεζίων τῶν ζφ, ηθ, ιπ, καὶ τοῦ ιογ τριγωνίου, μεῖζον ἐστὶν ἢ τριπλάσιον. διήχθω γὰρ εὐθεῖα, ἁ αβ. καὶ ἀπολελάφθω ἁ αβ ἴσα τᾷ βγ. καὶ νοείσθω ζύγιον τὸ αγ. μέσον δὲ αὐτοῦ ἐσσεῖται τὸ β, καὶ κεκρεμάσθω ἐκ τοῦ β. κεκρεμάσθω δὲ καὶ τὸ βδγ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ βγ. ἐκ δὲ τοῦ θατέρου μέρους ζυγοῦ κεκρεμάσθω τὰ ρχψωδ χωρία κατὰ τὸ α. καὶ ἰσορροπείτω τὸ μὲν ρ χωρίον τῷ δε τραπεζίῳ, οὕτως ἔχοντι. τὸ δὲ χ τῷ ζσ τραπεζίῳ. τὸ δὲ ψ τῷ θη. τὸ δὲ ω τῷ υι. τὸ δὲ δ τῷ ξιγ τριγώνῳ. ἰσορροπήσει δὴ καὶ τὸ ὅλον τῷ ὅλῳ. ὥστε τριπλάσιον ἂν εἴη τὸ βδγ τρίγωνον τοῦ ρχψωδ χωρίου. καὶ ἐπεί ἐστι τμῆμα τὸ βγθ, ὃ περιέχεται ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ β παρὰ τὰν διάμετρον ἦκται ἁ βδ. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἁ γδ, ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἦκται δέ τις καὶ ἄλλα παρὰ τὰν διάμετρον ἁ σε. τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ βγ ποτὶ τὰν βε, ὃν ἁ σε ποτὶ τὰν εφ. ὥστε καὶ ἁ βα ποτὶ τὰν βε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ δε τραπέζιον ποτὶ τὸ κε. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ἁ αβ ποτὶ τὰν βζ τὸν αὐτὸν ἔχειν

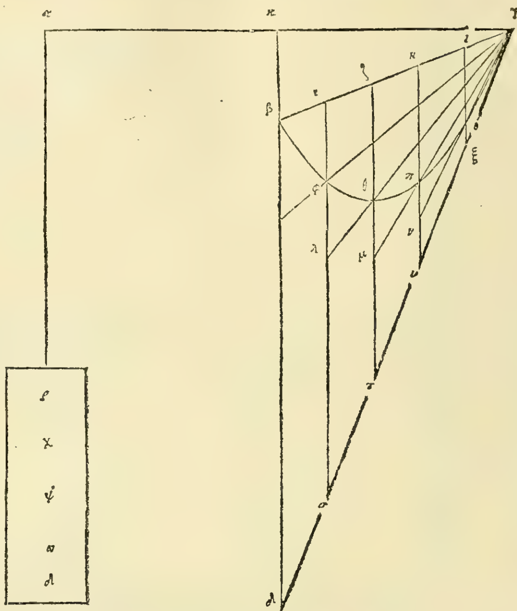
χειν

χειν λόγον, ὃν τὸ σζ τραπέζιον ποτὶ τὸ λζ. ποτὶ δὲ τὰν βη, ὃν τὸ τη ποτὶ τὸ μη. ποτὶ δὲ τὰν βι, ὃν τὸ υι ποτὶ τὸ νι. ἐπεὶ οὖν ἐστὶ τραπέζιον τὸ δε, τὰς μὲν ποτὶ τοῖς βε σημείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰς δὲ πλευρὰς ἐπὶ τὸ γ νευούσας. ἰσορροπεῖ δέ τι χωρίον αὐτῷ τὸ ρ, κρεμάμενον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ α, οὕτως ἔχοντος τοῦ τραπεζίου, ὡς νῦν κεῖται. καὶ ἔστιν ὡς ἁ βα ποτὶ τὰν βε, οὕτως τὸ δε τραπέζιον ποτὶ τὸ κε, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ κε χωρίον τοῦ ρ χωρίου. δέδεικται γὰρ τοῦτο. πάλιν δὲ ἐπεὶ τὸ ζσ τραπέζιον, τὰς μὲν ποτὶ τοῖς ζε γωνίας ὀρθὰς ἔχων, τὰν δὲ στ νεύουσαν ἐπὶ τὸ γ. ἰσορροπεῖ δὲ αὐτῷ χωρίον τὸ χ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κρεμάμενον κατὰ τὸ α, οὕτως ἔχοντι τῷ τραπεζίῳ ὡς νῦν κεῖται. καὶ ἔστιν, ὡς μὲν ἁ βα ποτὶ τὰν βε, οὕτως τὸ ζσ τραπέζιον ποτὶ τὸ ζφ. ὡς δὲ ἁ αβ ποτὶ τὰν βζ, οὕτως τὸ ζσ τραπέζιον ποτὶ τὸ λζ. εἴη ἂν καὶ τὸ χ χωρίον τοῦ μὲν λζ τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ ζφ μεῖζον. δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ψ χωρίον τοῦ μὲν μη τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ θη μεῖζον. καὶ τὸ ω χωρίον τοῦ μὲν νοι τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ πι μεῖζον. ὁμοίως δὴ καὶ τὸ δ χωρίον τοῦ μὲν ξιγ τριγώνου ἔλασσον, τοῦ δὲ γιο μεῖζον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν κε τραπέζιον μεῖζον ἐστὶ τοῦ ρ χωρίου, τὸ δὲ λζ τοῦ χ, τὸ δὲ μη τοῦ ψ, τὸ δὲ νι τοῦ ω, τὸ δὲ ξιγ τρίγωνον τοῦ δ, φανερὸν ὅτι καὶ πάντα τὰ εἰρημένα χωρία μείζονα ἐστὶ τοῦ ρχψωδ χωρίου. ἔστι δὲ τὸ ρχψωδ τρίτον μέρος τοῦ αγδ τριγώνου. δῆλον ἄρα, ὅτι τὸ βγδ τρίγωνον ἔλασσον ἐστὶν, ἢ τριπλάσιον τῶν κε, λζ, μη, νι τραπεζίων, καὶ τοῦ ξιγ τριγώνου. πάλιν ἐπεὶ τὸ μὲν ζφ τραπέζιον ἔλασσον ἐστὶ τοῦ χ χωρίου, τὸ δὲ θη τοῦ ψ, τὸ δὲ ιπ τοῦ ω, τὸ δὲ ιογ τρίγωνον τοῦ δ, φανερὸν ὅτι καὶ πάντα τὰ εἰρημένα ἐλάσσονα ἐστὶ τοῦ δωψχ χωρίου. φανερὸν οὖν ὅτι καὶ τὸ βδγ τρίγωνον μεῖζον ἐστὶν, ἢ τριπλάσιον τῶν φζ, θη, ιπ τραπεζίων, καὶ τοῦ ιγο τριγώνου. ἔλασσον δὲ ἢ τριπλάσιον τῶν προγεγραμμένων.



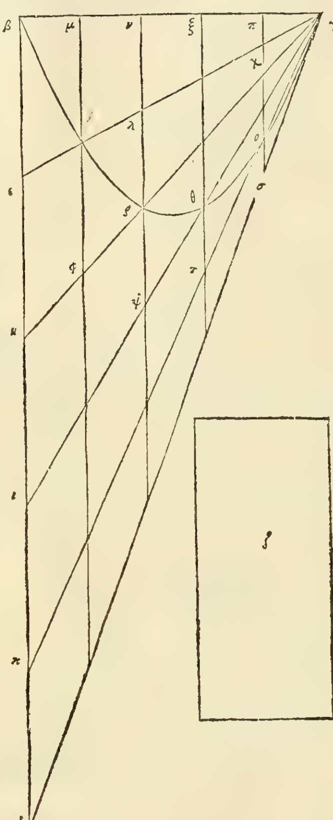
Ἔστω πάλιν τὸ βθγ τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἁ δὲ βγ ις
μὴ ἔστω ποτ' ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ, ἀναγκαῖον δὲ ἤτοι τὰν ἀπὸ τοῦ β σαμείου παρὰ τὰν διάμετρον ἀγμέναν ἐπὶ τὰ τοῦ τμήματι, ἢ τὰν ἀπὸ τοῦ γ ἀμβλεῖαν ποιεῖν γωνίαν ποτὶ τὰν βγ. ἔστω ἁ τὰν ἀμβλεῖαν ποιοῦσα ἁ πρὸς τῷ β, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον ἀπὸ τοῦ β ἁ βδ. καὶ ἀπὸ τοῦ γ ἁ γδ, ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. καὶ διῃρήσθω ἁ βγ εἰς τμήματα ἴσα ὁποσαοῦν τὰ βε, εζ, ζη, ηι, ιγ. ἀπὸ δὲ τῶν ε, ζ, η, ι παρὰ τὰν διάμετρον ἄχθωσαν αἱ εσ, ζτ, ηυ, ιξ. καὶ ἀπὸ τῶν σαμείων καθ' ὃ τέμνοντι αὗται τὰν τοῦ κώνου τομὰν ἐπιζευχθῶσαν ἐπὶ τὸ γ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν. φημὶ δὴ καὶ νῦν, τὸ βδγ τρίγωνον, τῶν μὲν τραπεζίων τῶν βφ, λζ, θη, πι, καὶ τοῦ γιξ τριγώνου ἔλασσον εἶμεν ἢ τριπλάσιον. τῶν δὲ ζφ, ηθ, ιπ, καὶ τοῦ γοι τριγώνου μεῖζον ἢ τριπλάσιον. ἐκβεβλήσθω ἡ δβ ἐπὶ θάτερα, ἀγαγὼν κάθετον τὰν γκ, τᾷ γκ ἴσαν ἀπέλαβον τὰν ακ. νοείσθω δὲ πάλιν ζύγιον τὸ αγ. μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ κ, καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ κ. κεκρεμάσθω δὲ καὶ τὸ γκδ τρίγωνον ἐκ τοῦ ἡμίσους τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ γκ, ἔχον ὡς νῦν κεῖται, ἐκ τοῦ θατέρου μέρους τοῦ ζυγοῦ κρεμάσθωσαν

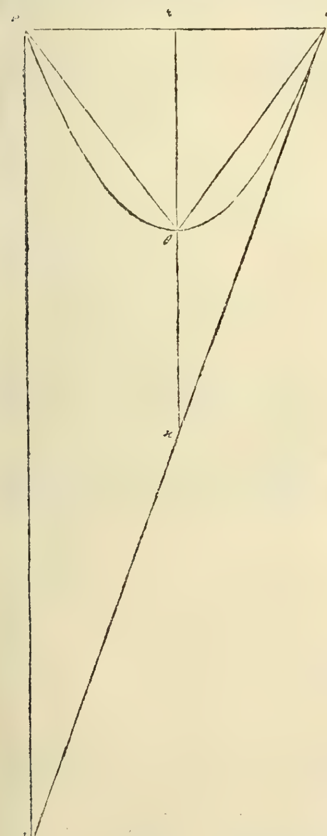
κατὰ τὸ α τὰ ρ χ ψ ω δ χωρία, καὶ τὸ μὲν ρ τῷ δ ε τραπεζίῳ ἰσοῤῥοπείτω, οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. τὸ δὲ χ τῷ ζ σ τραπεζίῳ. τὸ δὲ ψ τῷ τ κ. τὸ δὲ ω τῷ υ ι. τὸ δὲ δ τῷ γ ι ξ τριγώνῳ. ἰσοῤῥοπήσει δὲ καὶ τὸ ὅλον τῷ ὅλῳ. ὥστε εἴη ἂν καὶ τὸ δ β γ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ ρ χ ψ ω δ χωρίου. ὁμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται, ὅτι τὸ β φ τραπέζιον τοῦ ρ χωρίου μεῖζον, καὶ τὸ μὲν θ ε τραπέζιον μεῖζον ἐὸν τοῦ χ χωρίου, τὸ δὲ ζ φ ἔλαττον. καὶ τὸ μὲν μ η τραπέζιον μεῖζον ἐὸν τοῦ ψ χωρίου, τὸ δὲ κ θ ἔλασσον. καὶ ἔτι τὸ μὲν ν ι τραπέζιον μεῖζον ἐὸν τοῦ ω χωρίου, τὸ δὲ π ι ἔλασσον. καὶ τὸ μὲν ξ ι γ τρίγωνον μεῖζον τοῦ δ χωρίου, τὸ δὲ γ ι ο ἔλασσον. δῆλον οὖν ἐστιν.



ις Ἔστω πάλιν τμῆμα τὸ β θ γ, περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας, καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. καὶ ἄχθω διὰ μὲν τοῦ β ἁ β δ παρὰ τὰν διάμετρον. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἁ γ δ, ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἔστω δὲ τοῦ β δ γ τριγώνου τρίτον μέρος τὸ ζ χωρίον. φαμὶ δὴ τὸ β θ γ τμῆμα ἴσον εἶμεν τῷ ζ χωρίῳ. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω δὴ πρότερον εἰ δυνατόν, μεῖζον. ἁ ὑπεροχὰ ἃ ὑπερέχει τὸ β θ γ τμῆμα τοῦ ζ χωρίου, συντιθεμένα αὐτὰ ἑαυτᾷ ἐσσεῖται μείζων τοῦ β γ δ τριγώνου. δυνατὸν δέ ἐστι λαβεῖν τι χωρίον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ὃ ἐσσεῖται μέρος τοῦ β δ γ τριγώνου. ἔστω δὲ τὸ β γ ε τρίγωνον ἔλασσόν τε τᾶς εἰρημένας ὑπεροχᾶς, καὶ μέρος τοῦ β δ γ τριγώνου. ἐσσεῖται δὲ τὸ αὐτὸ ἁ β ε μέρος τᾶς β δ. διῃρήσθω οὖν ἁ β δ εἰς τὰ μέρη. καὶ ἔστω τὰ τῶν διαιρέσεων σημεῖα τὰ η, ι, κ. καὶ ἀπὸ τῶν η, ι, κ σαμείων ἐπὶ τὰ γ ε εὐθεῖαι ἐπεζεύχθωσαν. τέμνοντι δὴ αὗται τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἐπεὶ ἁ γ δ ἐπιψαύουσά ἐντι αὐτᾶς κατὰ τὸ γ. καὶ διὰ τῶν σαμείων τέμνοντι τὰν τομάν, αἱ εὐθεῖαι ἄχθωσαν παρὰ τὰν διάμετρον, αἱ μ φ, ν ρ, ξ θ. ἐσσοῦνται δὲ αὗται καὶ παρὰ τὰν β δ. ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ β γ ε τρίγωνον τᾶς ὑπεροχᾶς, ἃ ὑπερέχει τὸ β θ γ τμῆμα τοῦ ζ χωρίου, δῆλον ὡς τὰ συναμφότερα τό τε ζ χωρίον, καὶ τὸ β γ ε τρίγωνον, ἐλάσσονά ἐντι τοῦ τμήματος. καὶ τῷ β γ ε τριγώνῳ ἴσα τὰ τραπέζιά ἐντι. δι' ὧν ἁ τοῦ κώνου τομὰ πορεύεται, τὰ μ ε, φ λ, θ ρ, θ ο, καὶ τὸ γ ο σ τρίγωνον. τὸ μὲν γὰρ μ ε τραπέζιον κοινόν, τὸ δὲ μ λ ἴσον τῷ φ λ, καὶ τὸ λ ξ ἴσον τῷ θ ρ. καὶ τὸ χ ξ ἴσον τῷ ο θ. καὶ τὸ γ χ π τρίγωνον τῷ γ ο σ τριγώνῳ. τὸ δὴ ζ χωρίον ἔλασσόν ἐστι τῶν τραπεζίων τῶν μ λ, ξ ρ, π θ, καὶ τοῦ π ο γ τριγώνου. καὶ ἔστι τὸ β δ γ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ ζ χωρίου. τὸ δὴ β δ γ ἔλασσόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τῶν μ λ, ρ ξ, θ π τραπεζίων, καὶ τοῦ π ο γ τριγώνου, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ μεῖζον ἢ τριπλάσιον. οὐκοῦν οὐ μεῖζόν ἐστι τὸ β θ γ τμῆμα τοῦ ζ χωρίου. λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἔλασσον. ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. πάλιν ἁ ὑπεροχὰ ἃ ὑπερέχει τὸ ζ χωρίον τοῦ β θ γ τμήματος, αὐτὰ ἑαυτᾷ συντιθεμένα ὑπερέχει καὶ τοῦ β δ γ τριγώνου. δυνατὸν δέ ἐστι λαβεῖν χωρίον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ὃ ἐσσεῖται μέρος τοῦ β δ γ τριγώνου.

γώνου. ἔστω οὖν τὸ βγε τρίγωνον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς καὶ μέρος τοῦ βδγ τριγώνου. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἐστι τὸ βγε τρίγωνον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς ᾇ ὑπερέχει τὸ ζ χωρίον τοῦ βθγ τμήματος, τὸ βεγ τρίγωνον, καὶ τὸ βθγ τμῆμα ἀμφότερα ἐλάσσονά ἐντι τοῦ ζ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ζ χωρίον ἔλασσον τῶν τραπεζίων τῶν εμ, φν, ψξ, πτ, καὶ τοῦ γπσ τριγώνου. ἔστι γὰρ τὸ βδγ τοῦ μὲν ζ τριπλάσιον, τῶν δὲ εἰρημένων χωρίων ἔλασσον ἢ τριπλάσιον, ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου ἐδείχθη. ἔλασσον ἄρα τὸ βγε τρίγωνον, καὶ τὸ βθγ τμῆμα τῶν τραπεζίων τῶν εμ, φν, ξψ, πτ, καὶ τοῦ γπσ τριγώνου. ὥστε κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ τμήματος, ἔλασσον εἴη καὶ τὸ γβε τρίγωνον, τῶν περιλειπομένων χωρίων, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ ἴσον ἐὸν τὸ βεγ τρίγωνον τοῖς τραπεζίοις τοῖς εμ, φλ, θρ, θο, καὶ τῷ γοσ τριγώνῳ, ἅ ἐστιν μείζονα τῶν περιλειπομένων χωρίων. οὐκ ἄρα ἔλασσον τὸ βθγ τμῆμα τοῦ ζ χωρίου. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μεῖζον, ἴσον ἄρα τὸ τμῆμα τῷ ζ χωρίῳ.





Τούτου δεδειγμένου φανερόν, ὅτι πᾶν τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ὕψος ἴσον. ιζ

ἔστω γὰρ τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, κορυφὰ δὲ αὐτοῦ ἔστω τὸ θ σαμεῖον. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον τὸ βθγ, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι, καὶ ὕψος ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ θ σαμεῖον κορυφά ἐστι τοῦ τμάματος, ἁ ἀπὸ τοῦ θ εὐθεῖα παρὰ τὰν διάμετρον ἀχθεῖσα δίχα τέμνει τὰν βγ. καὶ ἁ βγ ἐστὶ παρὰ τὰν ἐπιψαύουσαν τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ θ. ἄχθω δὲ ἁ εθ παρὰ τὰν διάμετρον. ἄχθω δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ β παρὰ τὰν διάμετρον ἁ βδ. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἁ γδ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἐπεὶ οὖν ἁ μὲν κθ παρὰ τὰν διάμετρόν ἐστιν, ἁ δὲ γδ ἐπιψαύουσα τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ γ, ἁ δὲ εγ παράλληλός ἐστι τᾷ ἐπιψαυούσᾳ τᾶς το-

μᾶς κατὰ τὸ θ. τὸ βδγ τρίγωνον τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ βθγ τριγώνου. ἐπεὶ δὲ τὸ βδγ τρίγωνον, τοῦ μὲν βθγ τμήματος τριπλάσιον, δῆλον ὡς ἐπίτριτόν ἐστι τὸ βθγ τμῆμα τοῦ βθγ τριγώνου.

Τῶν τμημάτων τῶν περιεχομένων ὑπό τε εὐθείας καὶ καμπύλας γραμμᾶς, βάσιν μὲν καλῶ τὰν εὐθεῖαν, ὕψος δὲ τὰν μεγίσταν κάθετον ἀπὸ τᾶς καμπύλας γραμμᾶς, ἀγομέναν ἐπὶ τὰν βάσιν τοῦ τμάματος. κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, ἀφ' οὗ ἁ μεγίστα κάθετος ἄγεται.

ιη Εἴκα ἐν τμήματι ὃ περιέχεται ὑπὸ εὐθείας, καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἀπὸ μέσας τᾶς βάσεως ἀχθῆ εὐθεῖα παρὰ τὰν διάμετρον, κορυφὰ ἐσεῖται τοῦ τμάματος τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἁ παρὰ τὰν διάμετρον ἀχθεῖσα τέμνει τὰν τοῦ κώνου τομάν. ἔστω γὰρ τμῆμα τὸ αβγ, περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἀπὸ μέσας τᾶς αγ ἄχθω ἁ δβ παρὰ τὰν διάμετρον. ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθωγωνίου τομᾷ ἁ βδ ἄκται παρὰ τὰν διάμετρον, καὶ ἴσαι ἐντὶ αἱ αδ, δγ, δῆλον ὡς παράλληλός ἐντι ἅ τε αγ, καὶ ἁ κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς. φανερὸν οὖν ὅτι ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν αγ ἀγομένας κάθετος μεγίστα ἐσεῖται, ἁ ἀπὸ τοῦ β ἀγομένα. κορυφὰ οὖν ἐστι τοῦ τμήματος τὸ β σαμεῖον.

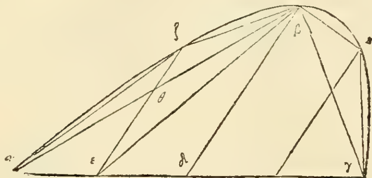
ιθ Εἴκα τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι παρὰ τὰν διάμετρον, ἁ μὲν ἀπὸ μέσας τᾶς βάσεως, ἁ δὲ ἀπὸ μέσας τᾶς ἡμισείας, ἁ ἀπὸ μέσας τᾶς βάσεως ἀχθεῖσα, τᾶς ἀπὸ μέσας τᾶς ἡμισείας ἀγομένας ἐπίτριτος ἐσεῖται μάκει. ἔστω γὰρ τὸ αβγ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. καὶ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον ἁ μὲν βδ, ἀπὸ μέσας τᾶς αγ, ἁ δὲ εζ ἀπὸ μέσας τᾶς αδ. ἄχθω δὲ καὶ ἁ ζθ παρὰ αγ. ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ ἁ βδ παρὰ τὰν διάμετρον ἄκται. καὶ αἱ αδ, ζθ παρὰ τὰν κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσαν. ἔσαι μέν τοι δῆλον, ὡς τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ βδ ποτὶ τὰν βθ μάκει, ὃν ἁ αδ ποτὶ τὰν ζθ δυνάμει. τετραπλασία ἄρα ἐστὶ καὶ ἁ βδ τᾶς βθ μάκει. φανερὸν οὖν ὅτι ἐπίτριτός ἐστιν ἁ βδ τᾶς εζ μάκει.

κ Εἴκα εἰς τμῆμα περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, τρίγωνον ἐγγραφῇ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, μεῖζον ἔσαι τὸ ἐγγραφὲν τρίγωνον, ἢ ἥμισυ τοῦ τμήματος. ἔστω γὰρ τὸ αβγ τμῆμα, οἷον εἴρηται. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον τὸ αβγ, τὰν αὐτὰν ἔχον βάσιν τῷ ὅλῳ, καὶ ὕψος ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ τρίγωνον τῷ τμήματι τὰν αὐτὰν ἔχει βάσιν, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἀναγκαῖον τὸ β σαμεῖον κορυφὰν εἶναι τοῦ τμήματος. παράλληλός ἄρα ἐστὶν ἁ αγ τᾷ κατὰ τὸ β ἐπιψαυούσα τᾶς τομᾶς, ἄχθω ἁ δε διὰ τοῦ β παρὰ τὰν αγ. καὶ ἀπὸ τῶν α, γ αἱ αδ, γε, παρὰ τὰν διάμετρον. πεσοῦνται δὴ αὗται ἐκτὸς τοῦ τμάματος. ἐπεὶ οὖν ἥμισυ ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον τοῦ αδεγ παραλληλογράμμου, φανερὸν ὅτι μεῖζον ἐστί, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ τμήματος δεδειγμένου, δῆλον ὅτι ὡς οὖν τὸ τμῆμα δυνατόν ἐστι πολύγωνον ἐγγράψαι. ὥς τε εἶμεν τὰ περιλειπόμενα τμήματα παντὸς ἐλάσσονα,

τοῦ

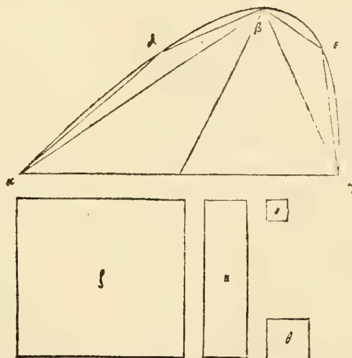
τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἀφαιρουμένου γὰρ ἀεὶ μεῖζον ἢ τοῦ ἡμίσεος, διὰ τοῦτο φανερόν ἐστιν ὅτι ἐλασσοῦντες ἀεὶ τὰ λειπόμενα τμήματα, ποιήσομεν ταῦτα ἐλάσσονα παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

Εἶκα εἰς τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τρίγωνον ἐγγραφῇ, τὰν κα
αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἐγγραφέωντι δὲ καὶ ἄλλα τρίγωνα εἰς τὰ λειπόμενα τμήματα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἑκατέρου τῶν τριγώνων τῶν εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἐγγραφέντων, ὀκταπλάσιον ἔσται τὸ τρίγωνον τὸ εἰς τὸ ὅλον τμῆμα ἐγγραφέν. ἔστω τὸ αβγ τμῆμα, οἷον εἴρηται. καὶ τετμάσθω ἁ αγ δίχα τῷ δ. ἁ δὲ βδ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον, τὸ β ἄρα σαμεῖον κορυφά ἐστι τοῦ τμάματος. τὸ ἄρα αβγ τρίγωνον τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχει τῷ τμάματι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό. πάλιν τετμάσθω δίχα ἁ αδ τῷ ε.



καὶ ἄχθω ἁ εζ παρὰ τὰν διάμετρον. τετμάσθω δὲ ἁ αβ κατὰ τὸ θ. τὸ ἄρα ζ σαμεῖον κορυφή ἐστι τμάματος τοῦ αζβ. τρίγωνον ἄρα τὸ αζβ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχει τῷ αζβ τμάματι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό. δεικτέον ὅτι ὀκταπλάσιόν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον τοῦ αβζ τριγώνου. ἐστὶν οὖν ἁ βδ τᾶς μὲν εζ ἐπίτριτος, τᾶς δὲ εθ διπλασία. διπλασία ἄρα ἐστὶν ἁ εθ τᾶς θζ. ὥστε καὶ τὸ αεβ τρίγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ζβα. τὸ μὲν γὰρ αεθ διπλάσιόν ἐστι τοῦ αθζ. τὸ δὲ θβε τοῦ ζθβ. ὥστε τὸ αβγ τοῦ αζβ ὀκταπλάσιον. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τοῦ εἰς τὸ βηγ τμῆμα ἐγγραφέντος.

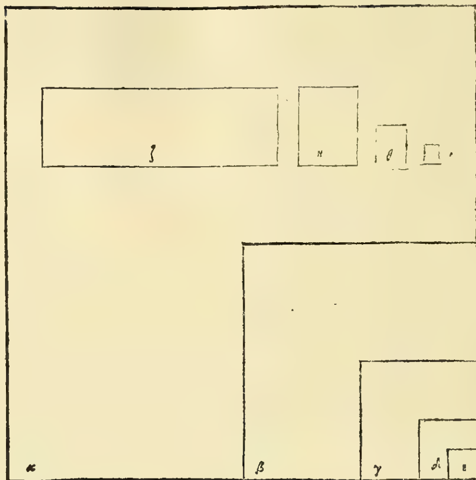
Εἶκα ᾖ τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ χωρία τεθέωντι ἑξῆς κβ
ὁποσαοῦν ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ. ᾖ δὲ τὸ μέγιστον τῶν χωρίων ἴσον τῷ τριγώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, σύμπαντα τὰ χωρία ἐλάσσονα ἔσται τοῦ τμήματος. ἔστω γὰρ τμῆμα τὸ αδβεγ, περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου τομᾶς. χωρία δὲ ἔστω ὁποσαοῦν ἑξῆς κείμενα τὰ ζ, η, θ, ι. τετραπλάσιον δὲ ἔστω τὸ ζ. καὶ ἔστω τὸ ζ ἴσον τῷ τριγώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ὕψος ἴσον. λέγω ὅτι τὸ τμῆμα τῶν ζ, η, θ, ι χωρίων μεῖζόν ἐστιν. ἔστω τοῦ μὲν ὅλου τμήματος κορυφὰ τὸ β. τῶν δὲ περιλειπομένων τμαμάτων τὰ δ, ε. ἐπεὶ οὖν τὸ αβγ τρίγωνον ὀκταπλάσιόν ἐστιν ἑκατέρου τῶν αβδ, βεγ τριγώνων, δῆλον ὅτι ὡς ἀμφοτέρων αὐτῶν ἐστι τετραπλάσιον. καὶ ἐπεὶ τὸ αβγ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ζ χωρίῳ, κατὰ τὰ αὐτὰ



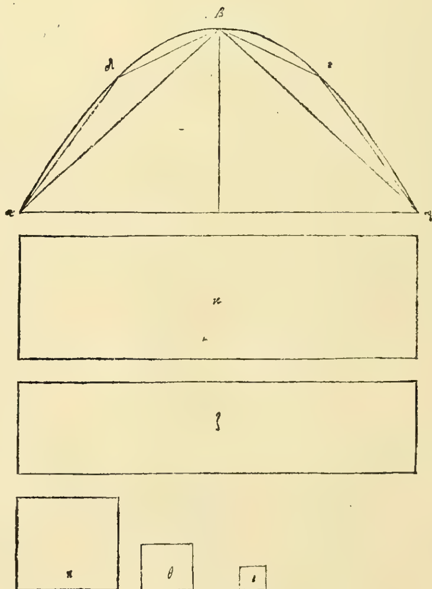
δὴ καὶ τὰ αδβ, βεγ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ η χωρίῳ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἐγγραφόμενα τρίγωνα, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμήμασι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἴσων ὄντων τῷ θ. καὶ εἰς τὰ ὕστερον γινόμενα τμήματα ἐγγραφόμενα τρίγωνα ἴσα τῷ ι χωρίῳ, σύμπαντα ἄρα τὰ προτεθέντα χωρία ἴσα ἐσσοῦνται πολυγώνῳ τινὶ ἐγγραφέντι εἰς τὸ τμῆμα. φανερὸν οὖν, ὅτι ἔλασσόν ἐστι τοῦ τμήματος.

Εἶκα μεγέθεα συντιθέωνται ἑξῆς ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ τὰ πάντα μεγέθεα, καὶ ἔτι τοῦ κγ
ἐλαχίστου τὸ τρίτον μέρος εἰς τὸ αὐτὸ συντεθέντα, ἐπίτριτα ἐσσοῦνται τοῦ μεγίστου. ἔστω οὖν ὁποσαοῦν μεγέθεα ἑξῆς κείμενα τὰ α, β, γ, δ, ε τετραπλασίονα ἕκαστον τοῦ ἑπομένου. μέγιστον δὲ ἔστω τὸ α. ἔστω δὲ τὸ μὲν ζ τρίτον τοῦ β, τὸ δὲ η τοῦ γ, τὸ δὲ θ τοῦ δ, τὸ δὲ ι τοῦ ε. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ζ τοῦ β τρίτον μέρος ἐστί, τὸ δὲ β τοῦ α τέταρτον μέρος ἐστίν, ἀμφότερα τὰ β, ζ, μέρος τρίτον ἐστὶ τοῦ α. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ η, γ τοῦ β. καὶ τὰ θ, δ τοῦ γ. καὶ τὰ ι, ε τοῦ δ, καὶ

δ. καὶ τὰ σύμπαντα δὴ τὰ β γ δ ε ζ η θ ι, τρίτον μέρος ἐστὶ τῶν συμπάντων τῶν α β γ δ ε. γίνεται δὲ καὶ αὐτὰ τὰ ζ η θ τρίτον μέρος αὐτῶν τῶν β γ δ. καὶ τὰ λοιπὰ ἄρα τὰ β γ δ ε ι τοῦ λοιποῦ τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ α. δῆλον οὖν, ὅτι τὰ σύμπαντα τὰ α β γ δ ε, καὶ τὸ ι, τουτέστι τὸ τρίτον τοῦ ε, τοῦ α ἐστὶν ἐπίτριτα.



κδ Πᾶν τμῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ, καὶ ὕψος ἴσον. ἔστω γὰρ τὸ α δ β ε γ τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. τὸ δὲ α β γ τρίγωνον ἔστω, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι, καὶ ὕψος ἴσον. τοῦ δὲ α β γ τριγώνου ἔστω ἐπίτριτον τὸ κ χωρίον. δεικτέον ὅτι ἴσον ἐστὶ τῷ α δ β ε γ τμήματι.



εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζον, ἢ ἔλασσον. ἔστω πρότερον εἰ δυνατόν, μεῖζον τὸ α δ ε β τμῆμα τοῦ κ χωρίου. ἐνέγραψα δὴ τὰ α δ β, β ε γ τρίγωνα, ὡς εἴρηται. ἐνέγραψα δὲ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἄλλα τρίγωνα, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμήμασι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό. καὶ ἀεὶ εἰς τὰ ὕστερον γινόμενα τμήματα ἐγγράφω δύο τρίγωνα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμήμασι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό. ἐσσοῦνται δὴ τὰ καταλειπόμενα τμήματα ἐλάσσονα τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ α δ ε β γ τμῆμα τοῦ κ χωρίου. ὥστε τὸ ἐγγραφόμενον πολύγωνον μεῖζον ἐσσεῖται τοῦ κ, ὅπερ ἀδύνατον. ἐπεὶ ἐστὶν ἑξῆς κείμενα χωρία ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ, πρῶτον μὲν τὸ α β γ τρίγωνον τετραπλάσιον τῶν α δ β, β ε γ τριγώνων, ἔπειτα δὲ, τὰ αὐτὰ τετραπλάσια τῶν εἰς τὰ ἑπόμενα τμήματα ἐγγραφέντων. καὶ ἀεὶ οὕτω δῆλον, ὡς σύμπαντα τὰ χωρία ἐλάσσονά ἐστιν, ἢ ἐπίτριτα τοῦ μεγίστου. τὸ δὲ κ ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ μεγίστου χωρίου. οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ α δ β ε γ τμῆμα τοῦ κ χωρίου. ἔστω δὲ εἰ δυνατόν, ἔλασσον. κείσθω δὴ τὸ μὲν α β γ τρίγωνον, ἴσον τῷ ζ. τοῦ δὲ ζ

τέταρ-

τέταρτον τὸ κ. καὶ ὁμοίως τοῦ κ τὸ θ. καὶ ἀεὶ ἑξῆς τιθέσθω, ὡς τι καταγένηται τὸ ἔσχατον ἔλαττον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ κ χωρίον τοῦ τμήματος, καὶ ἔστω ἔλασσον τὸ ι. ἐστὶ δὲ τὰ ζ η θ ι χωρία, καὶ τὸ τρίτον τοῦ ι, ἐπίτριτα τοῦ ζ. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ κ τοῦ ζ ἐπίτριτον. ἴσον ἄρα τὸ κ τοῖς ζ η θ ι, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ι. ἐπεὶ οὖν τὸ κ χωρίον τῶν μὲν ζ η θ ι χωρίων ὑπερέχει ἐλάσσονι τοῦ ι, τοῦ δὲ τμήματος μείζονι τοῦ ι, δῆλον ὡς μείζονά ἐστι τὰ ζ η θ ι χωρία τοῦ τμήματος, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ, ὅτι ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν χωρία ἑξῆς κείμενα ἐν τετραπλασίονι λόγῳ, τὸ δὲ μέγιστον ἴσον ᾖ τῷ εἰς τὸ τμῆμα ἐγγραφομένῳ τριγώνῳ, τὰ σύμπαντα χωρία ἐλάσσονα ἐσσεῖται τοῦ τμήματος. οὐκ ἄρα τὸ α δ β ε γ τμῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ κ χωρίου. ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ μεῖζον, ἴσον ἄρα ἐστὶν τῷ κ. τὸ δὲ κ χωρίον ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ α β γ. καὶ τὸ α δ β ε γ τμῆμα ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ α β γ τριγώνου.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΥ
παραβολῆς τέλος.

ARCHIMEDIS SYRACVSANI PHILOSOPHI AC GEOMETRAE EXCELLENTISSIMI OPERA, quæ quidem extant omnia, latinitate iam olim donata, nuncq́ primum in lucem edita.

Cum Cæsareæ Maiestatis gratia & priuilegio ad quinquennium.

BASILEAE.

AMPLISSIMO SENATORVM ORDINI VRBIS NORINBERGAE, DOMINIS SVIS obseruandis, Thomas Gechauff, cognomento Venatorius, se ipsum commendat.



Hilosophorum omnium, ut uidere licet, P. C. unum hoc ac subinde continuum fuit studium, ut simul & animos & actiones inconditæ multitudinis, ab illis nunquam non genus nostrum sequentibus erroribus, eximerent, atque ad inquirendæ ueritatis amorem potius inclinarent, instigarent, inflammarent. Quorum magistros bifariam diuisos à ueteribus iam olim accepimus. Aut enim Italici uocabantur, ab ea Italiæ parte, quæ pridem magna Græcia est dicta, quorum autor & magister Pythagoras ille Samius fuisse perhibetur. Putabant illi plenam naturalium rerum, synceramque cognitionem penes se unos reperiri posse. Qui ab ea secta alieni esse uidebantur, Ionicos se dicebant, hoc potissimum nomine sibi placentes, quod in ipsa media, ut dicitur, Græcia philosophiæ placita traderent. Post longam uerò seriem doctorum tandem ad Anaxagoram et summa et caput eius sectæ rediit: cui deinde Archelaũ successisse perhibent. Huius Archelai successorem, Augustinus doctor ecclesiasticus sanctus, Socratem facit: quem ipse Plato (aliorum philosophorum quasi deus) magistrum habuisse, antiqua et iam olim recepta in scholis nostris opinione, ad nos usque perlatum est. Atqui Socrates cũ uideret causas rerum ab illis non rarò inquiri, qui parum purgato essent animo: cum ipse interim animum suum ad cognitionem potius ueri et summi illius boni intenderet: noluit imperitam multitudinem rebus illis, quæ captum humani ingenii ut plurimum superant, implicatam teneri. placuit communi hominum utilitati consulere, ac ipsum iam sapientiæ studium ad corrigendos mores, componendasque ciuiles actiones, quasi cœlo ereptam prædam, inter homines collocare. Et rectè quidem ille censuit. Vt quid enim relictis imis, ad summa statim admitterentur, quæ alioqui infausto sidere nata cõspiciuntur ingenia? ad aratrum potius quàm ad Musarum sacra, idonea iudicamus huiusmodi portenta. Præter rugas, & triste supercilium, & uesanam in pectore bilem, quid illi aliud è studiis suis referunt? Quæ uerè generosa est aquila, implumis adhuc cum est, nunquam se cœlco credit aperto: secus factura, ubi ad solis radios contuendos iam luminis sibi esse uiderit satis. Sic præclara quæ sunt ingenia, intra præscri

ptos sapientiæ limites tantisper sese continebunt, donec non tam suo amore, quàm doctorum uirorum iudicio, summas bonarum artium partes cũ laude tueri & possint & ualeant. Quisquis hæc quæ dicimus hic, improbare conatus fuerit, illum nos extra se positum, equidem non temerè contenderimus. Quid enim omnino esset uita nostra, si hisce studijs carere oporteret, sine quibus nulla inter nos constare potest humanitatis societas, nisi barbara quædam barbaries, aut (ut Plato uocat) ἀφιλόσοφος καὶ ἄμουσος. Homine nesciente põdera, atq; adeò nesciente mensuras rerum, quid stolidius, imò quid inhumanius uidere queat ille omnia inspicientis solis oculus? Quare non ab re uidetur ille mihi cum sacra tũ prophana polluere, quisquis posthac honestas disciplinas uel contẽpserit, uel alijs ad ea penetrare uolẽtibus, aditum recluserit, aut alioquin data opera remoratus fuerit. Præstat cum præclaris ingenijs conuenire potius, quàm longè lateq; regnantem, ac bonas artes uastantem, iuuentutem à contemplatione ueritatis deterrentem, sequi consuetudinem. Quid est enim consuetudo ad ueritatem collata, nisi pabulum erroris? Qui tales sunt, in orbẽ illum disciplinarũ, quæ studio quærendæ ueritatis famulantur, nullo modo se intromitti sperent. Occinimus illis uetus hoc: Procul este prophani. Procul, inquã ego, à lectione Archimedis nostri absint uniuersi, qui nihil ad regulã, nihil ad perpendiculum, nihil ad libellam reuocare didicerunt. Nos ut hoc cõsilium nostrũ admiserint, non ualde laboramus. nõ enim studemus placere illis, dum ui magna conamur rectis studijs prodesse, ac ipsi etiam humanitati satisfacere. Officij nostri partes sunt, latentẽ adhuc in rebus ueritatẽ eruere, ac omnia illius optima quæ sunt, humanis oculis conspicienda inferre. Quid hic enim positi agimus aliud, quàm ut plurimos ad ueritatis studia inuitemus, dum reuelata facie, ipsam perfectè contemplaturi sumus in patria? Interim tanquam in transcursu hisce uerè liberalibus artibus tædia præsentis uitæ fallentes non illibenter. Solent enim hæ artes honestissimæ non tantũ delectare suos cultores, sed etiam commouere, afficere quoq; & inflammare animũ ipsum, ut hoc maiore desiderio ad perfruendæ olim ueritatis bonũ rapiatur, quo præstantior est umbrâ ueritas, lux tenebris, deniq; quo est maior & melior hominibus ipse Deus. Nouimus uestri Senatorij ordinis uiros non paucos, qui se hisce artibus penè immerserint, cum alioqui naturalium rerum contemplatione & essent & haberentur clarissimi ab omnibus. Arbitrati sunt illi sapienter quidem, quòd in his ipsis studijs insumptas in Remp. uires, recollecturi essẽt, ac parum reclusis à se publicis curis, quoties in gratiã

redi-

redirent cum literatis literis, lau dem longe amplissimam sese consecutos esse censebant. Quis enim indecorum putauerit in ea re recreari, refocillariq; animo, à qua neq; naturæ nostræ Genius abhorret, neq; ipse opifex rerũ subinde offendi poßit unquã? Et meritò illi in hoc potißimũ studiorũ genus incubuerũt. Quia enim liberæ ciuitates aut mari aut terra uictus rationẽ quærere uidẽtur: ut naufragia uitẽt gubernatores, astronomiæ cognitio cũ primis sulcãtib. maria, nõ tam utilis quàm necessaria erit futura. quæ hac deinde industria importãtur merces, ut rectißimè in singulos dispensentur, numerorũ scientia primas sibi uendicare solet. Ne porrò termini rerũ confunderentur, ab Aegyptijs, propter Nili exundationes, noua apud illos iuuẽta esse perhibetur dimensio agrorum, quæ ob eam causã Geometriæ nomen ferre iure queat. Excelluisse in hisce disciplinis Vulcanum illum, Homerus haud obscurè significauit:

Cum Thetis Idæos (heu nunquam uana parentum
Auguria) expauit uitreo sub gurgite remos.

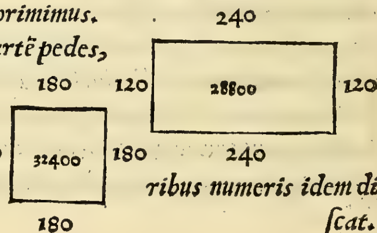
Vulcanus itaq; ad Thetidis preces, Achilli clypeum cõfecturus, quid non summè, quid non artificiosissimè ob oculos lectoris posuit? Videmus eodem in clypeo non tam uirtutum quàm disciplinarum semina omnium, ac rerum præclarißimarum perfectißimè expreßa simulacra, quibus ille artificiósa compositione sua, dij boni, quantam maiestatem addere solet? Quantum deinde gratiæ & laudis consecutus est, in coniungendis per duas subinde ciuitates, cum machinamentis, tum instrumentis, tum ornamentis, ut in unius clypei circumferentiam unà simul & officia magistratus, & studia militum, & uulgi spectacula, & agricolarum exercitia, & pastorum lusus, & alia id genus multa, quæ Geometrica proportione contemplanda doctorum uirorum oculis obiecerit: quæ omnia, qui sapientiæ nomen daturus est, ignorare non debet. Nam uirtutis & iustitiæ imaginem in eius clypei descriptione propositam, facile quisquis non est ingenio præditus obtuso, dispicere queat. Quid quod optimus uates & sphæram imaginum cœli, solis dico & lunæ, stellarumq; cursus, cum alijs multis, callidißime unius clypei planicie est complexus? quæ in contemplationem deducta, ut operosum, ita magnificum absoluere uidentur ædificium. Tanta est gratia rerum bene dispositarũ, ubi illa singularum partium symmetria ad recte doctos & inculpatos iudices fuerit conuocata. Vidimus nos Romæ cum essemus in monte Capitolino (Capitolium hodie uocant eum locum) Comœdiam agi, cumq; à personis peragẽda esset Pœnulus, ipsa quæ una è uiginti numero est comœdia Plauti, per eos

hominés, qui haud ita bene ad illam subeundam prouinciam essent parati. Neq; enim personas, quas referebant (licet Itala proles) ubique fœliciter repræsentabāt: quod cuius uitio factum sit, equidem nunc non sum scripturus. Erat hic locus nō parum à prima sui constitutione iam factus alienissimus. In eo tamen, quia erat capax multitudinis, & quia omnia numero, pondere quoq; & mensura digesta esse uidebantur, facile quod in actoribus fabulæ desiderabant complures, iusta illa compositæ aulæ symmetria, spectatores in officio retinebat. Tanta est, ut diximus, bene in ordinem digestarum rerum gratia.

Hic iuuat augustum Romæ uidisse theatrum,
Instratumq; locum tabulis, nitidisq; columnis,
Qui ter uiginti, sex atq;, ascendit in ulnas,
Si in longum reuoces. latè contraxior exit,
Fert uix dimidio, ceu continet area longi.
Bis quoq; quindenis ulnis spaciatur in altum.
Hic quia Saturnus latuit, Saturnius olim
Dictus. post Cicero cecinit, Tarpeia rupes.
Postera deinde ætas tenuit Capitolia dici.
Non ratione tamen sine, &c.

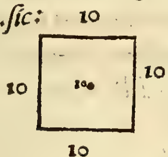
Hæc ideo retulimus copiosius, ut opinionibus imperitæ multitudinis commodius occurreremus: ac dein ut intelligant hi qui tractabiles adhuc sese præbēt mansuetioribus Musis, hæc studia non tantum priuatis hominibus summam sæpè adferre uoluptatem, sed etiam publicè & in foro & in curia, & in scholis exercitamēta esse honesta, docta & laude digna, utilia quoq;, & rebusp. necessaria. Ob eā, opinor, causam, M. Fabius Quintil. lib. de Institutione oratoria primo, futurū ait oratorē Geometriæ oportere omnino esse peritū, quòd Geometria potiss. in numeros diuisa sit, atq; formas. Nos hic de iugeri mēsura, quæ adfert ille, adducimus tantū, & præterea nihil. Nos facillimū, inquit Quintilianus, et imperitis sequamur experimentū. Iugeri mensurā ducētos et quadraginta lōgitudinis pedes esse, dimidioq; in latitudine patêre, non ferè quisquā est qui ignoret. Huius schema nos ita rudibus literarū exprimimus.

At centeni & octogeni in quamq; partē pedes, idē spaciū extremitatis. Sed multo amplius diuisæ quatuor lineis areæ faciunt. exemplum esto.

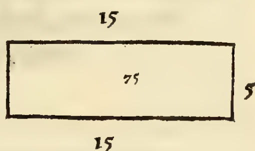


Id si computare quē piget, breuioribus numeris idem discat.

ſcat. Nam deni in quadram pedes, quadraginta per oram intra centum erunt. ſic:



At ſi quini deni per latera, quini in frõte ſint, ex illo amplectuntur quartam partem deducent, eo dẽ circumductu, ſic:



Si uero porrecti utrinq; undeuiceni ſin 5 gulis diſtent, non plures intus quadratos habebunt, quàm per quot lõgitudo circũducetur: quæ circũibit autẽ linea, eiuſdem ſpacij erit, cuius ea quæ centum continet. Schema illius ſic formabis. Hunc locum ideo figuris ſuis expoſitũ, oculis

19 — 1 — 1 — 19

ſubijcere uolui, quod uiderim quoſdam alioqui non indoctos uiros, qui ipſum aut non intellexerunt: aut quod iuxtà eſt, ſimulando prætererunt. Hæc cum dico, non doctoris partes uſurpo mihi, ſed monitoris tamen perſonã ubi recepero, qui æqui ſunt iudices, nõ contẽnent. Non hic oſtendã quæ elemẽta geometrica, quo nomine à noſtris appellentur. nam quid ſignum ſit, quid linea, quid angulus, circunferentia quoq; & ſuperficies, præter Archimedẽ noſtrũ Euclides quoq; philoſophus et mathematicus Megarenſis, nõ utiq; incelebris, admodũ copioſe cõſcripſit. In ſolidis corporibus cõficiendis, qualia ſunt pyramides, coni, cylindri, cubi, ſphæræ, & id genus alia corpora, magiſtrũ hunc noſtrũ Archimedem, nemo non tutiſſime fuerit ſequutus. Hic eſt Archimedes ille, cuius machinationibus M. Marcellus multũ ac diu uictoriã ſuã apud Syracuſas inhibitã ſenſit: eximia tamen hominis prudentia delectatus uictor, adeò, ut captis Syracuſis capiti illius parceretur edixerit: penè tantũ gloriæ in ſeruato Archimede, quantũ in oppreſſis Syracuſis reponens. Quanquã intentũ geometricis formis, quas in puluere deſcripſerat, ab ignaro milite, quis'nã eſſet rogatus, cũ nomen ſuũ non ſtatim indicaret, obtruncatus, ſanguine ſuo artis propriæ lineamẽta confudit. Quo factũ, ut propter idẽ ſtudiũ modò donaretur uita, modò ſpoliaretur. Aegrè id Marcellum tuliſſe, ſepulturæq; curã habuiſſe, ac propinquis etiã inquiſitis, honori, præſidioq; nomẽ eius ac memoriam fuiſſe. Atque hæc de Archimede partim ex T. Liuio, partim ex Valerio Max. in præſentia retuliſſe ſit ſatis. Supereſt P. C. ut magno cõſenſu, hiſce præſertim turbulentiſſ. temporib. exulãtes, nudasq; ac penè iam extinctas illas uerè liberales diſciplinas humaniter colligere atq; fouere ſtudeatis. Decet enim magiſtratus aſſueſcere cũ primis nõ tantũ rebus humi repentib. ſed etiã ſtu-

dijs

dijs Musarum, ut quæ solæ molem illam tractandarum rerum, non raro leuare, frequenter uerò & excutere ab humeris uestris, quàm longißime & poßint et ualeant. Valete unà cum florentißima Republica uestra, diu fœlices. Ex urbe uestra, IIII. Calend. Februarij, Anno M.D. XLIIII.

ARCHIMEDIS DE SPHAERA ET CYLINDRO LIBER PRIMVS.

ARCHIMEDES DOSITHEO Salutem.

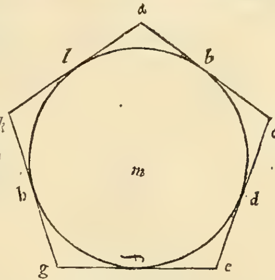


RIVS quidem ad te misi quę à nobis inspecta essent, cōscribentes eorum demonstrationes, quod omnis portio contenta à recta, & à coni rectanguli sectione, sesquitertia sit triangulo habenti basim cum portione eandem, & altitudinē eidem æqualem. Nunc autem quorundam occurrentiū theorematum, quæ effectu probata uidentur, demonstrationes conscripsimus. Ipsa uero huiusmodi sunt. Primum quidem, quod omnis superficies sphæræ quadrupla est circulo in ea maximo. Deinde quod superficiei cuiuscunq; portionis sphæræ circulus ille æqualis est, cuius quæ ex centro æqualis sit rectæ ductæ à uertice portionis, ad circuli qui basis est portionis circumferentiam. Ad hæc quòd cuiusq; sphæræ cylindrus, qui basem habeat circulum in sphæra maximum, & altitudinem æqualem sphæræ diametro sesquialter habetur: & superficies eius cum basibus superficiei sphærę est itidem sesquialtera. Hæc autem accidentia natura ipsa inerant prius circa dictas figuras, uerum non fuerant à superioribus cognita, qui ante nos

axiomata lemmata

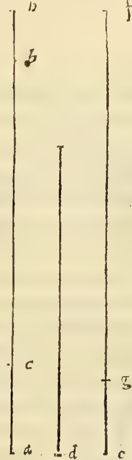
Scribantur autem prius & ~~dignitates~~, & ~~sumpta ad demonstrationem eorũ~~. Sunt quædam in plano curuæ lineæ terminatæ, quæ rectis iũgentibus terminos earum, aut totæ sunt in easdem partes cauæ, aut nihil habent in alteras. In easdem partes cauam uoco lineam talem, in qua si duo puncta utcunq; sumantur, lineæ rectæ inter illa puncta mediæ, aut omnes in easdem partes dictæ lineæ cadunt: aut quædam in easdem partes, quædam secundum eam, nulla uero in alteras partes. Similiter autem & superficies quædam finitæ sunt ipsæ quidem nõ in plano, sed terminos suos in plano habentes: & in easdem plani eius in quo earum sunt termini, partes aut totæ erunt, aut nihil habebunt in alteras partes. In easdẽ partes cauas illas uoco, in quibus si sumantur duo puncta, rectæ inter illa ductæ mediæ, aut omnes in easdem partes cadunt superficiei: aut quædam quidem in easdem partes, quædam secundum eas, nulla autem earum in alteras partes. Frustũ uerò solidum uoco, si quando sphæram secuerit conus, qui uerticem habeat ad centrum sphæræ, figuram intra comprensam, & à superficie coni, & à superficie sphæræ intra conum comprensæ. Rhombum autem solidum uoco, ubi duo coni in eadem base constantes, uertices habuerint utrinq; sitos plano basis, ita ut axes eorum sint in directum sibi inuicem coniuncti, figuram ex utrisq; conis cõpositam. Sumo autem hæc: Linearum eosdem terminos habentium rectam minimam esse. Aliarum uero quæ in plano fuerint, si eosdem habuerint terminos, eas inæquales esse. Vbi autem ambæ in easdem partes cauæ fuerint, ut uel altera tota comprendatur ab altera, uel altera earum ab alterius superficie, & recta eosdem cum illa terminos habente contineatur: uel quidpiam ipsius contineatur, quidpiam uero habeat commune cum altera, & comprensam esse minorem. Similiter autem & superficierum eosdem terminos habentium, si in plano terminos habuerint, minimam esse planam. Aliarum uero superficierum, et eosdem terminos habentium, si in plano terminos habeant, eas esse inæquales: ubi autem ambæ in partes easdem cauæ fuerint, & uel altera tota contineatur ab altera, aut alteram earum ab altera superficie, & plana eosdem terminos cum illa habente: aut eius partem quidem comprendi constet, partem uero communem habere, & comprensam esse cõprendente minorem. Amplius autem & inæqualium linearum, siue superficierum, siue solidorum, maius excedere minus tanto, quantum ipsum sibiipsi totiens complicari potest, ut excedat omnem propositam sui generis quãtitatem. His autem suppositis, si in circulum figura multiangula inscribatur, constat ambitum figuræ inscriptæ esse circumferentia circuli minorem. Vnumquodq; enim figuræ inscriptæ latus minus est ea circumferentiæ parte, quæ per ipsum abscisa fuerit.

SI circulo figura plurium angulorum circumſcribatur, linea recta quæ ex omnibus figuræ circumſcriptæ lateribus ſimul in directum coniunctis efficitur, ipſius circuli circūferentia longior eſſe probatur. 1



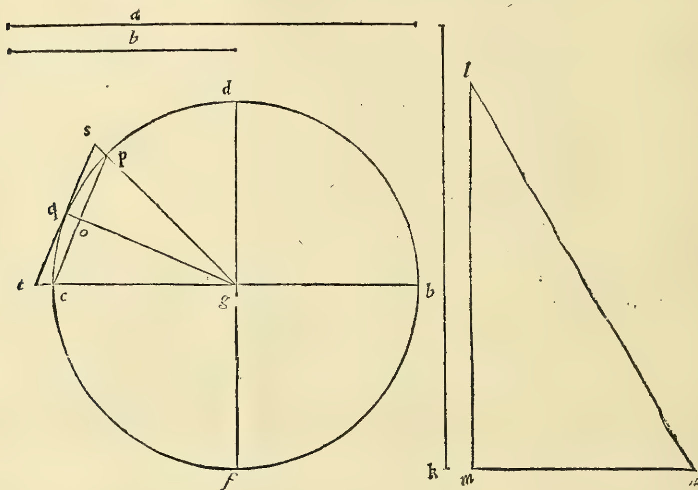
Circulo itaq; cuicunq; figura quæuis pluribus angulis conſtituta circumſcribatur: Dico lineas dictam figuram claudentes, ſi ſimul in directum cō iungantur, lineam unam rectam conſtituere, circuli dicti circumferentia longiorem. Eſto igitur, exempli gratia, circulus cuius centrum m, quem circa ſit aptata figura a b c d e f g h k l, cuius anguli ſint ad puncta a c e g k notati, contactus uero laterum & circuli ad puncta b d f h l. Quoniam itaque a b, a l, cum arcum b l intra ſe coerceant, ipſo longiores habentur: ſimiliter c b, c d, ſuo arcu b d: item e d, e f, maiores: item f g, g h ſuo, demum k h, k l, quæq; duæ coniunctæ ſuis arcubus maiores ſint. eiſdem enim terminis cum ſuo quæq; duæ arcu prodeuntes ipſum includunt, erit, ut ſi una ex omnibus his recta linea iungatur, circuli circumferentia ſit longior, quæ ex illis arcubus colligitur.

DAtis duabus magnitudinibus inæqualibus, duæ rectæ lineæ poſſunt inueniri, quarum maior ad minorem ſit relata proportione minori, quàm magnitudo poſita maior ad minorem contineatur. 2 Sunto igitur duæ magnitudines datæ a b maior, d minor. Dico duas inueniri poſſe rectas lineas inæquales, quæ ſententiam propoſitionis exæquantur. Statuatur itaq; per ſecundam primi Euclidis b c æqualis ipſi d, ſumatur deinde linea quæuis recta, quæ ſit f g, atq; a c totiens ſibi ipſi coaceruetur & multiplicetur, donec productum excreſcat maius ipſo d, quod uocetur a k. eſto et f g tantundem multiplex ipſius g h. erit itaq; ex hoc, ut quemadmodum a k & a c ſeſe reſpiciunt, ita f g, & g h. & item modo cō uerſo, ſicut a c refertur ad a k, ita quoq; g h ad g f. Aſt quoniam a k eſt maius ipſo d, cui c b poſitus eſt æqualis, referetur igitur a c ad a k minori proportione, quàm idem a c ad c b. quare ex coniuncta proportione c a k ad a k minori, quàm a c b ad c b. ea dem ratione h g f ad g f minori, quàm a c b ad c b. Verum c b erat ipſi d ſumpta æqualis, ergo linea h g f ad g f lineam minori proportione habetur, quàm a c b magnitudo ad ipſam d. Inuentæ ſunt igiť duæ rectæ inæquales, quæ id quod iuſſum fuerat effecerunt, ut maior ad minorem proportione ſit relata minori, quàm magnitudo maior data ad magnitudinem minorem.



DAtis duabus magnitudinibus inæqualibus, & circulo quocunq;, fieri poteſt ut intra circulum datū plurium angulorū figura collocetur, at altera huic ipſi ſimilis eidem circulo aptetur extrinſecus, ita ut exterioris latus ad latus interioris proportione minori colligetur, quàm magnitudo data, maior ſcilicet ad minorē. 3 Sint duæ datæ magnitudines a b, & circulus quiuis datus. Dico id effici poſſe, quod propoſitio iubet. Inuentæ iam duæ rectæ ſupra proximè fuerunt, quarum ſit k maior, l m minor, contineantq; minorem proportionem quàm duæ datæ magnitudines. educaturq; à puncto m linea perpendicularis m n, & à puncto l ducatur ad lineam m n recta æqualis k, quod fieri poteſt. ducantur etiam in circulo duæ diametri c b, d f, ſeſe ad angulos rectos ſecantes in centro g. diuidentes igitur in duo æqualia angulum d c g, & huius iterum dimidiū in duo æqua: ab hac diuiſione nō deſiſtemus, donec angulum offenderimus quempiam, qui ſit minor

duplo anguli m l n, qui sit p g c. & ducatur linea recta p c, quæ erit latus figuræ plurium angulorum æquilateræ. angulus enim p g c, angulum d g c metitur. & p c arcus eadem ratione d c arcum metitur, & circulum totum, quapropter figura quæ-

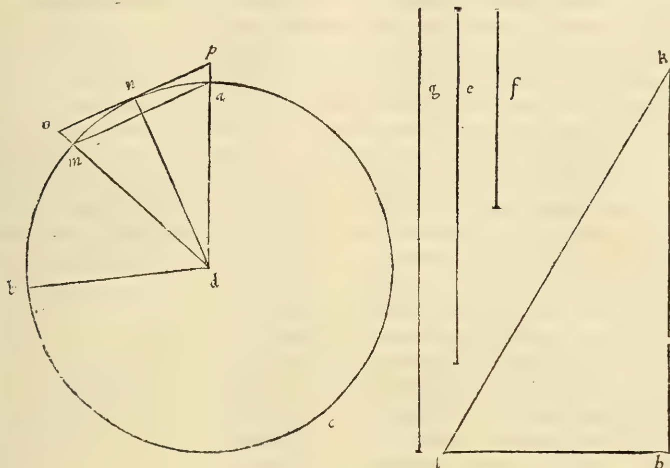


sita erit circulo inscripta. Secetur item in duo æqua angulus p g c, ducta g q linea, & à puncto q ducatur una recta contingens circulum s q t, occurrens lineæ g p in puncto s, & lineæ g c in pũcto t, extra circulum ductis utrisq;: erit igitur s t recta, latus figuræ plurium angulorum æquis lateribus comprænhensæ, quæ circulo sit circumducta. At uero quoniam p g c angulus minor est duplo anguli m l n, duplus autem angulo q g c, minor erit angulus q g c angulo m l n. cumq; o angulus, ubi g q secat rectam p c, & angulus m sint recti: l n recta ad l m rectam maiore proportione referetur, quàm g c recta ad g o rectam. est autem g c recta æqualis g q rectæ: ex hoc g q rectam ad g o rectam constat minori proportione referri, quàm l n rectam ad l m rectã. prętera l n ad l m minori proportione tenetur, quàm a recta ad b rectam. Est igitur s q t latus figuræ plurium angulorũ æquilateræ circulo circumductę, & p o c latus intra circulum collocatæ figuræ: quæ sic se habent, ut propositum fuerat inueniri posse.

4 DAtis item duabus magnitudinibus inæqualibus, & circuli cuiuspiam sectore dato, potest altera circa sectorem, altera intra eundem aptari figura pluriũ angulorũ, ita ut exterioris latus ad latus interioris minorẽ proportionem retineat, quàm magnitudo maior data ad minorem. Sint itẽ duæ magnitudines inæquales datæ, e maior, f minor. Esto etiam quiuis circulus a b c, cuius centrum d, sectorque eius ad ipsum d terminatus a d b. iubemur itaq; ipsi sectori circumaptare, & intra duas figuras plurium angulorum reliqua latera habentes æqualia, exceptis d a & d b, ita effectas ut propositio dicit. Esto inuentas esse duas rectas inæquales g h k, maiorem g, atq; ita effectas ut g recta ad h k minorem proportionem habeat, quàm magnitudo maior ad minorem. hoc enim fieri posse suprà demonstrauimus. & à puncto h ducatur perpendicularis h l, & à puncto k ducatur ad rectam h l recta æqualis g rectæ. quod fieri potest, cum g recta sit longior h k. diuiso igitur angulo a d b in duo æqua, & item eius dimidio in duo æqua distributo, & hac diuisione perducta quousq; occurrat angulus minor duplo anguli h k l, qui

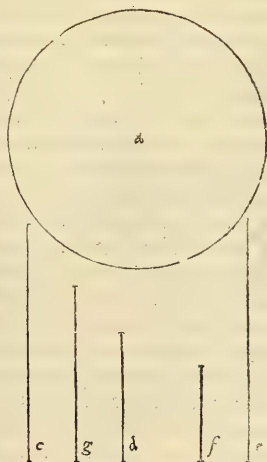
sit

sit a d m. erit igitur a m recta latus figuræ plurium angulorum intra sectorem collocatæ. Si præterea diuidamus in duo æqua angulum a d m, ducta recta d n, & à puncto n eduxerimus rectam p n o, contingentem sectorem in puncto n, occur-



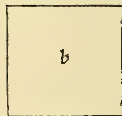
rentem ipsi d a in puncto p, & ipsi d m in puncto o, fecerimus p n o rectam, latus figuræ plurium angulorum ipsi sectori circumductæ, quod ad latus figuræ iam intra sectorem descriptæ minorem seruat proportionem, quàm magnitudo maior e ad minorem f, prout propositio dicebat fieri posse.

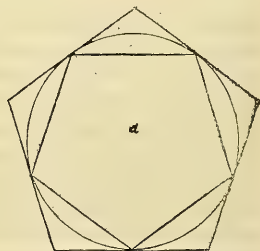
Circulo dato, & duabus magnitudinibus inæqualibus, ipsi circulo posse unã intra eundem, alteram extra aptare figuram plurium angulorum, quarum exterior ad interiorem seruat minorem proportionem, quàm magnitudo maior ad minorẽ. Exponatur circulus a, & duæ magnitudines inæquales, e maior, f minor. Oportet igitur ipsi circulo a alteram intra, alteram extrà aptare figuram plurium angulorum, ita ut fiat quod propositum est. Constituam primo duas rectas inæquales, c maiorem, d minorem, ita ut c minori proportione referat̃ ad ipsam d, quàm e ad ipsam f. accepta media proportionali inter c & d, quæ sit g, constat c ipsa g esse maiorem. Circumdetur itaque circulo figura plurium angulorum, & altera similis illi intra eundem statuatur, hoc pacto ut latus exterioris ad latus interioris minorem teneat proportionem, quàm c ad ipsam g, quemadmodũ suprà docti fuimus. Quoniam igitur figuræ exterioris ad interiorem est ea quæ lateris illius ad latus istius duplicata proportio, hæc autem ipsa minor habetur quàm c ad ipsam g duplicata, quæ est c ad ipsam d, quæ quidem & ipsa minor est cõstituta quàm ea quæ maioris magnitudinis habetur ad f minorem: colligitur inde, ut figuræ exterioris & figuræ interioris proportio multo minor sit ea quæ est magnitudinum e & f proportione. 5



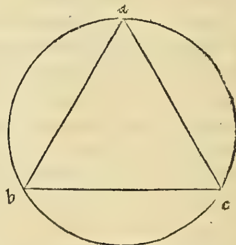
Similem ostendemus, duabus inæqualibus magnitudinibus datis, & circuli sectore dato, posse duas, alteram circa ipsum, alteram intra constituere figuras plurium angulorum inter se similes, quarum exterior ad interiorem minori teneatur proportione, quàm magnitudo maior ad minorem. Vnde id quoq; manifestum est, si quiuis circulus aut sector, præterea spacium aliquod proponatur, posse intra circulum uel sectorem figuras plurium angulorum æquilateras collocari, & item in reliquis semper partibus circuli uel sectoris eundem figuras inscribendi modum continuari, donec tandem quæ ex circulo uel sectore portiones superessent, dato spacio probarentur esse minores. hoc autem in elementis datum est.

6 DEmonstrandum autem nunc est, quod circulo uel sectore dato, & aliquo spacio similiter dato, fieri potest ut circa circulum uel sectorem figuram plurium angulorum æquilaterã describamus, intra cuius latera & circuli uel sectoris circumferentiam, partes quæ restant dato spacio sint minores. Sit primum conuentum, ut quæ de circulo tradentur, eadem ad sectorem referantur. Esto igitur datus circulus a, & spacium datum b. Dico fieri posse, ut circa circulum figuram plurium angulorum æquilateram componamus hac ratione, ut partes lateribus figuræ & circumferentia circuli compræhensæ, dato spacio minores probentur. Cum igitur duæ sint magnitudines inæquales, maior ex circulo & spacio dato composita, minor circulus ipse, circumscribatur una altera, inscribatur circulo figuræ plurium angulorum, ita ut circumscripta minorem proportionem habeat ad inscriptam, quàm dicta magnitudo maior ad minorem. Dico hanc figuram circumscriptam esse, cuius partes à lateribus suis & circumferentia cõprehensæ minores sunt b spacio. Si enim circumscriptæ ad inscriptã minor sit proportio, quàm circuli, & spacij b ad circulum, inscripta uero maior est circulus, erit circumscriptæ ad circulum minor quàm circuli, & spacij ad circulum. Arguenti igit̃ ex disiũcta proportione probatur, dictas partes minorem proportionem ad circulum habere, quàm b spacium, atq; idcirco minores esse b spacio dato. Vel etiam hac ratione, cum spacij b & circuli sit ad circulum proportio maior quàm circumscriptæ ad eundem, atq; idcirco circumscriptam minorem esse circulo & spacio b simul iunctis probatum est, dempto utrinq; circulo: illic spacium b maius, istic partes dictæ eo minores relinquentur. Eandem rationem in sectore sequemur.



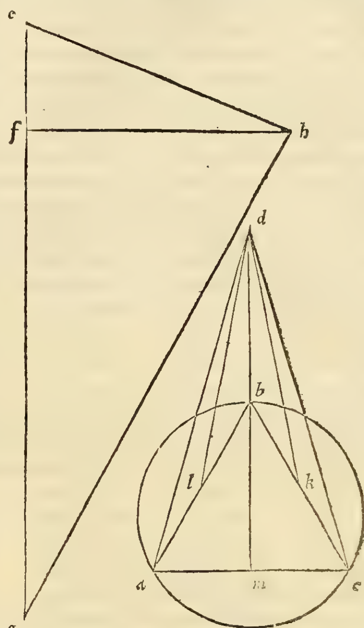


7 SI in cono æquicruri pyramis inscribatur ęquilateram habens basim, superficies eius dempta base æqualis est triãgulo qui habet basim æqualem lineæ coniunctæ ex omnibus lineis basim pyramidis claudentibus: & altitudinem habet lineam perpendicularem, æqualem perpendiculari quæ ducta sit à uertice coni ad unum ex lateribus basis pyramidis. Sit conus æquicruris, cuius basis existat circulus a b c, intra quem inscribatur pyramis æquilaterã basim habens, quæ sit a b c. Dico huius superficiẽ, basi dempta, triãgulo dicto æqualem esse. Cum enim conus sit æquicruris constitutus, & basis pyramidis æquilatera ponatur, altitudines triangulorum

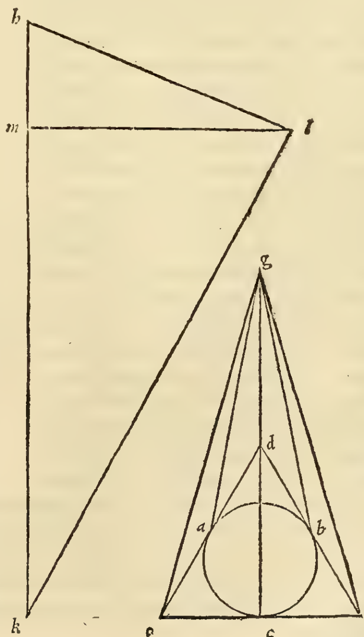


rum

rum basim pyramidis claudentium perpendiculares inter se æquales esse oportet, trianguli uero basim habent a b, b c, c a. altitudinem autem eam quàm diximus perpendicularem: quare triangulos necesse est esse omnes triangulo æquales, qui basim habeat æqualem a b, b c, c a simul iunctis: altitudinem uero eam quæ sæpe dicta est, perpendicularem.



Alia clarior demonstratio. Esto conus æquicruris, cuius basis circulus a b c, uertex aũt punctũ d. & in eũ pyramis inscribatur, basim habens a b c æquilateram, & ducantur lineæ rectæ d a, d b. Dico quod a d b, a d c, b d c trianguli æquales sunt triangulo rectangulo, cuius basis ęqua sit trib. lineis trianguli a b c: perpẽdicularis uero, quæ à uertice coni ad basis latus ducitur, æqualis perpendiculari trianguli rectanguli quem ponimus. Ducantur itaq; perpendiculares d k, d l, d m. has palàm est æquales esse inter se. ponatur deinde triangulus e g h, qui e g basim habeat æqualem lineis a b, b c, c a simul iunctis: e h perpendicularẽ ipsi d l perpendiculari æquam. Quoniam igitur quadrangulus rectangulus qui b c, d l lineis continetur, duplus est triangulo d b c: similiter qui continetur lineis a b, d k, triangulo a b d duplus: itẽ qui a c, d m lineis clauditur, duplus & ipse triangulo a d c: fit ut quadrangulus rectangulus qui clauditur linea cõstituta ex lineis a b, b c, c a, claudentibus basim simul iunctis, & linea d l perpendiculari à uertice ducta, duplus habeatur triangulus a d b, b d c, c d a. Est autem idem quadrangulus e g h f, duplus triangulo e g h. quare e g h triangulum æqualem esse triangulis a d b, d b c, c d a necessariò demonstratum est.



Si cono ęquicruri pyramis circũscribatur, superficies pyramidis excepta base æquatur triangulo rectãgulo, qui basim habeat æqualem lineis basim pyramidis cõtinentibus simul iunctis, altitudinem uero lateri ipsius coni æqualem. Esto conus, cuius basis circulus a b c. huic pyramis circũscribatur, ita ut latera eius basis d e f

8

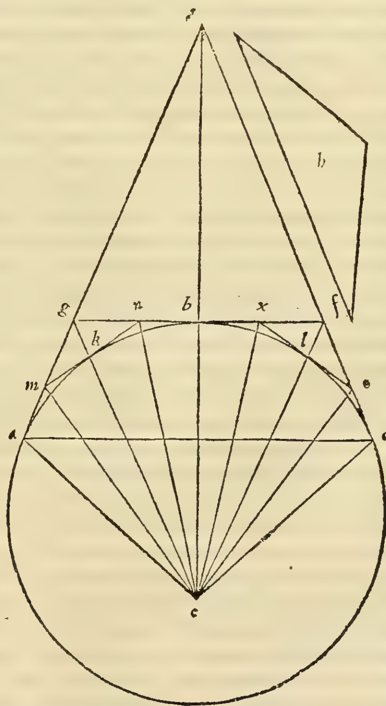
circum-

circulum contingant. Dico igitur superficiem huius pyramidis, excepta base, triangulo dicto probari æqualem. Quoniam igitur ipsius coni axis supra basim a b c perpendiculariter erectus habetur, uidelicet supra circulum a b c. & quæ ab eius centro rectæ ad contactus ducuntur, perpendiculares sunt ipsis d e, e f, f d contingentibus: erunt etiam quæ à g uertice coni ad eosdem contactus deductæ fuerint rectæ, g a, g b, g c, eisdem d e, e f, f d perpendiculares, quas inter se æquas esse positum est, cum sint latera coni. Ponatur itaq; triangulus h k l, qui habeat h k latus æquum lineis d e, e f, f d claudentibus basim pyramidis, & habeat m l perpendicularem æquam g a. Quoniam itaq; quadrangulus rectangulus qui continetur d e, a g lineis, duplus est e d g trianguli: & qui continetur d f, g b, duplus trianguli d f g: item qui continetur e f, e g, duplus trianguli e g f: erit igitur qui h k, & a g, quæ æquatur m l lineis continetur quadrangulus, duplus e d g, f d g, e g f triãgulis. Est autem & qui h k, l m lineis clauditur quadrangulus, duplus triangulo h k l. quare colligitur, superficiem pyramidis excepta base æquam esse triãgulo, qui basim habeat æquam lineis claudentibus basim pyramidis simul iunctis: altitudinem uero lateri coni æqualem.

9 SI cono quouis exposito æquicruri, intra circulum, qui est basis ipsius coni, linea recta inciderit, & ab ipsius rectæ terminis duæ rectæ ad coni uerticem educantur: triangulus qui ab incidente & ab eductis ad uerticem comprehendit, minor est ea coni superficie quæ inter rectas ad uerticem ductas continetur. Esto coni æquicruris basim esse a b c circulum, uerticem uero d, & recta quędam ducatur intra basim quæ sit a c: & à uertice d, ducantur ad a c pũcta, d a, d c rectæ duæ. Dico a d c triangulum minorem esse ea coni superficie, quæ intra a d c comprehenditur. Diuidatur itaq; a b c circumferentia in duo æqua puncto b, & ducantur rectæ a b, c b, d b. trianguli ergo a b d, b c d maiores erunt triangulo a d c. quantum uero dicti trianguli superant triãgulum a d c, esto illud h: aut igitur h sectionib. a b, b c minus est, aut non. Ponatur primò nõ minus. Quoniam igitur duæ sunt superficies, & conica, uidelicet inter a b d cõprehensa, cum sectione a e b, & triangularis a d b quæ terminis eisdẽ clauduntur, lineis uidelicet a d b trianguli, erit ut complectens sit maior complexa. Superficies igit conica inter a b d comprehensa, cum sectione a e b, triangulo a b d maior habetur. similiter & quæ inter d b c comprehẽditur, cum sectione b f c, triangulo d b c probatur maior esse. Tota igitur conica superficies dicta, cum h spacio, erit dictis triangulis maior. Sed trianguli dicti æquantur triangulo a d c, & h spacio: ipso h spacio quod commune est sublato, relinquitur, superficiem conicam inter a d c comprehensam, triangulo a d c esse maiorem. Ponatur secundò, h spacium sectionibus a b, b c minus esse. Diuidentes igitur a b, b c arcus in duo æqualia, & eorum

eorum dimidia rursus in duo æqualia, sumemus tandem sectiones quæ sint h spacio minores, sintque illæ a e, e b, b f, f c lineis contentæ. & ducãtur rectæ d e, d f. Rursus eadem prorsus argumentatione, superficies coni inter a e d contenta, cum sectione a e, triangulo a d e probatur esse maior. & ea quæ inter e d b, cum sectione e b, triangulo e d b maior. Superficies igitur conica inter a d b compræhensa, cum sectionibus a e, e b, maior erit a d e, e b d triangulis. Cum autem a d e, e d b trianguli, sint a d b maiores, uti demonstratum est, multo magis erit superficies coni inter a d b comprehensa, cum sectionibus a e, e b, maior triangulo a d b. atque eadem ratione superficies conica quæ inter b d c compræhendit, cum sectionibus b f, f c, triangulo b d c maior esse ostenditur. quare tota superficies conica, quæ inter a d c cõprehenditur, cum sectionibus a e, e b, b f, f c dictis, maior esse colligitur triangulis a b d, b d c. ipsi autem æquales sunt triangulo a d c, & spacio h. atque horum sectiones dictæ h spacio sunt positæ minores. reliquum est igitur, ut superficies conica inter a d c compræhensa, necessariò maior esse dicatur triangulo a d c: quod erat ostendendum.

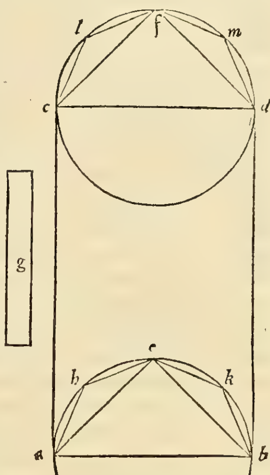
SI rectæ ductæ circulum, qui sit coni basis, contingant, in eodem plano cum circulo constitutæ, atque inuicem concurrant, & à punctis contactuum atque cõcursu rectæ ducantur ad uerticem coni trianguli à rectis circulum contingentibus, & ab his quæ à uertice ad dicta puncta descendunt comprehensi, sunt maiores ea superficie coni quam dicti trianguli complectuntur. Esto conus, cuius basis circulus a b c, uertex autem punctum e, & circulum a b c contingentes ducantur in eodem plano cum circulo quæ sint a d, c d. & à puncto e, qui est uertex coni, ad puncta a d c rectæ ducantur, quæ sint e a, e d, e c. Dico triangulos a e d, d e c maiores esse ea coni superficie, quæ rectis e a, e c, & arcu a b c continet. Diuiso enim arcu a b c per æqua in puncto b, ab ipso puncto ducatur in utramque partem recta, cõtingens circulum in dicto puncto, quæ sit f b g, eritque lineæ a c intra circulum æquedistans. & f sit punctũ quo ipsa incidit lineæ a d, punctum uero ubi incidit lineæ c d sit g. deinde ab e uertice deducantur deorsum lineæ e f, e g. Quoniam igitur lineæ f d, & g d maiores sunt simul iũctæ, quàm linea f g, si simul sumantur communes a f & c g, erũt totæ a d, d c lineæ maiores a f, f g, g c. & quia e a, e b, e c sunt latera coni, idcirco sunt inter se æquales, cum conus sit positus æquicruris. Sunt etiam perpendiculares lineis a d & c d, quia anguli e a f, e c g sunt recti. Cum igitur triangulorum a e d, d e c bases, scilicet a d, d c, sint maiores basibus triangulorum a e f, f e g, g e c, quæ sunt a f, f g, g c: 10



eorum uero altitudines, id est perpendiculares, sunt inter se æquales, uidelicet e a, e b, e c. propter hoc erunt trianguli a e d, d e c, maiores triãgulis a e f, f e g, g e c. Quãtum igitur trianguli a e d, d e c excedunt triangulos a e f, f e g, g e c, sit æquale spacio quod uocetur h. aut igitur h minus est eis plani particulis, quæ lineis rectis a f, f g, g c, & arcubus a b, b c circa circumferentiam compræhenduntur: aut non minus eisdem. Esto primum h non minus. Quoniam igitur duas superficies coniũctas habemus, unam pyramidis eius quæ basim habet f a g c quadrãgulam superficiẽ, quæq; uerticem habet e: alteram conicam, quæ inter a e c includitur, cum sectione a b c, hæq; ambæ eisdem terminis insistunt, uidelicet trianguli a e c lineis. manifestum est ex hoc, superficiem pyramidis excepto triangulo a e c, maiorem esse conica superficie, unà cum sectione circuli a b c. Hac igitur sectione, quæ utrisq; superficiebus sumitur communis, remota ab utrisque, relinquentur trianguli a e f, f e g, g e c, unà cum plani particulis, quæ circa circumferentiam lineis rectis continentur: relinquetur etiam superficies conica a b c arcu, & e uertice compręhensa, quæ dictis triangulis unà cum particulis dictis ostensa est minor esse. Verum quoniam h spacium fuit positum non minus particulis illis: erunt idcirco dicti trianguli a e f, f e g, g e c unà cũ spacio h prædicta superficie conica maiores. ipsi uero trianguli unà cum h spacio æquãtur triangulis a e d, d e c. Erũt igitur a e d, d e c trianguli, dicta superficie conica ampliores. Esto secundò spaciũ h minus particulis dictis, tunc assidue circa circumferentiam a b c describemus figuras plurium angulorũ, semper diuidendo arcus in duo æqua, & à punctis sectionum lineas rectas educẽdo, quæ circulum contingant: nec ab ista opera desistemus, donec particulas circa circumferentiam lineis dictis & arcubus contentas, simul omnes habuerimus ipso h spacio minores. Esto igitur ut sumptę sint a m k, k n b, b x l, l o c, quæ h spacio minores habentur. & à singulis punctis singulæ lineæ rectæ ad uerticem e erigãtur. Rursus patet, triangulos a e f, f e g, g e c, maiores esse triangulis a e m, m e n, n e x, x e o, o e c. nam bases illorum simul iunctæ, sunt maiores basibus horum simul iũctis: altitudines uero omnium sunt æquales. Vnde rursus sequitur, quod pyramis cuius basis est figura plurium angulorũ, uidelicet a m n, x o c, uertex uero e maiorem habeat superficiem, excepto triangulo a e c, superficie conica quæ inter a e c cõtinetur, unà cum sectione a b c. Sublata igitur a b c, sectione utrisq; communi, reliquum pyramidis quod cõstat ex triangulis a e m, m e n, n e x, x e o, o e c, & particulis a m k, k n b, b x l, l o c, maius esse necesse est reliquo, scilicet superficie conica quæ inter a e c continetur. Verũ prædictis particulis spacium h positũ est maius. Præterea triãguli a e f, f e g, g e c demõstrati sunt esse maiores triãgulis a e m, m e n, n e x, x e o, o e c. igitur multo magis trianguli a e f, f e g, g e c, unà cũ spacio h, qui scilicet æquantur triãgulis a e d, d e c, sunt maiores conica superficie sæpe dicta. quare triangulos a d c, d e c, eadẽ quoq; superficie maiores esse, necessariò probatũ est.

11 SI in superficie cylindri recti duæ lineæ rectæ fuerint ab eius capite ad basim ductæ, ea cylindri superficies quæ dictis lineis includetur, maior erit superficie quadrangula & æquedistantium laterum, quæ quidem superficies dictis lineis & alijs duabus rectis continetur, quæ duæ extrema prædictarum duarum puncta utrinque connectunt. Esto cylindrus rectus, cuius basis sit circulus a b, eius caput c d. ducantur duæ rectæ a c, b d: item duæ aliæ rectæ a b in basi, c d in capite, secantes circulos basis & capitis. Dico itaque, quod ea cylindri superficies quæ lineis rectis a c, b d cõprehenditur, maior est superficie a b c d plana, & laterum æquedistantium. Diuidantur enim a b, & c d arcus in duo æqua ad e f puncta. & ducantur rectæ a e, e b: item c f, f d. hoc facto, quoniam a e, b e rectæ ipsa a b recta sunt maiores, & in ipsis stant duæ superficies quadrangulæ laterum æquedistantium, & æquè altæ ipsi cylindro & superficiei a b c d quadrangulæ, fit ut dictæ duæ superficies planę, quarum bases sunt a e, e b, superficie a b c d quadrãgula

gula plana maiores habeantur. Esto igitur g ſpaciũ æquale ei, quo illæ inueniuntur illa maiores. aut igitur g ſpacium minus eſt partibus plani, quæ continentur ab arcubus & rectis a e, e b, c f, f d, aut non minus eſt. Ponatur igitur primò non minus eis, tunc quoniam ſuperficies cylindrica à lineis rectis a c b d abſciſa, & ſuperficies compoſita ex ſuperficiebus quadrãgulis æquediſtantium laterum, quarum baſes ſunt a e, e b: altitudo uero eadem cum cylindro & triangulis a e b, c f d terminum habent eundem, ſcilicet ſuperficiem planam a b, c d rectis cõpræhenſam, & ambæ ſunt uerſus eandem concauitatem collocatæ, colligitur ſuperficiem cylindricam rectis lineis a b c d abſciſam, ſimul cum portionibus circulorum a b, c d maiorem eſſe ſuperficie compoſita ex ſuperficiebus quadrangulis æquediſtantium laterum, quarum baſes ſunt a e, e b: altitudo uero eadem cum cylindro. & ex triangulis a e b, c f d: ſublatis utrinq; triangulis a e b, c f d, qui ſunt communes utriſq;: relinquetũ ſuperficies cylindrica abſciſa rectis a b, c d, unà cũ



ſectionibus circulorum planis a e, e b, c f, f d: quæ ſunt maiores ſuperficie compoſita ex ſuperficiebus quadrangulis æquediſtantium laterum, quarum baſes a e, e b ſunt: altitudo uero eadem cum cylindro. Dictæ autem ſuperficies, quarum baſes ſunt a e, e b, æquantur ſuperficiei a c b d quadrangulæ, & æquediſtantium laterũ, unà cum g ſpacio. Reliquum eſt igitur, ut cylindrica ſuperficies rectis lineis a c, b d compræhenſa, maior eſſe dicatur ſuperficie quadrangula æquediſtantium laterũ, quæ a c, b d rectis lineis cõtinetur. Eſto igitur ſecundò, ut g ſpacium ſectionib. circulorum planis a e, e b, c f, f d minus ſit: tunc ſcindantur in duo æqua ſinguli arcus a e, e b, c f, f d, per puncta h k l m. & ducantur rectæ a h, h e, e k, k b, c l, l f, f m, m d. Hoc facto, perſpiciemus à portionibus circulorum planis a e, e b, c f, f d, non minus dimidio unicuique ſuo ablatum eſſe per triangulos rectilineas a h e, e k b, c l f, f m d. quo diuidendi & auferendi modo ſeruato, neceſſe eſt tandem ad portiones circulorum deuenire, quæ ſint g ſpacio minores. Eſto igitur ut ſumptæ ſint dicto g ſpacio minores a h, h e, e k, k b, c l, l f, f m, m d. Similiter demõſtrabimus quod ſuperficies quadrangulæ æquediſtantium laterum, quarũ baſes ſunt a h, h e, e k, k b, & altitudo æqualis cylindro maiores ſunt ſuperficieb. quadrangulis æquediſtantium laterum, quarum baſes ſunt a e, e b, & altitudo æqualis cylindro. Cum igitur cylindrica ſuperficies abſciſa rectis lineis a c, b d, unà cum ſectionibus circulorum planis a c b, c f d terminum habeant ſuperficiem planam rectis lineis a c, b d contentam: præterea eundem terminum habeat ſuperficies compoſita ex ſuperficiebus quadrangulis æquediſtantium laterum, quarum baſes ſunt a h, h e, e k, k b: altitudo uerò cũ cylindro eſt eadẽ, & ex rectilineis plani portionibus a h e k b, c l f m d: cumq; ſint utręque in eandem concauitatis partem collocatæ, & cylindrica complectatur rectilineam, erit complectens maior cõplexa. Si igitur rectilineæ plani portiones a h e k b, c l f m d, quæ utriſq; communes ſunt, auferantur, reſtabit ſuperficies cylindrica rectis a c, b d compræhenſa, unà cum ſectiunculis circulorũ planis a h, h e, e k, k b, c l, l f, f m, m d: quæ maior eſſe concluditur ſuperficieb. quadrangulis æquediſtantiũ laterum, quę ſimiliter ſunt relictæ: quarum baſes habentur a h, h e, e k, k b: altitudo eadem cum cylindro. Hæ autem ſuperficies nuper dictæ maiores ſunt ſuperficiebus quadrangulis æquediſtantium laterum, quarum

baſes ſunt a e,e b.& altitudo eadem cum cylindro. Item iſtæ impropriè dictæ ſuperficies quadrangulæ,ſunt æquales ſuperficiei quadrangulæ æquediſtantium laterum a c,b d,unà cum ſpacio g. Superficies igitur cylindrica rectis lineis compræhenſa a c,b d, unà cum ſectiunculis circulorum planis a h,h e,e k, k b,c l,l f, f m, m d,maior erit ſuperficie a c,b d quadrangula æquediſtantium laterũ,unà cũ g ſpacio,quod ſpacium poſitum eſt maius dictis ſectiunculis. Hoc igitur ſpacio g à dicta ſuperficie quadrangula ſublato, dictis etiam ſectiũculis a h,h e,e k,k b,c l,l f, f m,m d,à cylindrica ſubtractis, cum maius de minori, & minus de maiore ſit ablatum,relinquetur ſuperficies cylindrica rectis a c,b d compræhenſa,maior ſuperficie a c, b d plana quadrangula.

12 SI in ſuperficie cuiuſpiam cylindri recti duæ rectæ lineæ ductæ ſint, & ab earũ terminis aliæ rectæ ducantur contingentes circulum,qui quidem circulus dicti cylindri ſit baſis, ſitq; idem cum lineis rectis eum contingentibus in eodem plano conſtitutus,dictæ inſuper contingentes ad unum concurrant: tunc ſuperficies quadrangulæ planæ æquediſtantium laterum ab ipſis contingentibus & cylindri lateribus compræhenſæ,maiores erunt ea ſuperficie cylindri quæ intra duas lineas rectas in cylindro ductas continetur. Eſto itaq; cuiuſcunq; cylindri baſis circulus a b c,ſintq; in eiuſdem ſuperficie duæ rectæ lineæ, quarum termini ſint a c, à quibus terminis ducantur duæ rectæ circulum contingentes, atq; in eodem plano cum circulo cõſtitutæ, & itẽ concurrentes in puncto g. notentur & in capite cylindri aliæ duæ à terminis ductarũ in cylindro linearum ductæ, & in eodem plano cum circulo capitis conſtitutæ,& ipſum capitis circulum contingentes, & uerſus eandem partem concurrẽtes in quam lineæ circulum baſis contingentes concurrerunt. Hoc facto,oſtendendum eſt ſuperficies planas quadrangulares æquediſtantibus lateribus contentas,quæ uidelicet ſuperficies cõpræhenduntur à prædictis lineis contingentibus, & à lateribus cylindri, maiores eſſe ſuperficie cylindri quæ ſecundum a b c arcum baſis eſt compræhenſa. Diuiſo enim a b c arcu in duo æqua in pũcto b,ab ipſo b puncto ducatur in utramque partem recta contingens circulum baſis, & applicãs extremitates ſuas lineis baſim contingentibus in punctis e f. & ab ipſis punctis e f erigantur duæ rectæ uſq; ad ſuperficiem capitis,quæ ſint æquediſtantes axi cylindri. tunc ſuperficies quadrangulares æquediſtantium laterum,quæ continentur lineis rectis a g & g c, & à lateribus cylindri, maiores ſunt eis ſuperficiebus quadrangularibus æquediſtantium laterum,quæ ſub rectis a e,e f,f c,& ſub laterib. cylindri ſunt cõpræhenſæ. Cum enim e g & g f maiores ſint e f, ſi poſuerimus a e,f c communes, ſequetur totas ſimul a g,g c ſumptas maiores eſſe a e,e f, f c. & ideo ſuperficies a g,g c, ſuperficiebus a e,e f,f c ſimul ſumptis eſſe maiores. Quo autẽ ſunt maiores illis, ſit æquale ſpacio k. dimidium igitur ſpacij k,aut eſt maius portionibus plani compræhenſis ab a e,e f,f c rectis lineis & ab arcubus a d,d b,b h, h c, aut non eſt maius. Eſto primò maius. eius itaq; ſuperficiei quæ componitur ex quadrangularib. & æquilateris ſuperficiebus,quarum baſes ſunt a e,e f,f c, & ex quadrãgula plana a e,f c,in baſe cylindri,& alio quadrangulo ei ſimili in capite eiuſdem cylindri conſtituto,termini ſunt lineæ rectæ claudentes ſuperficiem quadrangularem, cuius baſis

basis est linea recta a c. Sunt etiam prædictæ lineæ termini eius superficiei, quæ cō ponitur ex cylindri superficie illa quæ secundum a b c arcum sumpta est, & ex se ctionibus a b c in base, & altera in capite, quæ similis est illi. Duæ igitur dictę super ficies quas compositas diximus eidem termino, plano insistunt, & sunt in eandem partem conuolutæ. & quædam pars unius complectitur quandam partem alteri- us, reliquum commune habent. Complexa itaq; minor erit complectente. Igitur sublatis cōmunibus, scilicet sectione a b c in base, & ea quæ sibi similis est in capi- te relinquet superficies cylindri quæ est secundū a b c sumpta, quam cōstat mino- rem esse reliqua superficie cōposita ex quadrangularib. superficiebus, quarum ba- ses sunt a e, e f, f c: & ex portionibus plani contentis ab arcubus & lineis rectis a e, e b, b f, f c in base, et ex totidem his similib. in capite. Sed superficies nuper dictę cū portionibus dictis, simul minores sunt superficie composita ex quadrangularibus superficiebus, quarū bases sunt a g, g c. nam ipsæ cum k spacio fuerant positæ æ- quales eidem. & portiones dictæ sumptæ sunt ipso k spacio minores. quare con- cluditur necessario, superficies quadrangulares quæ lineis rectis a g, g c, & laterib. cylindri continentur, ea cylindri superficie maiores esse, quæ secundum a b c arcū sumpta fuit. Esto secundo, si dimidium spacium k nō fuerit maius portionibus dictis, ducentur rectæ lineæ contingentes circulum, ut supra factum est, donec por tiones rectis lineis & arcubus compræhensæ dimidio k spacio simul sumptæ sint minores. & reliqua deinceps eodem ordine & eadem arguendi ratione conficie- mus, qua supra usi sumus.

His igitur ita demonstratis, manifestum ex dictis fit, quod si cono æquicruri py- ramis inscribatur, ipsius pyramidis superficies excepta base, minor est conica super- ficie. Vnusquisq; enim eorum triangulorum qui pyramidem comprehendunt, ea coni superficie minor existit, quæ ipsius trianguli lateribus insistit. quare tota si- mul pyramidis superficies excepta base minor esse probatur tota coni superficie, excepta similiter base. Item si circa conū æquicrurem pyramis aptetur, superficies pyramidis excepta base, maior est coni superficie, excepta similiter base eadem ra- tionis continuatione. Item ex demonstratione constat, si in cylindro recto figu- ra multis superficiebus planis & æquilateris constituta inscribatur, quod superfici es ex omnibus dictæ figuræ superficiebus excepta base collecta, minor necessario existit superficie cylindri excepta base. nam unaquæq; superficies dictæ figuræ pa- rallelis lateribus constans, minor est ea cylindri superficie quæ sibi incumbit. Item si circa cylindrum figura multis superficiebus planis & parallelis lateribus consti- tuta circumponatur, superficies dictæ figuræ ex omnibus suis superficiebus exce- pta base collecta, maior est superficie cylindri excepta similiter base.

CVIuslibet cylindri recti superficies, excepta base, illi circulo æqualis esse pro- 13
batur, cuius quidem circuli semidiameter inter latus cylindri & diametrum basis eius media secundum proportionem existat. Esto cuiuspiam cylindri recti basis circulus a diametro, cuius æqualis ponatur linea c d, lateri uero cylindri linea e f æquetur. linea uero g statuatur inter e f lineam, & c d lineam, media secundum proportionem. describatur etiā circulus b, cuius semidiameter sit æqualis lineæ g. his constitutis, demonstrandum est b circulum dicti cylindri superficiei esse æqua- lem, excepta cylindri base. Et si non sit ei æqualis, aut maior erit, aut minor necessa rio. Esto primū, si fieri potest, minor. tunc cum duas magnitudines inæquales ha- beamus, circulum b, & superficiem cylindri dictam, possumus intra circulum b u- nam figuram rectilineam multorū angulorum & æqualium laterum inscribere, & alteram illi similem eidem circulo circumscribere hoc pacto, ut circumscriptę ad inscriptam minor proportio habeatur, quàm superficiei cylindri dicti ad circulū. Intelligamus igitur ita circūscriptam & inscriptam dicto circulo esse, ut posuimus, dictam figuram, deinde circa circulum a circumscribatur rectilinea figura, similis

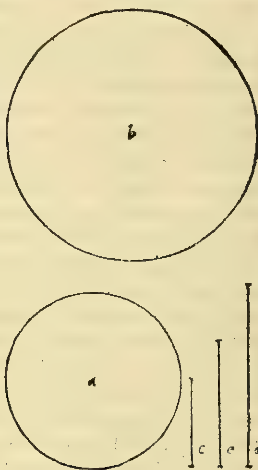
uidelicet illi quæ circa b circulum intelligitur circumſcripta, & ab angulis & punctis dictæ figuræ rectilineæ circulo a circumſcriptæ erigantur lineæ rectæ uerſus caput cylindri, quæ cõcludent figuram plurium laterum & æqualium circa ipſum cylindrum deſcriptam. Eſto etiam perimetro eius figuræ rectilineæ circa a circulum conſtitutæ, æqualis k d linea. iterũ ipſi k d ſit æqualis l f. ſit aũt dimidiũ ipſius c d linea c t, & fiat triangulus rectãgulus k d t, ita quòd angulus rectus ſit ad punctũ d. erit igit̃ triangulus k d t, æqualis figuræ rectilineæ, quam circa a circulum ſuprà deſcripſimus: quoniã dictus k d t triangulus baſem habet æqualem perimetro illius figuræ, & altitudinem æqualem lineæ ex centro a ad circumferentiam ductæ. Super e f conſtituatur figura lineis quatuor parallelis contenta, & rectis angulis. Huius figuræ ſuperficies probatur eſſe æqualis ſuperficiei figuræ rectilineæ circa cylindrum ſuprà deſcriptæ, quoniam continetur linea e f æquali lateri cylindri, & linea f l æquali baſi perimetræ dictæ figuræ circa cylindrum conſtitutæ. Ponatur item e r linea æqualis e f lineæ, & ducatur linea r l, erit confectus triangulus f r l æqualis ſuperficiei e l parallelogrãmæ: quare & idem triangulus ęqualis erit ſuperficiei figuræ circa cylindrum ſtantis. & quoniam rectilinea figura circa b circulum deſcripta, ſimilis eſt figuræ rectilineæ circa ipſum a circulũ deſcriptę, habebũt iſtæ duæ figuræ inter ſe proportionem illam, quam habent ſemidiametri dictorum circulorum a & b, ſecundum potentiam. igitur triangulus k d t, habebit eandem proportionem ad figuram rectilineam circa b circulum deſcriptam, quam habet t d linea ad lineam g ſecundum potentiam. nam t d, g lineæ æquantur lineis quæ ex centris ducuntur ad circumferentias. Sed quam proportionem habet linea t d ad lineam g poteſtate, hanc habet t d linea ad lineam r f longitudine. nam g linea inter t d & r f lineas, media eſt ſecundum proportionem. Propterea quòd etiam inter e d & e f lineas media eſt ſecundum proportionem. Quomodo autem hoc ſit, declaratur ſic. Quoniã enim d t linea æquatur t c lineæ, & r e linea e f lineæ eſt æqualis: linea igitur c d dupla eſt lineæ t d, & linea r f dupla r e. Ergo ſicut ſe habet linea d c ad lineam d t, ſic linea r f ad f e. Id igitur quod fit ex c d in e f, æquatur ei quod producitur ex t d in r f. Quod autem ex c d in e f producitur, æquale eſt ei quod fit ex g linea in ſe ducta, igitur quod fit ex t d in r f, æqua-

æquatur ei quod fit ex g in se. Est ergo sicut t d ad g, ita g ad r f. quare sicut t d se habet ad r f, sic quadratum t d ad quadratum g. Nam si tres lineæ ponãtur continuæ proportionales, sicut se habet prima ad tertiam, ita figura æquilatera super primã constituta, ad figuram constitutam super secundam, si fuerit similis dictæ figuræ, & similiter descriptæ. Quam proportionem habet t d ad r f longitudine, eandem habet k d t triangulus ad r l f triangulum, cum k d & l f sint æquales. Eandem igitur proportionem habet k t d triangulus ad rectilineam figuram circa b circulum suprà constitutam, quam habet t k d triangulus ad r f l triangulum. Triangulus ergo f l r æquatur rectilineæ figuræ circa b circulum descriptæ. quare & superficies figuræ rectilineæ circa cylindrum suprà descriptæ æqualis erit superficiei figuræ rectilineæ circa b circulum constitutæ. At uero quoniam rectilinea superficies circa b circulum constans minorem proportionem habet ad superficiem rectilineã sibi similem, intra b circulum inscriptam, quàm habeat superficies rectilinea circa cylindrum aptata ad circulum b: propter hoc minorẽ habebit proportionem superficies dicta circa cylindrum constans, ad superficiem rectilineam intra b circulum inscriptam, quàm superficies cylindri ad circulum b. & permutatim quoque: quod esse non potest omnino. nam superficies figuræ rectilineæ circa cylindrum constitutæ, demonstrata est esse maior superficie cylindri. rectilinea uero figura circulo b inscripta, ipso b circulo minor existit. Nõ est igit̃ b circulus minor superficie cylindri. Esto si potest esse, quod ponatur maior. Rursus intelligatur in b circulo figura rectilinea inscripta, & eidem altera circumscripta similis inscriptæ, ita ut circumscriptæ ad inscriptam minor sit proportio, quàm circuli b ad superficiem cylindri. et inscribat̃ in a circulo figura polygonia, similis ei quę b circulo fuit inscripta: & erigatur, ut suprà, figura rectilinea ex angulis figuræ circulo a nuper inscriptæ, & rursus k d linea sit æqualis perimetro figuræ rectilineæ in a circulo inscriptæ. Sit etiam l f linea æqualis eidem. Istis sic positis, cætera ut suprà teneantur, erit triangulus k t d maior figura rectilinea circulo a inscripta: quoniam basis ipsius trianguli æqualis est perimetro dictæ figuræ: altitudo uero maior ea linea quæ à centro a ducitur perpendiculariter ad unũ latus dictæ figuræ. At uero e l superficies quadrilatera æquatur superficiei quæ fit cõposita ex quadrilateris superficieb. omnib. figuræ rectilineæ cylindro suprà inscriptæ: quoniã dicta e l superficies cõtinetur à latere cylindri, & à linea quæ æqualis est posita perimetro figuræ dicto circulo a inscriptæ, quæ est basis figuræ rectilineæ quæ cylindro fuit inscripta. Quare etiam l r f triangulus, est æqualis superficiei dictæ figuræ cylindro inscriptæ. Et quoniam similes sunt rectilineæ figuræ in circulo a b inscriptæ, proportionem inter se eandẽ habebunt, quam habent suæ inter se diametri in potentia: trianguli quoq; k t d & f r l inter se habẽt proportionem, quam habẽt dictorũ circulorum semidiametri in potentia. Eandem igitur proportionem habebit rectilinea superficies circulo a inscripta, ad rectilineam circulo b inscriptam, quam habet triangulus k t d ad triãgulum l f r. Rectilinea uero superficies circulo a inscripta, minor est k d t triangulo. quare & eandem minorem esse oportet superficie figuræ rectilineæ cylindro inscriptæ: quod sanè esse non potest. quoniam minorem habet proportionem figura rectilinea circulo b circumscripta, ad figuram sibi similem eidem b inscriptam, quã circulus b ad superficiem cylindri: & permutatim. Maior autem est figura rectilinea circulo b circumscripta, quàm ipse b circulus. maior igitur est figura rectilinea circulo b inscripta, quàm sit cylindri superficies: quare et quàm sit superficies figuræ rectilineæ cylindro inscriptæ. non erit igitur maior circulus b superficie cylindri. Et demonstratum est quod minor esse nõ potest. igitur necesse est eidem esse æqualem.

CVIuslibet coni æquicruris superficies excepta base æqualis est circulo, cuius semidiameter media est secundum proportionem inter latus coni & semidia- 14

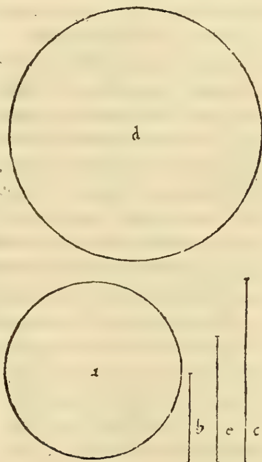
metrum

metrum circuli, qui quidem circulus dicti coni basis existat. Esto conus æquicruris, cuius basis sit circulus a, eius circuli semidiameter sit c: lateri uero coni esto d æqualis. media autem inter d & c, secundum proportionem esto e. ponatur deinde b circulus, cuius semidiameter sit æqualis e lineæ. Assero igitur, b circulum æquũ esse superficiei dicti coni, excepta base. Et si non concedatur æqualis ei, esto aut maior ea, aut minor dicetur. Primum igitur ponatur minor, si fieri potest. habebimus itaq; duas magnitudines inæquales, superficiem uidelicet coni, & circulum b. & coni superficies ponatur maior. Potest igitur intra circulũ b, figura una polygonia inscribi, & æquilatera: & altera eidem circumscribi similis inscriptæ, ita ut circumscriptæ ad inscriptam minor sit proportio, quàm superficiei coni ad b circulũ. Intelligatur itaq; sic factum esse. deinde circa circulum a, figura polygonia circũscribatur similis ei quæ b circulo intelligitur circumscripta: & ab ea quæ circulo a circumscripta est erigatur pyramis ad uerticem coni dicti, quæ eũdem uerticem cum cono habebit. Quoniam igitur figuræ polygoniæ circulis a & b circumscriptæ similes sunt effectæ, eandem inter se habebũt proportionem, quam habent semidiametri dictorum circulorum in potentia. Quam uero habet semidiameter c ad semidiametrum e, eandem habet c ad ipsum d in longitudine: & quam habet c ad d in longitudine, eandem habet figura polygonia circulo a circumscripta, ad superficiem pyramidis circa conum erectæ. nã c æqualis est perpendiculari, quæ à centro a circuli ducitur ad unum latus figuræ polygonię, linea uero d lateri coni est æqualis. Cõmunis uero est altitudo, linea æqualis perimetro dictæ polygoniæ figuræ. & superficies pyramidis, excepta base, æquatur dimidio superficiei quæ producitur ex d latere coni in lineam æquam perimetro dictæ figuræ polygoniæ. & superficies eiusdem figuræ polygoniæ æquatũ dimidio superficiei, quæ producitur ex c linea in eandem lineam dicto perimetro æqualem. Eandem igitur proportionem habebit rectilinea figura circulo a circũscripta, ad rectilineam figuram circulo b circumscriptam, quam habet eadem superficies ad superficiem pyramidis cono circumscriptæ. atque idcirco superficies pyramidis dictæ, æqualis erit figuræ rectilineæ circulo b circũscriptæ. At uero quoniam dicta figura circulo b circũscripta, ad eã sibi similem quæ ipsi b fuit inscripta minorem habet proportionẽ quàm superficies coni ad circulũ b, sequitur ut superficies pyramidis circa conum aptatæ, ad figuram rectilineam circulo b inscriptam minorem habeat proportionem, quàm superficies coni ad circulum b: quod quidem esse non potest. nam superficies pyramidis ostensa est maior esse superficie coni. Figura uero rectilinea circulo b inscripta, ipso b minor existit. non est igitur b circulus minor superficie coni. Dico præterea, quod neq; maior esse potest. Quod si potest, esto maior. & rursus intelligatur b circulo figura una pluriũ angulorum inscripta, & altera illi similis circumscripta, ita ut circumscriptæ ad inscriptam minor proportio habeatur, quàm b circuli ad superficiem coni. & ipsi circulo a intelligatur inscriptam esse figuram multorũ angulorum, similem illi quæ b circulo fuit inscripta, & ab hac figura erigatur pyramis intra conum inscripta, quæ eundem uerticem cum ipso cono habeat. Quoniam igitur figuræ polygoniæ ipsis a & b circulis inscriptæ positæ fuerunt similes, eandem inter se proportionem retinebunt, quam



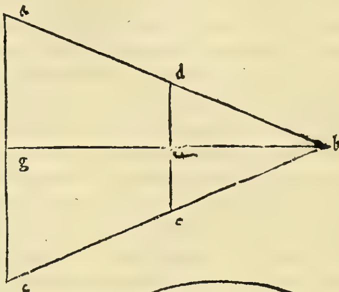
quam habeat dictorum circulorum semidiametri inter se potentia. Eandem igitur habet figura polygonia, ad figuram polygoniam proportionem, quam habet c ad lineam d, in longitudine. c autem ad ipsam d maiorem habet proportionē, quàm figura polygonia ipsi a circulo inscripta, ad superficiem pyramidis cono inscriptæ. nam semidiameter a circuli ad latus coni maiorē proportionem habet, quàm perpendicularis, quæ à centro ad unum ex lateribus figuræ polygoniæ ducitur, habeat ad perpendicularem ductam à uertice coni ad idem latus. Quare maiorem proportionem habet figura polygonia circulo a inscripta, ad poligoniam figuram b circulo inscriptam, quàm ipsa eadem figura polygonia habeat ad superficiem pyramidis. Maior igitur est pyramidis superficies, quàm figura polygonia circulo b inscripta. Figura autem polygonia circulo b circumscripta, minorem habet proportionem ad figuram eidem inscriptam, quàm b circulus ad superficiē coni. Multo igitur magis figura polygonia circulo b circumscripta, ad superficiem pyramidis cono inscriptæ minorē proportionem habebit, quàm ipse b circulus ad superficiem coni: quod esse non potest. nam figura polygonia b circulo circumscripta, maior est eo circulo: superficies uero pyramidis cono inscriptæ, minor est superficie coni. Ostensum itaque est, quod b circulus neque coni superficie maior, neque minor esse potest. relinquitur ergo, ut necessariò sit ei æqualis.

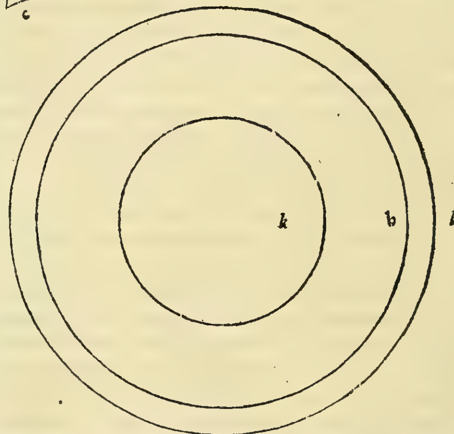
CVIuslibet coni æquicruris superficies ad basim suam, eandem habet proportionem, quàm latus ipsius coni habet ad lineam eductam à centro basis coni ad eiusdem circumferentiam. 15 Esto conus æquicruris, cuius basis sit circulus a, esto b linea æqualis semidiametro circuli a, & linea c sit æqualis lateri coni. Demonstrandū itaque est, quod superficies coni eandē habeat proportionem ad a circulum, quam c habet ad ipsam b. Sumatur enim media inter b & c, secundum proportionē, quæ sit e. & ponatur circulus d, cuius semidiameter sit æqualis e. circulus igitur d est æqualis superficiei coni. Per præmissam demonstratū etiam est, quod circulus d ad circulum a eandem habet proportionē, quam c ad b habet in longitudine. Vtraque enim proportio eadē est proportioni e ad b, in potentia: quoniam circuli ad circulū ea est proportio, quę est quadrati diametri ad quadratum diametri: & similiter se habent quadrata semidiametrorum. sicut enim diametri totæ, ita earum dimidia. Semidiametris uero sunt æquales lineæ b & e. Igitur manifestum est, superficiem coni eandem habere proportionem ad a circulum, quam habet c linea ad b lineam, in longitudine.



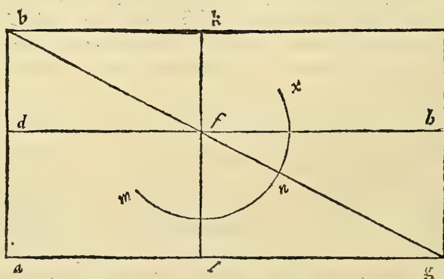
SI conus æquicruris secetur superficie plana, quæ quidem superficies basi ipsius coni sit æquedistans: ea coni superficies, quæ à secante & à base concluditur, ei circulo æqualis esse probatur, cuius circuli semidiameter sit media secundū proportionem inter latus superficiei conicæ, eius scilicet quæ inter basim & secantem continetur, et inter lineam æqualem duabus semidiametris simul iunctis duorum circulorum, eorum scilicet qui in base & secante notātur. 16 Esto conus cuius triangulus qui ab axe constituitur, sit æqualis triangulo a b c, qui a b c à linea quadam secetur, quæ linea sit basi eius æquedistans, & uocet d e. axis uero coni sit b g. & exponatur circulus aliquis, cuius semidiameter sit media secundum proportionem inter a d latus, & inter compositam ex d f, & a g: semidiametri uero huius

circulus sit h. Dico igit, quod circulus h equalis est ei superficiei coni quæ inter d e & a c compræhẽditur. Igitur statuantur duo circuli k, l, & semidiameter circuli k tantũ possit quantum continetur sub b d, d f. semidiameter uero circuli l tantum possit quãtum continetur sub b a, a g. Circulus igitur l æqualis superficiei a b c coni, circulus uero k æquatur superficiei a d e. Et quoniam id quod ex a b in a g fit, equatur his: ei quod fit ex b d in d f, & ei quod fit ex a d in utrãque d f & a g: quoniam æquedistantes sunt d f, & a g. At uero quod ex a b in a g producitur, æquatur quadrato semidiametri circuli l. et quod ex b d in d f nascitur, equatur quadrato semidiametri circuli k: quod ex d a in utranque simul d f, a g æquatur quadrato semidiametri h. quadratũ igitur semidiametri circuli l, æquat duob. quadratis ex semidiametro circuli k, & ex semidiametro circuli h productis simul iunctis. Verũ circulus l æquat superficiei coni a b c: circulus autem k æquatur superficiei coni d b e. relinquitur ergo, ut superficies compræhensa inter secantem d e, & basem a c, sit æqualis circulo h. nam circuli quicunque sic se habent ad inuicem comparati, sicut quadrata suarum diametrorum.





Esto figura rectilinea quadrilatera rectangula b a g, cuius diameter sit b g, diuidatur b a latus utcunque in puncto d, à quo ducatur æquedistans a g, quæ sit d h, secans diametrum b g in puncto f, à quo puncto ducat æquedistãs lateri b a quæ sit k l. Dico quod id quod fit ex b a in a g, æquatur ei quod fit ex b d in d f, & ex d a in utrãque simul d f, a g. quoniã igit id quod fit ex b a in a g totã, est b g superficies: quod aũt fit ex b d in d f, est b f: & quod ex d a, in utramque simul d f, a g, est gnomõ m n x. Quod enim ex d a in a g, æquatur k g, quia supplementũ k h æquatur supplemento d l. quod fit ex d a in d f, æquatur d l. Tota igitur superficies b g, quæ fit ex b a in a g, æquat ei quod



ei quod fit ex b d in d f, & gnomoni n m x, qui æquatur ei quod fit ex d a in utrãque simul a g, d f.

Coni qui altitudines habuerint æquales, suis basibus sunt proportionales. qui uero bases æquas habuerint, suis altitudinibus proportionales erunt.

Si cylindrus plana superficie secetur, quæ æquedistet basi suæ, erit totius ad quãcunq; partem suam, uel etiam partis ad partem, sicut axis ad axem proportio.

Coni in eisdem basibus cum cylindris constituti, eadem proportione qua cylindri referuntur.

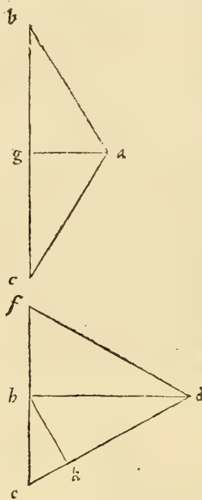
Altitudines conorum æqualiũ, mutuam suis basibus proportionẽ sequuntur.

Coni quorum altitudines mutuam suis basibus proportionem sequũtur, sunt inter se æquales.

Coni, quorum diametri basium eãdem cum suis axibus proportionem habuerint, seruant inter se proportionem, quæ inter diametros suarum basium habetur triplicatam. Hęc autem omnia à superioribus sunt demonstrata.

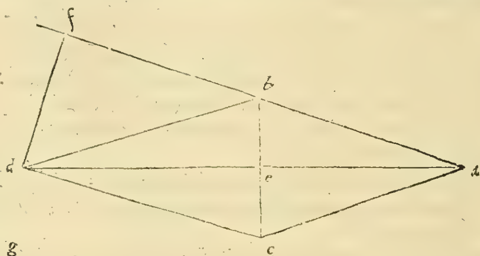
SI fuerint duo coni æquicrures, fueritq; alterius superficies basi alterius æqualis, fuerit item linea recta quæ à centro dictæ basis ducta sit ad latus coni perpẽdiculariter æqualis altitudini alterius coni, illos conos æquos esse necesse est. 17

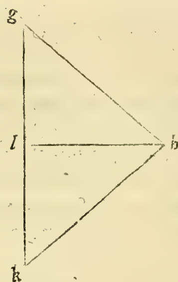
Esto duo coni æquicrures a b c, d e f. & ponatur basis ipsius a b c, æqualis superficiei d e f. altitudo uero a g esto æqualis lineæ quæ à centro basis ducta sit perpẽdiculariter ad unum latus coni d e f, quæ linea uocetur h k. centrum à quo ducitur sit h. latus uero ad quod ducta est, d k e. Dico igitur hos duos conos æquales esse. Quoniã igitur basis coni a b c, æquatur superficiei coni d e f, æqualia uero ad unum & idem relata eandem ad illud proportionem retinent: fiet ut sicut basis b a c, ad basim d e f: ita superficies d e f, ad basim d e f. At uero sicut superficies ad propriã basim, sic linea d h ad lineã h k. Demonstratũ namq; est hoc, quod cuiuslibet coni æquicruris superficies ad suam basim habet eandem proportionem, quam latus ipsius coni ad semidiametrũ basis, sicut uidelicet d e ad e h: sed sicut d e ad e h, ita d h ad h k. sunt enim trianguli æquiãguli. est autem h k æqualis a g. igitur sicut basis a b c coni ad basim d e f coni, ita altitudo d e f ad altitudinem a b c. Horum igitur conorum altitudines mutuam suis basibus habent proportionem. Ex quo sequitur, eos esse æquales.

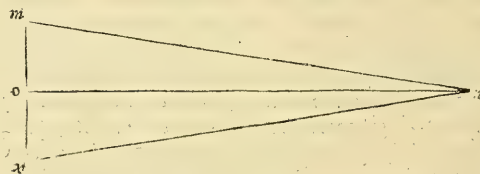


CVilibet rhõbo ex conis æquicruribus composito, æquatur conus ille qui basem æquam habeat superficiei alterius conorum, qui rhõbum comprendũt: altitudinem uero æqualem lineæ, quæ quidem linea ducta sit ab alterius coni uertice ad unumquoduis latus alterius perpendiculariter. Esto rhõbus ex æquicruribus conis collectus a b c d, cuius basis sit circulus circa diametrũ b c descriptus, altitudo uero a d. Exponatur etiam alter conus g h k, qui basim habeat superficiei a b c coni æqualem, altitudinem uero æquam lineæ quæ ab ipso d puncto ducta sit ad latus a b perpẽdiculariter, quæ sit d f. altitudo uero g h k coni, sit h l. & esto h l æqualis d f. Dico tunc quod etiam conus rhõbo æquatur. Exponatur & alter conus m n x, basim habens æqualem basi a b c coni, altitudinem uero ipsi a d: sitq; eius altitudo n o. Quoniam igitur n o ipsi a d æquatur, erit idcirco sicut n o ad ipsum d e, ita a d ad d e. At uero sicut a d ad d e, sic a b c d rhombus ad b c d conum. Sicut autem n o ad d e, ita m n x conus ad b c d conum: propterea quod eorum 18

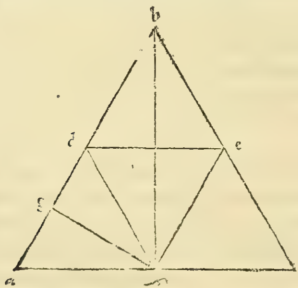
baſes ſunt æquales. Ergo ſicut m n x conus ad b c d conum, ſic a b c d rhombus ad b c d conum. Conus igit̃ m n x eſt æqualis rhombo a b c d. item quia ſuperficies a b c æquatur baſi g h k. ſicut ergo ſuperficies a b c ad propriã baſim, ſic baſis g h k ad baſim m n x. At uero ſicut ſuperficies a b c ad propriam baſim, ſic a b ad b e, quod idẽ eſt a d ad d f. nam trianguli ſunt ſimiles. quare ſicut baſis ipſius g h k ad baſim n m x, ſic a d ad d f. Eſt aũt a d æqualis n o per ſuppoſitum: d f uero æqualis h l. quare ſicut baſis g h k ad baſim m n x, ita n o altitudo ad h l. Conorum igitur g h k, & m n x baſes altitudinibus mutuam habent proportionem. Sunt igitur hi coni æquales. Oſtẽſum eſt autem, m n x eſſe rhombo a b c d æqualem. quare & g h k conum, dicto a b c d rhombo æqualem eſſe, neceſſario colligitur.

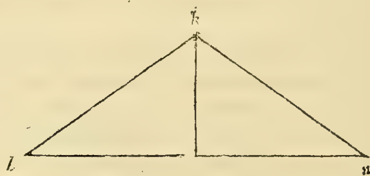


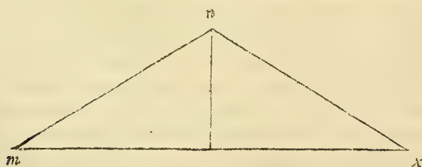


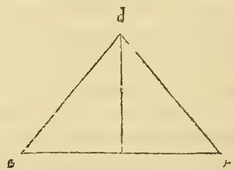


19 SI conus æquicruris ſuperficie plana ſecetur, quæ quidem ſuperficies baſi coni æquediſtet, & à circulo in ſectione producto conus deorſum deſcribat̃, uerti-





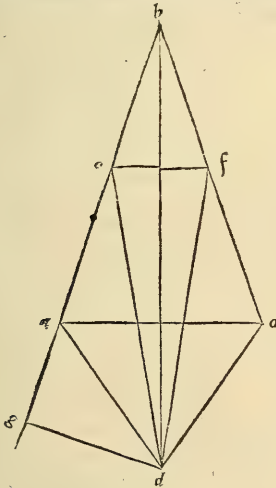


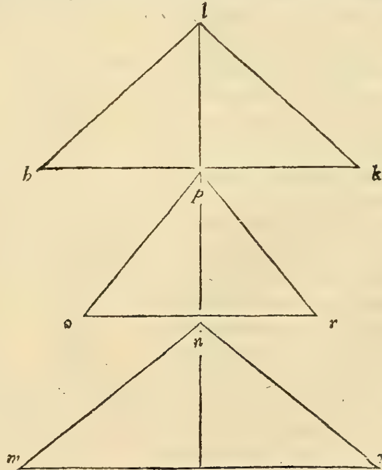


cem

cem deſigens in centrum baſis prioris coni, rhombũ cum coni parte ſuperiori efficiet, qui quidem rhõbus ſi à toto priore cono auferatur, ei quod relinquitur conus ille probatur æqualis: cuius quidem coni baſis ſit æqualis ei ſuperficiei coni qui ſectus ponitur, quæ ſuperficies intra ſecantem & baſem concluditur. altitudo præterea prædicti coni ſit æqualis lineæ à centro baſis primi coni ductæ perpendiculariter, ad unumquoduis latus primi coni. Eſto conus æquicruris a b c, qui ſecetur à plana ſuperficie quæ baſi ipſius æquediſtet. Eſto hæc ſectio d e, centrum uero baſis f. & à circulo, cuius diameter eſt d e, deſcribatur conus, cuius uertex ſit f. & ſic habemus rhombũ ex duobus conis æquicruribus conſtitutum, qui eſt b d f e. Exponatur etiam quidam conus k h l, cuius baſis eſto æqualis ſuperficiei, quæ inter a c, d e continetur: altitudo uerò æqualis lineæ quæ à centro f ducta ſit perpendiculariter ad latus a b, quæ ducta ſit f g. Dico itaq;, quod ſi à cono a b c intelligatur ablatus rhombus b d f e, ei quod relinquetur æqualis erit conus h k l. Exponãtur itẽ duo coni m n x, o p r, ita ut baſis ipſius m n x ſuperficiei coni a b c ſit æqualis, & altitudo æqualis f g. Propter hoc itaq; m n x conus eſt æqualis a b c cono. Nã ſi duo coni æquicrures ita ſtatuantur, ut ſuperficies alterius coni ſit æqualis baſi alterius: præterea linea à centro ducta perpendiculariter ad unum latus alterius, ſit æqualis altitudini alterius, conos illos æquos eſſe demonſtratum eſt. Propter id uero quod coni o p r baſis eſt poſita æqualis ſuperficiei d e b coni, & altitudo ipſi f g, conus o p r æquatur rhombo b d f e. hoc enim ſuprà demonſtratum fuit. Quoniã autem ſuperficies coni a b c componitur ex b d e, & ea quæ inter d e & a c continetur: præterea ſuperficies a b c coni: æquatur baſi m n x coni: ſuperficies uerò d b e coni æquatur baſi o p r coni, quæ uero media eſt inter d e & a c æquatur baſi h k l: ſequitur, ut baſis m n x ſit æqualis baſibus conorum h k l, o p r. Cum que ſint hi coni altitudine æqua erecti, erit conus m n x, æqualis conis ſimul h k l, o p r. Verũ conus m n x, æqualis eſt cono a b c: conus uero o p r, æqualis rhombo b d e f. Reliquum eſt igitur, ut h k l conus, æqualis ſit ei quod ſublato rhombo relinquitur.

SI ex his conis æquicruribus, quib. rhombus compoſitus ſit, alter plana ſuperfi 20
cie ſecetur, quæ ſit baſi æquediſtans: & à producto in ſectione circulo conus erigatur ad uerticẽ alterius coni: deinde à toto priore rhombo, rhõbus nuper factus



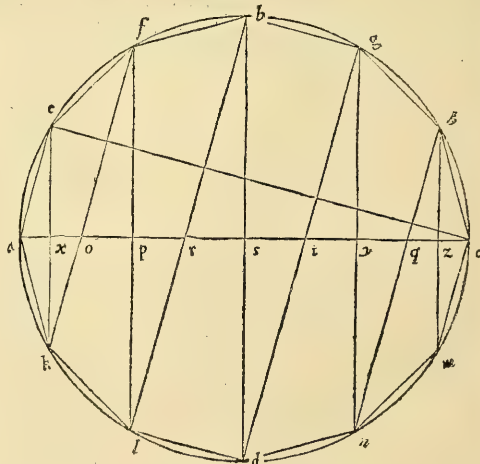


auferatur: ei quod reſiduum eſt æquatur conus, qui baſim habeat æqualem ei ſuperficiei coni, quæ inter ſecantem & baſem continetur: altitudinem uero æqualẽ

lineæ, quæ à uertice alterius coni, ad unum latus alterius coni perpendiculariter ducta sit. Esto rhombus, ex conis æquicruribus compositus a b c d, & alter illorum conorum secetur plana superficie, quæ basi æquedistans sit, & fiat sectio e f. à circulo uero cuius diameter est e f, erigatur conus habẽs uerticem d punctũ, iãq; factus est rhombus e b d f, qui intelligatur ablatus à toto rhombo. Exponatur autem quidem conus h k l, qui basim habeat æqualem superficiei coni, quæ à secante & base concluditur a c e f: altitudinem uero ei lineæ quæ à puncto d ducitur, perpendiculariter ad latus b a. Dico itaq;, quod h k l conus æqualis est dicto residuo. Expositi autem sint duo coni isti, uidelicet m n x, o p r. & basis m n x coni æqualis ponatur superficiei a b c: altitudo uero æqualis d g. Propter illa erga quæ demonstrata sunt, conus m n x æquatur rhombo a b c d. coni uero o p r basis, cũ ponatur æqualis superficiei e b f coni, & altitudo æqualis lineæ d g: similiter o p r conus æquatur rhombo e b d f. Quoniam igitur superficies a b c coni, similiter componatur ex superficie coni e b f, & ex ea quæ media est inter e f, a c. Insuper coni a b c superficies æquatur basi m n x, superficies uero e b f æquatur basi coni p o r. quæ autem media est inter e f, a c, æquatur basi h k l. Basis igitur m n x, æquatur basibus conorum o p r, h k l. & sunt hi coni sub eadem altitudine. quare m n x conus æquabitur h k l, o p r conis. Verũ conus m n x æquatur rhombo a b c d, conus aũt o p r rhombo e b d f est æqualis. reliquus igit̃ conus h k l equalis residuo erit necessario.

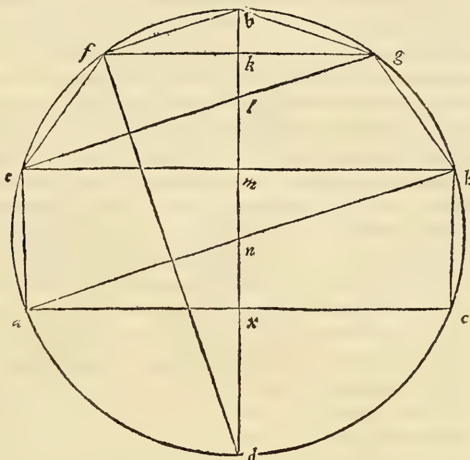
Propositio principalis

21 SI intra circulum quemcunq; inscribatur figura rectilinea, quæ multis angulis constet, quæq; latera inter se æqualia & numero paria habeat, insuper ducantur lineæ rectæ ab angulis ad angulos dictæ figuræ latera ipsius coniũgentes, sitq; ut hæ ductæ sint æquedistantes uni ex earum numero: illi scilicet, quæ duobus dictæ figuræ lateribus subtenditur: tunc istæ quæ latera dicta coniungunt, omnes ad diametrum circuli eandem habent proportionem, quam habet illa linea recta ad latus dictæ figuræ, quæ quidem linea ipsi diametro & lateri dictæ figuræ quod diametro sit applicatum subtenditur. Esto circulus a b c d, & sibi inscribatur figura rectilinea multis angulis constans, quæ sit a e f b g h c m n d l k: & iungantur e k, f l, b d, g n, h m, ductis lineis e k, f l, &c. manifestum est, quod æquedistantes sunt illi quæ duobus lateribus dictæ figuræ subtensa est, quæ est uel e k, uel h m. Dico itaque, quod hæ omnes ad circuli diametrum quæ est a c, eãdem proportionẽ habent, quam habet linea ducta à pũcto c ad punctũ e, uidelicet linea c e ad lineã a e. + ducantur itaque lineæ f k, l b, g d, h n. Igitur æquedistans erit f k ipsi e a, deinde b l ipsi f k, etiã d g ipsi b l, demum h n ipsi d g, & m c ipsi h n. quare sicut e x ad x a, ita k x ad x o. & sicut k x ad x o, ita f p ad p o. sicut autem f p ad p o, ita l p ad p r. Deinde sicut l p ad p r, sic b s ad s r. & sicut b s ad r s, ita d s ad s t. & sicut d s ad s t, ita g y ad y t. & sicut g y ad y t, ita n y ad y q. & sicut n y ad

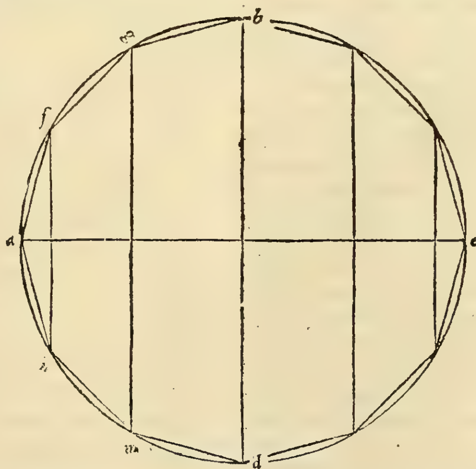


ny ad yq, ita hz ad zq. & ſicut hz ad zq, ita mz ad zc. & demum ſicut una ad unam, ita omnes ſimul collectæ ad omnes ſimul collectas ſe habent. quare ſicut ex ad xa, ita ek, fl, bd, gn, hm ad ipſam ac diametrum. At uero ſicut ex ad xa, ita ce ad ea. unde ſicut ce ad ea, ita omnes ek, fl, bd, gn, hm ad ac diametrum.

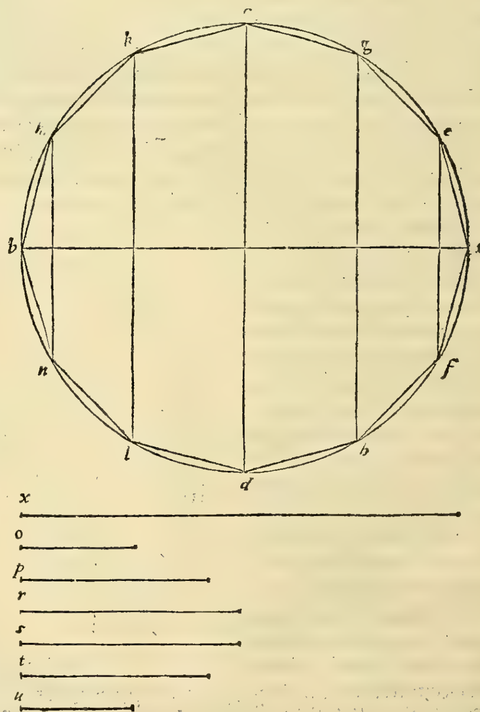
SI in circuli cuiuſpiam portione figura multorum angulorum inſcribatur, quæ quidem figura latera habeat excepta baſe inter ſe æqualia, & numero paria, deinde rectæ lineæ ducantur æquediſtantes baſi portionis, & quæ latera dictæ figuræ coniungant: tunc hæ omnes ~~ductæ~~ ductæ simul, cũ dimidio baſis portionis, habebũt ad altitudinem portionis eandem proportionẽ, quã habet linea illa ad latus figuræ dictæ, quæ linea ab una extremitate diametri totius circuli ad latus figuræ ipſi diametro applicatum ducta ſit. Intra circulum abc, quædã linea recta ducatur, quæ ſit ac. & ſuper baſe ac inſcribatur in abc circuli portione, multorum angulorum figura, æqualibus & numero paribus lateribus, excepta baſe, ac conſtãs. Dico igitur, quod ſicut fg, eh, ax ad bx, ita df ad bf. Ducantur rurſus ge, ah lineæ, quæ quidem æquediſtantes erũt ipſi bf. atq; idcirco ſicut kf ad kb, ita gk ad kl, & ita em ad lm, & mh ad mn, & xa ad xn, & omnes ſimul ad omnes, ut una ad unam. igitur ſicut fg, eh, ax ad bx, ita fk ad kb. At uero ſicut fk ad kb, ita df ad fb. ſicut ergo df ad fb, ita fg, eh, ax ad bx. 22



Eſto in quacunq; ſphæra maximus circulus abcd, & in ipſo inſcribatur figura rectilinea multorum angulorum & æqualium laterum: multitudo uero laterum eius à quaternario menſuretur, & ſint diametri circuli ac, bd. eſto item manente & quietante diametro ac, circa eam uoluatur circulus in quo figura dicta fuit inſcripta, ſcilicet abcd: manifeſtum eſt, quod eius circumferentia ſecus ſphæræ ſuperficiem feretur. anguli uero inſcriptæ circulo figuræ, circulari circumferentia mouebũtur in ſuperficie ſphæræ: exceptis tamen illis, qui ad puncta a et c inſiſtũt. quotq; ipſi



ipsi fuerint qui moti sunt, totidem circulos intra sphæram describent qui erunt supra a b c d circulum erecti, & eorum diametri erunt lineæ illæ quæ figuræ inscriptæ latera coniungebant: eruntque omnes ipsi b d æquedistantes. latera uero figuræ inscriptæ eodem modo circumuoluta, quasdam conicas superficies intra sphæram describunt: sed a f & a n conum perficient, cuius basis erit circulus ille qui habet lineam f n diametrum, uerticem uero punctum a. Lineæ autem f g, m n secundum quandam superficiem conicam ferentur, cuius basis circulus est, qui habet diametrum lineam m g, uertex uero ad punctum illud, ad quod f g & m n lineæ concurrent, inter se si educantur, & cum linea a c: lineæ uero b g, m d secundum conicam superficiem & ipsæ feretur, quæ habet basim, circulum cuius diameter b d, qui circulus super a b c d circulum est erectus. coni autem uertex ad punctum illud ad quod concurrent b g, d m inter se, & cum linea a c si educantur. Similiter quoque accidit & in alia semicirculi parte: latera figuræ inscriptæ secundum conicas superficies ferentur, quæ conuerso modo supra descriptis, in sphæra figuras descriptas habebunt. His ita dispositis, habemus intra sphæram figuram corpoream descriptam, conicis superficiebus contentam, cuius superficies minor sphęræ superficie esse probatur. nam si diuisam sphæram intelligamus à circulo b d plano, qui est erectus super a b c d, superficies unius hemisphærij, & superficies figuræ dictæ in ipso hemisphęrio inscriptę, eosdem terminos habent in eodem plano. nam utrarumque superficierum terminus est circuli circumferẽtia, cuius diameter est b d, qui est erectus super a b c d circulum, & utręque sunt in eãdem partem eductæ & conuolutæ, & altera earum alterã cõplectitur superficiẽ: hoc est sphæræ superficies superficiem figuræ eisdem terminis cum ea contentam. Similiter etiam in alio hemisphærio figuræ superficies, concluditur minor esse superficie hemisphærij: quare totam superficiem figuræ dictæ in sphæra descriptæ, minorem esse sphæræ superficie probatum est.



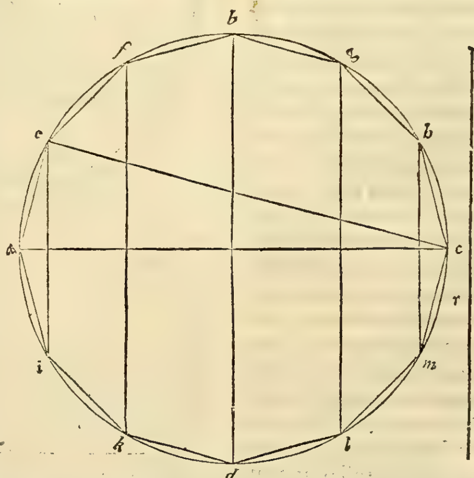
23 Figuræ in sphæra inscriptę superficies, æqualis est circulo, cuius semidiameter tantum possit, quantum est id quod continetur sub uno latere dictæ figuræ, & sub linea quæ sit æqualis omnibus illis lineis simul iũctis, quæ lineæ ab angulis ad angulos dictæ figuræ ita sunt ductę, ut quęque duæ cum lateribus, quæ per ipsas iungũtur, quadrangularem figurã efficiãt: & ei quæ duob.

late-

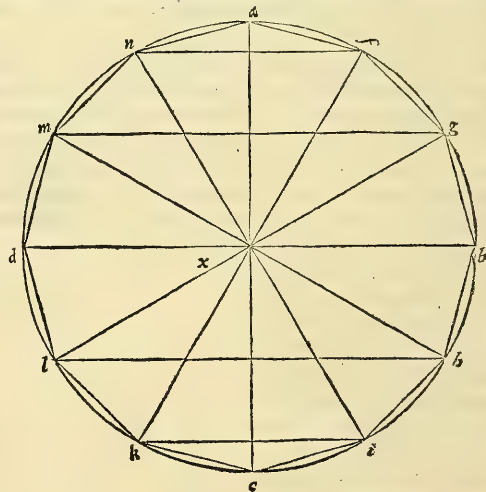
lateribus subtenditur, sint æquedistantes. Esto in sphæra maximus circulus a b c d, & in ipso inscribatur figura multorum angulorum, & æqualium laterum, cuius multitudo laterũ numeretur à quaternario, & ab hac figura intelligatur figuram corpoream esse in sphera descriptã: & ducãtur e f, g h, c d, k l, m n lineæ, quæ sint æquedistãtes illi quæ duobus lateribus dictæ figuræ subtensa est. Exponatur item quidam circulus qui sit x, cuius semidiametros tantũ possit, quantũ est quod continetur sub a e latere dictæ figuræ, & sub linea quæ sit æqualis e f, g h, c d, k l, m n, lineis simul iunctis. Dico igitur, quod hic circulus x, æquatur superficie figuræ in sphæra descriptæ. Exponantur item circuli o p r s t u, & ipsius o semidiametros possit tantum quantum continetur sub e a, & dimidio e f. & diameter p possit id quod continetur sub e a, & dimidijs e f, g h. semidiametros uero ipsius r possit id quod continetur sub e a, & dimidijs g h, c d. semidiametros ipsius s possit id quod sub e a, & dimidijs c d, k l continetur. semidiametros ipsius t, possit id quod continetur sub a e, & dimidijs k l, m n. semidiametros demum u, possit id quod continetur sub a e, & dimidia m n. Ex his igitur quæ posita sunt, circulus o æquatur superficiei a e f coni. circulus p æquatur superficiei conicæ quæ inter e f & g h lineas comprenditur. circulus r æquatur superficiei conicæ à lineis g h, c d comprensæ. circulus s æquatur superficiei conicæ à lineis c d, k l contentæ. præterea circulus t superficiei conicæ, inter k l, m n conclusæ. demum circulus u superficiei coni m b n, est æqualis. Hi igitur circuli omnes ęquales sunt superficiei figuræ, quæ sphæræ inscripta fuit. Et palàm est quòd semidiametri circulorum o p r s t u possunt id quod continetur sub a e latere, & sub linea dupla cõpositæ ex dimidijs e f, g h, c d, k l, m n, quæ est æqualis lineæ compositæ ex ipsis integris. quare semidiametri circulorum o p r s t u possunt id quod cõtinetur sub a e, & omnibus e f, g h, c d, k l, m n simul iunctis. Verum & semidiametros circuli x potest idem quod continetur sub a e, & sub linea composita ex omnibus illis e f, g h, c d, k l, m n. quare semidiametros circuli x tantum sola potest, quantum semidiametrorum simul o p r s t u circulorum quadrata componunt. Igitur circulus x, æquatur omnibus simul circulis o p r s t u. ipsos aũt circulos ostensum est æquales esse superficiei dictæ figurę. ex quo sequitur, ipsum x circulum superficiei dictæ figuræ esse æqualem, ut propositum fuerat.

24

Figuræ in sphæra inscriptæ superficies, ex superficiebus conicis constituta, minor est quàm quadrupla, ad circulum maximũ omniũ qui in sphæra esse possunt circulorũ. Esto maximus in sphæra circulus a b c d, & in ipso inscribatur figura pariũ angulorum & æqualium laterũ, et eius latera mensurentur à quaternario, & ex huius circumuolutione intelligatur superficies ex conicis superficiebus constituta, in sphęra esse descripta. Dico igitur, quod istius figuræ superficies minor est quàm quadrupla ad circulum maximum omnium qui in sphæra esse possunt circulorum.

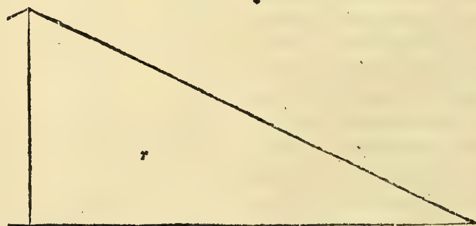


culorum. Ducantur itaq; duæ lineæ, quæ ſubtendantur ſingulæ duobus lateribus figuræ prædictæ, quorum hæc duo quib. una ſubtenditur, ſint oppoſita reliquis duobus quibus altera ſubtenſa eſt. ſintq; hæ ductæ e t, h m: & reliquæ iſtis æquediſtãtes f k, d b, g l. Exponatur item circulus r, cuius ſemidiametros poſſit id quod ſub a e, & ſub linea æquali compoſitæ ex omnibus illis e t, f k, b d, g l, h m. Ex his igitur quæ ſuperius demonſtrata ſunt, circulus r æquatur ſuperficiei dictæ figuræ. & quoniam inſuper demonſtratum eſt, quod ſicut linea æqualis omnibus ſimul illis e t, f k, b d, g l, h m ſe habet ad diametrum circuli a c, ſic linea c e ad lineam e a. Quod igitur ſub illa quæ æquatur omnibus ſimul dictis, & ſub ea cõtinetur, quod idẽ eſt ei quod à ſemidiametro circuli r, in ſe ducto producitur, æquale eſt ei quod ſub a c & c e comprenditur. uerũ id quod ſub a c & c e cõprenditur, minus eſt quadrato a c. quadratum igitur ſemidiametri r circuli minus eſt quadrato lineæ a c, ſequitur ergo, diametrũ r circuli minorem eſſe quàm duplam diametri a b c d circuli. Duæ igitur diametri a b c d circuli, diametro r circuli ſunt maiores. & quod fit, à diametro circuli a b c d, hoc eſt a c linea quater in ſe ducta, maius eſt quadrato diametri circuli r. At uero ſicut eius quod fit ab a c linea, quater in ſe ducta, ad quadratum diametri circuli r, ita quatuor circuli æquales a b c d ad circulum r. quatuor itaq; circuli ęquales a b c d circulo, ſunt maiores circulo r. Igitur circulus r minor eſt quadruplo a b c d circulo in ſphæra maximo. Circulus autem r demonſtratus eſt æqualis ſuperficiei dictæ figuræ. quare colligitur, ſuperficiem dictæ figuræ minorem eſſe, quàm quadruplam maximi circuli in ſphæra deſcripti.



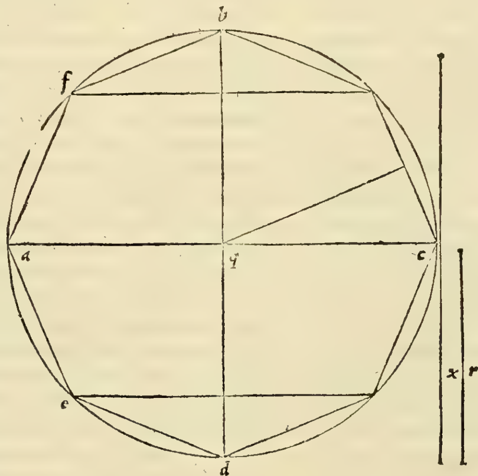
25 Figuræ in ſphęra deſcriptæ, quæ conicis ſuperficiebus contineatur, ille conus æqualis eſſe probatur, cuius coni baſis ſit circulus, qui æquatur ſuperficiei figuræ in ſphæra deſcriptæ: altitudo uero eius æqualis ſit lineæ illi, quæ à centro ſphęræ ad unumquoduis latus figurę multorum angulorum ſit perpendiculariter educta.

Eſto ſphæra, in qua ſit maximus circulus a b c d, & reliqua ſumãt̃ ſimiliter uti in ſuperiori demonſtratione figurata ſunt. & ponatur conus r rectus, qui baſim habeat æqualem ſuperficiei figuræ in ſphæra deſcriptæ: altitudinem uero æqualem ei lineæ, quæ à centro ſphæræ ad latus unum figuræ multorum angulorum ſit perpendiculariter educta. Eſt igitur demõſtrandum, quod conus r æqualis eſt figuræ in ſphæra deſcriptæ, nam deſcribantur coni à circulis, quorum diametri ſunt f n, g m, h l,



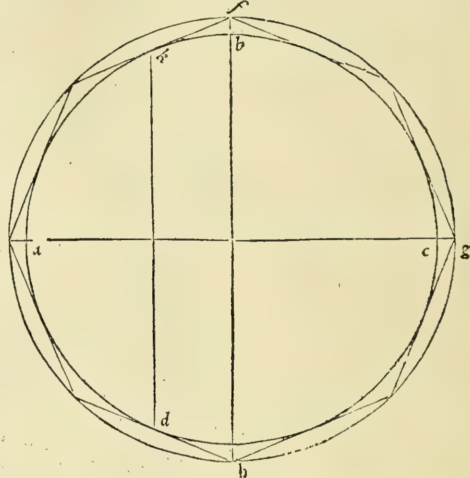
h l, i k, quorum conorum bases sint dicti circulie, uertices uero ad x centrum sphæræ deducti. Habemus rhombum solidū, qui conficitur ex cono, cuius basis est circulus, qui circa f n diametrum constat, uertex uero punctum a: & ex cono, cuius basis est idem circulus, uertex uero punctum x. qui quidem rhombus est æqualis cono qui basim habeat superficiem coni n a f, altitudinem uero æqualem lineæ à centro x perpendiculariter ad unum latus ductæ. Rursus residuum à rhombo dicto relictū, quod continetur à superficie coni, illa scilicet quæ inter æquedistātes planas superficies f n, g m cōprehēditur, & inter superficies conorū f n x, & g m x æquale est cono habenti basem æqualem superficiei conicæ, illi uidelicet quæ inter planas superficies f n, g m continetur. altitudo uero, lineæ ab x centro ad f g latus perpendiculariter eductæ. Hæc autem suprà sunt demonstrata. item residuum coni illius qui continetur à conica superficie, quæ includitur à planis æquedistantibus g m, b d, & à superficie coni m g x, & circulo cuius diameter b d ęqualis est cono basim habenti æqualem ei coni superficiei, quæ inter g m, b d planas continetur: altitudinem uero æqualem lineæ à centro x ad latus b g perpendiculariter ductæ. Similiter quoque in alio hemisphærio rhombus x k c l, & residua conorū æqualia esse probabuntur talibus & tantis conis, ut suprà dictum est. Manifestum itaq; est, quod tota simul figura sphæræ inscripta æqualis erit omnib. simul conis dictis. coni uero ipsi æquales sunt ipsi r cono, cum conus r altitudinem quidem habeat unicuiq; illorum æqualem, & basim omnibus simul illorū basibus æqualem. Constat igitur, inscriptam sphæræ figuram exposito cono esse æqualē.

Figura sphæræ inscripta, quæ conicis superficieb. contineatur, minor est quàm quadrupla eius coni qui basim habeat æqualem circulo, qui in sphæra sit maximus, altitudinē uero æqualem semidiametro sphæræ. Esto descriptus sit conus 26
æqualis figuræ inscriptæ sphęræ, qui conus basim habeat æqualem superficiei dictæ figuræ inscriptæ sphęræ, altitudinem æqualem lineæ à centro circuli ad unum latus figuræ multorum angulorū, quæ circulo sit inscripta, perpendiculariter ductæ. sit que hic conus r. sit alter conus x, qui basim habeat æqualem circulo a b c d, altitudinem uero semidiametro a b c d circuli. Quoniam igitur conus r, basim habet æqualem superficiei figuræ inscriptæ in sphæra, altitudinem autem æqualem lineæ à centro, ad latus a f, perpendiculariter ductæ. ostensum est autem, superficiem figuræ inscriptæ minorem



esse quàm quadruplam circuli in sphæra maximi. est igitur coni ipsius r basis minor, quàm quadrupla basis x coni. Est etiā coni r altitudo minor altitudine x coni. Cū igitur conus r minorē habeat basim quàm quadruplam ad basim x, altitudinē etiā minorem illius altitudine, manifestum est quod ipse r conus minor est quàm quadruplus ad conum x. Verum conus r æqualis est figuræ inscriptæ, figura igitᵗ inscripta minor est quàm quadrupla ad conū x, quod principio propositū fuerat.

27 ESto in sphæra maximus circulus a b c d, circa quem describatur figura multorum angulorum & æqualium, quæ latera quoq; habeat æqualia, quorũ multitudo à quaternario mensuret. Huic aũt figuræ circumscribatur circulus, cõprendẽs eam, circa idem centrum con uolutus circa quod a b c d existit. Deinde quiescẽte e g diametro, circũuoluatur plana superficies e f g h, in qua multorum angulorum figura & circulus a b c d continetur. Perspicuũ est, quod circumferentia circuli a b c d, secundum sphæræ superficiẽ feretur. circumferentia uero circuli e f g h, secundum alterius sphæræ superficiem ducetur, quæ idem centrum cũ minori sphæra habebit. puncta uero in quibus latera figuræ inscriptæ contingunt



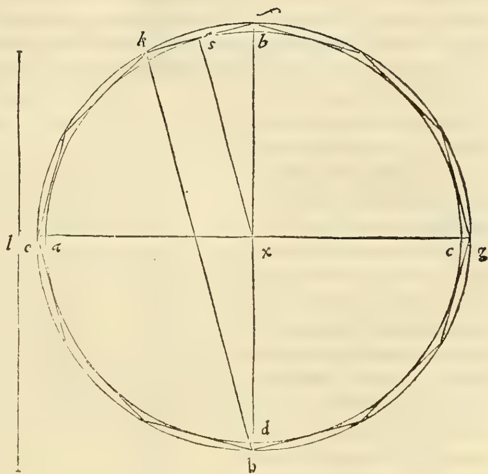
circulum a b c d, in circumuolutione, describent circulos qui sunt erecti supra circulum a b c d in sphæra minori. anguli uero dictæ figuræ secundum circuli circũferentias ferentur, illis duobus exceptis, qui sunt alter ad e, alter ad g puncta collocati: describentq; in superficie sphæræ maioris singuli singulos circulos, qui sunt erecti super circulum e f g h. Latera uero dictæ figuræ conicas superficies circumuoluta designabunt, quemadmodum in superiori proxima figuratione conspectum est. atq; ipsa figura conicis superficiebus compræhensa minori quidem sphæræ erit circumscripta, maiori uero inscripta. Quod aũt ipsius figuræ superficies maior sit superficie sphæræ cui est circũscripta, hac ratione demonstrabitur. Esto k d diametrus cuiuspiã circuli in sphera minori: puncta k d sint, in quibus duo latera dictæ figuræ contingant circulum a b c d. si igitur sphæra intelligatur secta à plano k d, circulo super a b c d erecto, superficies quoq; figurę sibi circumscriptæ simul secta esse intelligetur ab eodem plano. Vnde manifestum erit, utrasq; superficies sectas eisdẽ terminis in illo plano compræhensas esse. nam utrarũq; terminus est circuli circumferentia, cuius diametrus est k d, erecti super circulum a b c d: & ambæ sunt in eandem partem conglobatæ, & altera earum ab altera complectitur: sphærica scilicet à planę figuræ superficie, quæ illi finitima est. Minor igitur illa est, quæ compræhensa est, scilicet sphęrica illius sectionis superficies, quàm superficies figuræ circũscriptæ sibi. Similiter probabitur, residui superficiem sphæricam minorem esse superficie residui figuræ sibi circũscriptę. Manifestũ igitur est quod tota quoq; simul sphęræ superficies minor est superficie figurę sibi circumscriptæ.

28 SVperficiei figuræ circa sphęram descriptę circulus ille æqualis est, cuius quidem circuli semidiametrus tantum potest quantũ quod continetur sub uno latere figuræ circumscriptę, & sub linea quæ sit æqualis omnibus simul lineis, quæ latera dictę figuræ ita continuent, ut omnes sint uni earum æquedistantes, quæ una duobus dictę figurę lateribus sit subtensa. Figura enim quæ circũscribitur sphęræ minori, inscribitur sphæræ maiori. eius uero figuræ quæ sphæræ inscribitur, quæ ue superficiebus conicis cõtineatur, superficies æquatur circulo, cuius semidiametros tantũ potest quantum est quod continetur sub uno latere dictæ figu-

ræ,

ræ, & sub linea quæ sit æqualis omnibus simul lineis, quæ dictæ figuræ angulos ita coniungant, ut sint æquedistantes uni earum, quæ duobus dictæ figuræ lateribus subtenditur. Quare manifestum est, id quod propositum fuerat.

Figuræ circa sphæram descriptæ superficies maior est, quàm quadrupla ad maximum circulum in sphæra collocatũ. Esto itaq; & sphæra, & circulus, & cætera sumantur eadem & eodem modo, ut suprà in proximis fuit positum: et ponatur l circulus æqualis superficiei figurę propositæ, quæ circa sphęrã minorem sit circũscripta. Quoniam igitur in circulo e f g h, figura multorũ angulorum & parium angulorum inscripta fuit, & lineæ, quæ latera dictæ figurę iungebant æquedistantes lineę h f, ad ipsam eãdem h f proportionem habẽt, quam h k ad k f habet. figura igitur comprehensa sub uno latere dictę figuræ, et sub omnib. simul lineis angulos dictę figuræ continuãtibus, æqualis est illi quę continetur sub f h k. quare semidiametros circuli l tãtum potest, quantum quod continetur sub f h k. maior igitur est semidiametros circuli l, quàm h k. At uero h k ęqualis est diametro a b c d circuli. nam dupla est lineæ f x, quæ semidiametros est circuli a b c d. Manifestum est, quod maior est quàm quadruplus circulus l, qui idem est quod superficies dictę figuræ ad superficiem maximi circuli in sphęra collocati. 29

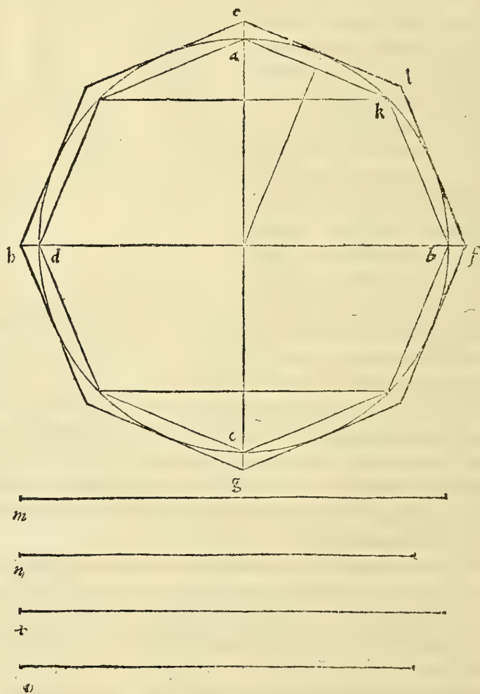


Figuræ circa sphęram minorem circumscriptæ conus ille ęqualis esse probatur, qui conus basim habeat circulum qui æqualis sit superficiei dictæ figurę, altitudinem uero habeat æqualem semidiametro sphęrę. Figura enim quę minori sphęrę circumscribitur, est inscripta maiori sphęræ. Figuræ autem inscriptæ quæ conicis superficiebus cõtineatur, conus ille ostensus est ęqualis esse, qui basim habeat circulum ęqualem superficiei dictę figurę: altitudinem uero, lineam lineę illi ęqualem, quę quidem linea à centro sphęræ ad unum latus dictæ figuræ sit perpendiculariter educta. Hęc eadem uero æqualis est semidiametro minoris sphęrę. quare constat id quod propositum fuerat. Ex his igitur quæ sunt demonstrata, manifestum est quod figura circumscripta minori sphęræ maior est, quàm quadrupla coni qui habet basim maximum in sphæra circulum, & altitudinem semidiametro sphæræ æqualem. Quoniam igitur dictæ figuræ ille conus æqualis est qui habet basem æqualem superficiei dictæ figuræ, altitudinẽ uero æqualem lineæ quæ à cẽtro sphęræ sit ad unũ latus dictæ figuræ perpendiculariter educta, hoc est semidiametro minoris sphæræ. Superficies autem circumscriptæ figuræ circa sphærã maior est, quàm quadrupla maximi in sphæra circuli. Figura igitur dictæ sphęræ circumscripta, maior est quàm quadrupla coni, qui basim habeat maximum in sphera circulum, altitudinem uero semidiametrum sphęrę: quoniam conus qui dictę figuræ est ęqualis, maior est, quàm quadruplus ad dictum conum. nam & ba-

d 3 sim

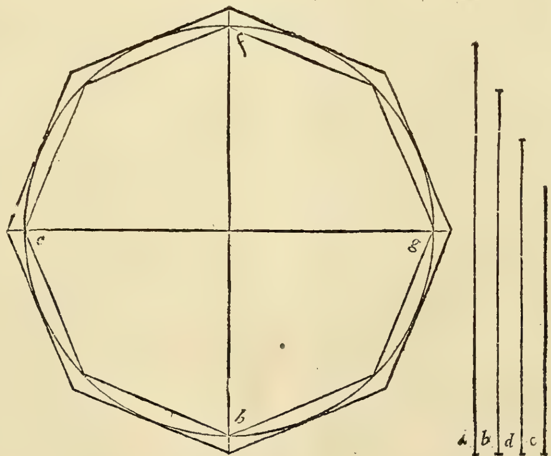
sim maiorem, quàm quadruplam ad illius basem habet, & altitudinem seruat æqualem.

30 SI figura una sphæræ sit inscripta, & eidem altera circumscripta, quæ quidem figuræ ambæ sint, ut suprà dictum est, à duabus planis figuris circum & intra circulum in sphæra maximum descriptis, per circumuolutionem productæ: superficies figuræ circumscriptæ ad superficiem inscriptæ habet proportionem duplicatam, eam scilicet quæ est lateris figuræ planę circulo, ut dictum est, circumscriptæ, ad latus figuræ inscriptæ in eodem circulo. ipsa uero figura corporea circumscripta ad figuram inscriptam sphæræ, ut dictum est, habebit eandem proportionem triplicatam. Esto in sphæra circulus maximus a b c d, & inscribatur ipsi circulo figura multorum angulorum & laterum æqualium, quorum multitudo mensuretur à quaternario. Deinde eidem circulo altera figura circumscribatur similis inscriptæ, ita ut latera circumscriptæ cōtingant in puncto medio arcus circuli abscisos à lateribus figurę inscriptæ. Sint etiam e g, f h duæ diametri ad angulos rectos secātes sese circuli comprehendētis figuram circumscriptā, sintꝙ omnino similiter & ad easdem partes ductę ad quas sunt diametri a b c d. Deinde intelligātur lineæ rectæ ductæ ad oppositos figuræ angulos, quæ iungant latera eius quæ quidem erunt & inter se æque distantes, & ipsis h f, b d. quiescente itaꝙ e g diametro, & circa eam lateribus figurarum circumuolutis, & circulis ipsis, sphæræ simul duæ & duæ figuræ multorum angulorum corporeæ efficientur, quarum figurarum altera sphęrę circumscripta erit, altera eidem inscripta. Demonstrandum itaꝙ est primũ, quòd superficies circumscriptę ad superficiem inscriptæ habeat eā proportionē duplicatā, quam habet latus e l ad latus a k. Secūdò, quòd ipsa figura circūscripta ad figuram inscriptā habeat eandem proportionem triplicatam. Esto itaꝙ circulus m æqualis superficiei figuræ circa sphæram descriptæ, circulus uero n æqualis superficiei figurę inscriptæ. Semidiametros itaꝙ circuli m, potest tantũ, quantum est quod continetur sub e l, & sub linea quæ sit æqualis omnibus simul lineis, quæ angulos figuræ circumscriptæ coniungunt. Semidiametros uero circuli n potest id quod sub a k, & sub linea æquali omnibus simul lineis, quæ iungunt angulos inscriptæ. At uero quoniam dictæ figuræ sunt similes positæ, spacia quoque



que à dictis lineis, hoc est angulis & lateribus dictarum figurarum comprehensa, similia esse necesse est. quare eandem inter se proportionem retinebunt, quam habent semidiametri circulorum m & n inter se potentia. Quare sequitur, diametros circulorum m & n eandem habere inter se proportionem, quam habent latera figurarum. Circuli uero habent inter se eam proportionem duplicatam, quam habent suæ diametri inuicem, qui circuli æquantur superficiebus duarum figurarum, inscriptæ scilicet & circumscriptæ. Constat igitur, superficiem figuræ circa sphæram descriptæ, ad superficiẽ figuræ eidem sphæræ inscriptæ, habere eam proportionem duplicatam, quam habet e l ad a k. Sumantur preterea duo coni o & x. Esto x conus, cuius basis sit circulus x, qui sit æqualis m. alter uero conus basim habeat o circulum, qui sit æqualis n. altitudinẽ uero ipsius x ponamus æqualem semidiametro sphæræ. at uero conus o altitudinẽ habeat lineam, quæ à centro sphæræ ad latus a k perpendiculariter ducta sit. Conus igitur x erit æqualis figuræ circumscriptæ sphæræ, conus uero o æquabitur inscriptæ. nã hæc iam demonstrata sunt. at uero quoniam figurę dictæ sunt similes, eandem proportionem habet e l ad a k, quam habet semidiametros sphęræ ad eam quæ à centro perpendiculariter ducta est ad a k. Eandem igitur proportionem habet altitudo coni x ad altitudinem coni o, quam e l habet ad a k. Diametrus autem circuli m, ad diametrum circuli n, eam habet quam e l ad a k. diametri ergo basium coni x, & coni o, suis altitudinib. sunt proportionales. igitur hi coni sunt similes inter se. & propter hoc conus x ad conũ o habet eam proportionem triplicatam, quam diametrus circuli m ad dimetrum circuli n. Manifestum igitur est, quod figura circumscripta habet ad figuram inscriptam, proportionem illam triplicatam, quam habet e l ad a k: quod erat demonstrandum.

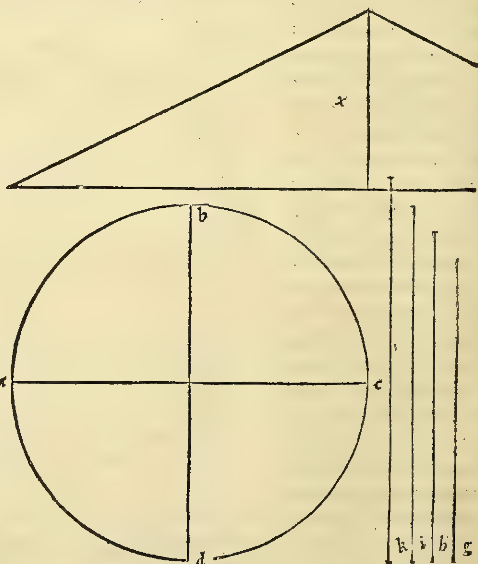
CVIuslibet sphæræ superficies quadrupla est circuli, qui in ea maximus habetur. Esto sphæra quęcunque: esto deinde superficies quędã quadrupla ad maximũ in sphæra circulũ, quę sit circulus a. Dico igitur quod a est æqualis superficiei sphæræ. Nam si non, uel maior erit, uel minor. Ponatur primò quod sit maior sphęræ superficies circulo a. Habemus iã duas magnitudines inæquales, scilicet superficiem sphęræ, & circulũ a. possumus ergo sumere duas lineas rectas inæquales, ita ut maior ad minorem habeat minorem proportionem, quam superficies sphæræ ad circulum a. sint itaque sumptæ b c: quarum media proportionalis sit d. Intelligatur etiam sphæra secta à plana superficie transeunte per eius centrum, sitque illa secans circulus e f g h. intelligatur præterea illi circulo una figura circumscripta, altera inscripta multorum angulorum, ita ut circumscripta sit inscriptæ 31



ptæ

ptæ ſimilis: & circumſcriptæ latus minorem habeat proportionem ad latus inſcriptæ, quàm b habet ad ipſam d, & ſic illa proportio duplicata minor erit hac ſimiliter proportione duplicata. Proportio autem b ad c eſt duplicata, ea quam habet b ad ipſam d: proportio autem lateris figuræ circumſcriptæ, ad latus figuræ inſcriptæ, duplicata eſt tanta, quanta eſt ſuperficiei circumſcriptæ figuræ ſolidæ, ad ſuperficiem inſcriptæ. Superficies igitur figuræ ſolidæ circumſcriptæ ſphærę, ad ſuperficiem figuræ inſcriptæ, minorem proportionem habet quàm ſuperficies ſphæræ ad a circulum. quod quidem eſt inconueniens, & abſurdum. Nam ſuperficies figuræ circumſcriptæ, ſuperficie ſphæræ maior exiſtit. ſuperficies uero inſcriptæ a circulo minor eſt. Oſtenſum eſt enim, ſuperficiem figuræ inſcriptę minorem eſſe quàm quadruplam circuli in ſphæra maximi. Circulus autem a quadruplus eſt poſitus circuli in ſphæra maximi. Igitur ſphæræ ſuperficies non poteſt maior eſſe ſuperficie circuli a. Dico item quod neq; minor eſſe poteſt. nam ſi poteſt, eſto: & inueniantur ſimiliter duæ lineæ rectæ b, c: ita ut b ad c habeat minorem proportionem, quàm circulus a ad ſuperficiem ſphæræ. ſitq; illarum media proportionalis d, & circumſcribatur iterum, & inſcribatur figura ut ſuprà, ita ut circumſcriptæ ad inſcriptam minor ſit proportio quàm b ad lineam d. igitur & ea duplicata erit minor. Quare ſuperficies circumſcriptæ ad ſuperficiem inſcriptæ minorem habet proportionem, quàm a circulus ad ſphæræ ſuperficiem. quod ſanè abſurdum eſt. nam circumſcriptæ ſuperficies maior eſt a circulo, inſcriptæ uero ſuperficies ſphæræ ſuperficie minor exiſtit. Nō ergo ſuperficies ſphęræ a circulo poteſt eſſe minor. Cum etiam demonſtratum ſit quod nequeat maior eſſe, neceſſariò colligitur eam circulo a, hoc eſt quadruplo circuli in ſphæra maximi æqualem eſſe.

32 QVælibet ſphæra quadrupla eſt eius coni, qui quidem conus habuerit baſim æqualem circulo in ſphæra maximo, altitudinē uero ęqualem ſemidiametro ſphæræ. Eſto quædā ſphęra, & maximus in ea circulus a b c d. Si itaq; ſphæra non eſt quadrupla dicti coni, eſto ſi fieri poteſt maior quàm quadrupla. Eſto præterea conus x, qui baſim habeat quadruplā ad circulū a b c d, altitudinem uero ſemidiametro ſphæræ æqualem. erit igitur ſphæra maior cono x. Habemus itaq; duas magnitudines inæquales, ſphæram uidelicet, & conum x. quare poterimus duas lineas rectas ſumere, quarum maior ad minorem habeat proportionem minorem, quàm ſphęra ad conum x. Sint igitur iſtę k g, & aliæ duæ i h ſumptæ, ita ut æquali quantitate ſeſe excedant. k excedat i, & i h, & h ipſam g. intelligatur etiam in circulo

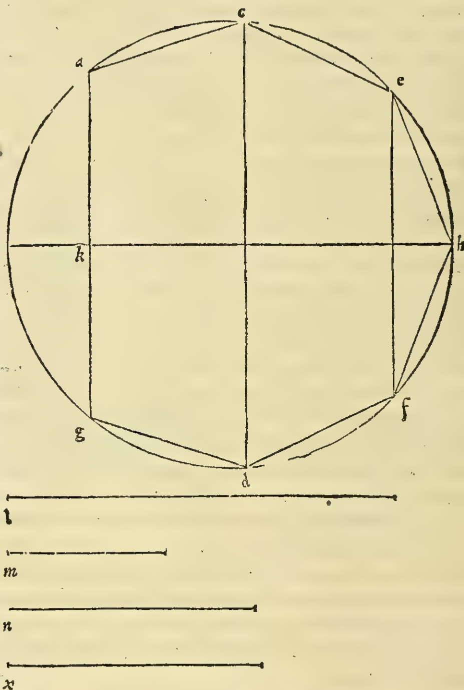


a b c d inſcripta una figura, cuius multitudo laterum menſuretur à quaternario. altera

tera præterea circumſcripta ſimilis inſcriptæ, quemadmodum ſuperius quoq; factum eſt. Latus uero circumſcriptæ ad latus inſcriptæ minorem habeat proportionem, quàm k ad ipſam i: & ſint a c, b d diametri ſe ad angulos rectos ſecantes. Si igitur quieſcente a c diametro circumferatur planus circulus, in quo figura eſt inſcripta, & circa quem altera circũſcripta fuerat, fient duæ figuræ, altera circa ſphęram, altera intrà deſcripta. Et circumſcripta habebit ad inſcriptam eam proportionem triplicatam, quam habet latus circũſcriptæ, ad latus inſcriptæ circulo a b c d. Latus uero ad latus minorem habet, quàm k ad ipſam i: quare figura circumſcripta minorem habet ad figuram inſcriptam proportionem, quàm eſt k ad i triplicata. Hoc enim manifeſtum eſt ex deſcriptione. multo magis ergo circumſcripta ad inſcriptam habet minorem proportionem, quàm k ad g. At uero k ad g minorem habet, quàm ſphæra ad x conum. & permutatim: quod ſanè eſſe non poteſt. nam figura circumſcripta maior eſt ipſa ſphæra, inſcripta uero eſt minor cono x: propterea quod conus x poſitus eſt quadruplus ad eum conũ, cuius baſis æqualis ſit circulo a b c d, & altitudo ſemidiametro ſphæræ. inſcripta uero figura minor exiſtit quàm quadrupla dicti coni. non poteſt igitur ſphæra maior eſſe quàm quadrupla dicti coni. Eſto ſecundò, ſi poteſt eſſe minor quàm quadrupla, ita ut ſphæra ſit minor x cono. ſumantur k g lineæ rectæ, k maior, g minor. Habeatq; k ad ipſam g minorem proportionem, quàm conus x ad ſphæram. & diſponantur i & h lineę ut prius, & intelligatur in a b c d circulo inſcripta figura multorum angulorum, altera circumſcripta, ita ut latus circumſcriptæ ad latus inſcriptæ, minorem habeat proportionem quàm k ad i, & cætera parentur eodem modo ut prius. figura ergo circumſcripta ad figuram inſcriptam, habebit eam proportionem quæ eſt lateris circumſcriptæ circulo a b c d, ad latus eidem inſcriptę triplicata. Latus uero ad latus minorem habet, quàm k ad i. Figura igitur circumſcripta ad inſcriptam, minorem habebit proportionem quàm eſt k ad i triplicata. k uero ad g eſt ea quam habet k ad i triplicata. quare figura circumſcripta ad inſcriptam, habet minorem q̃ k ad g. at uero k ad g minorem habet quàm x conus ad ſphæram. Circumſcripta igitur figura ad inſcriptam, minorem habet quàm x conus ad ſphærã. quod quidem eſſe non poteſt. Nam inſcripta figura minor eſt ipſa ſphæra. circumſcripta uero maior eſt x cono. Sphæra igitur minor eſſe non poteſt, quàm quadrupla coni, qui habeat baſim æqualem circulo a b c d, & altitudinem ſemidiametro ſphæræ. Et ſuprà eſt oſtenſum, quod neq; maior eſſe poterat: erit igitur dicti coni neceſſariò quadrupla.

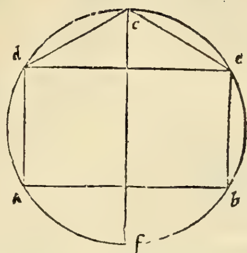
Ex illis igitur quæ ſuprà ſunt demonſtrata, manifeſtum eſt, quod quilibet cylindrus, qui baſim habeat maximum in ſphæra circulum, & altitudinem diametrum ſphęræ, ad ipſam ſphęram ſeſquialter habetur, & ſuperficies eius cum baſibus ſeſquialtera ad ſphæræ ſuperficiem. nam cylindruș prædictus ſextuplus eſt eius coni qui baſim habeat cum cylindro eandem, habeat uerò altitudinem æqualem ſemidiametro ſphæræ. Sphæra uero eſt demonſtrata eſſe quadrupla dicti coni. ex quo conſtat, cylindrum eſſe ſphæræ ſeſquialterum. Item cum ſuperficies cylindri exceptis baſibus circulo oſtenſa eſt æqualis, cuius ſemidiametrus ſit media proportionalis inter latus cylindri & diametrum baſis eius: dicti autem cylindri circa ſphæram latus eſt æquale diametro baſis ſuæ: manifeſtum eſt, quod media proportionalis eſt & ipſa æqualis eidem diametro. Circulus autem cuius ſemidiametrus ſit æqualis diametro baſis, quadruplus eſſe probatur ad baſem, quæ eſt maximus in ſphæra circulus. Superficies autem cylindri exceptis baſibus habet quadrupla maximi in ſphæra circuli. quare tota ſimul cum baſibus ad eundem circulum ſextupla apparebit. ipſa quoq; ſphæræ ſuperficies ad circulum in ſphæra maximum, quadrupla probata eſt. quare tota cylindri ſuperficies, ad ſphæræ ſuperficiem exiſtet ſeſquialtera.

33 SVperficies figuræ in portione ſphæræ deſcriptæ, æqualis eſt circulo, cuius ſemidiametros tantum poſſit, quantum eſt quod continetur ſub uno latere figuræ multorum angulorum, inſcriptæ in ſectione maximi circuli, & ſub linea quę ſit æqualis omnibus ſimul lineis, quæ baſe ſectionis ſint æquediſtantes, & dimidio ipſius baſis cum prælictis adiecto. Eſto ſphæra, & in ipſa portio ſecta, cuius baſis ſit circulus, cuius ſit diametrus a g: inſcribatur in ipſa portione figura qualis ſæpe dicta eſt, comprenſa à conicis ſuperficiebus. & ſit maximus in ſphæra circulus a g h, & ſit figura pari laterum numero conſtãs a c e h f d g, excepto latere a g: & ſumatur circulus l, cuius ſemidiametros tantum poſſit, quantum quod continet ſub latere a c, & ſub omnibus ſimul e f c d, atq; etiã dimidia baſe, hoc eſt a k. demõſtrandum deinceps eſt, quod l circulus æqualis eſt ſuperficiei dictæ figuræ. Sumatur enim circulus m, cuius ſemidiametros tantũ poſſit quantum quod cõtinetur ſub h e, & ſub dimidia e f. Circulus ergo m æqualis eſt ſuperficiei coni illius, cuius baſis eſt circulus habens e f diametrum: eius uero altitudo et uertex, ſignum h. ſumatur item alius circulus n, cuius ſemidiametrus tantum poſſit quantum continetur ſub e c, & dimidia utriuſq; ſimul e f, c d, erit hic ęqualis ſuperficiei coni, illi uidelicet quæ ſita eſt media inter planas ſuperficies æquediſtantes, ſecundum lineas uel circulos e f, c d. Item alius ſimiliter ſumatur qui ſit circulus x, cuius ſemidiametrus poſſit id quod ſub a c, & dimidia utriuſq; ſimul c d, a g continetur, qui & æqualis eſt ſuperficiei conicæ, quæ inter planas æquediſtantes a g c d comprenditur. Omnes igitur circuli æquales erunt toti ſuperficiei figuræ dictæ. Et eorum ſemidiametri tantum poterunt, quantum ſub uno latere a c, & ſub linea quæ ſit æqualis omnibus ſimul e f, c d, & dimidia baſi a k. poterat autem ſemidiametrus circuli l æquale eidem ſpacio. quare ſequitur, l circulum circulis m n x æqualem eſſe: unde & ſuperficiei figuræ inſcriptæ æqualis exiſtet.



34 SEcetur ſphæra plana, ſuperficie non tranſeunte per centrum eius, & ſit in ea maximus circulus a e f, qui ſecet ſuperficiem ſecãtem ad angulos rectos, & inſcribatur in a c b ſphæræ portione figura multorum angulorum & parium numero, & æqualium laterum, excepta baſe a b, ſimiliter ſuperiorib. ſi manente & quieſcente g c circumferatur figura anguli quidem d, e, a, b ſecundum circumferentias circulorum, latera uero ſecundum conicas ſuperficies ferentur, erit que figura

ra solida quæ inde confecta est, superficiebus conicis comprehensa, quæ basim habebit eum circulum cuius diametrus est a b, uerticem uero punctum c. Hæc igitur figura similiter his quæ dicta sunt superius, superficiem habebit minorem superficie eius figuræ quæ complectatur eam. idem enim est utrisque terminus in plano portionis, scilicet circumferentia circuli, cuius diametros est a b: & ambæ sunt in eandem partem conglobatæ superficies, & altera sub altera tenetur complexa.



SVperficies figuræ in sphæræ portione descriptę, minor est eo circulo, cuius semidiametros æqualis est lineæ, quæ à uertice portionis ad circumferentiã circuli ducitur: qui quidem circulus basis est portionis. Esto sphæra, & maximus 35
in ea circulus a b f e: & esto portio sphæræ, cuius basis sit circulus circa diametrum a b, & inscribatur in ipsa dicta figura & in portione circuli, figura multorum angulorum, & cętera eadem. Esto sphęræ diametros h l, coniunctis l e, h a. & sit circulus m, cuius semidiametrus sit æqualis a h. Ostendendum est, quod circulus m maior est superficie figuræ. superficies aũt figuræ demonstrata est æqualis esse circulo, cuius semidiametros tantum potest, quantum continetur sub e h, & sub omnibus e f, c d, k a. idipsum cõtentum sub e h, & sub e f, c d, k a, æquatur contento sub e l, k h. contentum uero sub e l, k h, minus est contento sub a h. nam & minus contento sub a h, k h. Manifestũ igitur est, quod semidiametrus circuli, qui est æqualis superficiei figuræ, minor est semidiametro m. Constat igitur, circulum m superficie figuræ maiorem etiam.

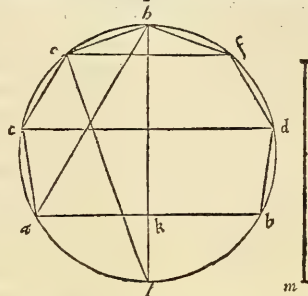
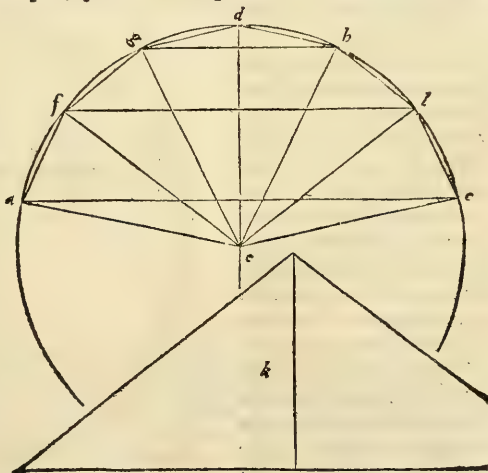
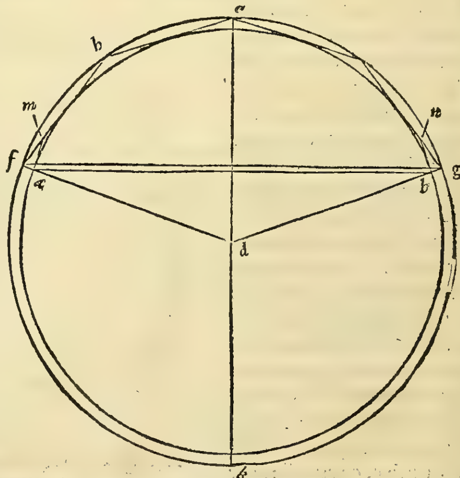


FIgura portioni sphæræ inscripta, quæ conicis superficiebus contineatur, unã cum cono illo qui basim habeat eandem cum figura, uerticem uero centrum sphæræ, æquatur illi cono, cuius basis est æqualis superficiei figuræ dictę: altitudo uero æqualis lineæ, quæ à cẽtro sphęræ ad unum latus dictæ figuræ sit perpendiculariter ducta. Esto sphæra, et maximus in ea circulus & portio semicirculo minor a b c, & centrum e: & scribatur in a b c portione figura parium laterum & æqualium, excepta a c base, similiter ut prius: & quiescente b e, circumferatur sphæra, quæ faciet figurã quandam conicis superficiebus comprensam. & à circu 36



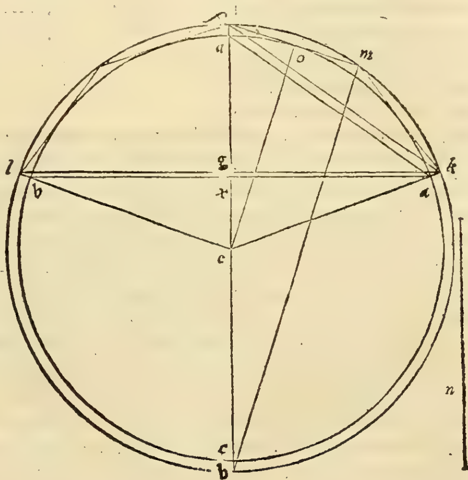
lo cuius diametros est a c, conus erigatur, qui uerticem habeat centrum sphæ-ræ. & sumatur conus k, qui basem habeat æqualem superficiei figuræ, altitudinem uero æqualē ei quæ à centro educitur perpendiculariter ad unum latus figuræ. Demonstrare itaq; oportet, quod conus k æquetur figuræ dictæ, unà cum cono a e c. erigātur etiam coni à circulis, quorum diametri sunt g h, f l, qui uerticem ha-beant punctum e. Igitur rhombus g b h e solidus, æqualis est cono cuius basis æ-quatur superficiei g b h: coni altitudo uero ei quæ ab e ad g b, sit perpendiculari-ter ducta. Residuum uero quod continetur sub superficie intermedia inter planas superficies, quæ sunt secūdum g h, f l, & sub conicis f e l, g e h, æquatur cono cuius basis æqualis sit superficiei intermediæ inter æquedistantes planas, quæ sunt secū-dum g h, f l: altitudo uero æqualis ei quæ sit à centro e ad f g perpendiculariter du-cta. Rursus residuum compræhensum à superficie intermedia planarum æque-distantium, quæ sunt secundum f l, a c, & à conicis a e c, f e l, æquatur cono cuius basis æqualis est superficiei, quæ intermedia est inter planas æquedistantes, quæ sunt secundum f l, a c, altitudo uero ei quæ ducta sit perpendiculariter ab e ad f a. Prædicti igitur coni æquales erunt figuræ unà cum cono a e c. & altitudinem qui-dem habent eam quæ ab e ad unum latus figuræ perpendiculariter sit ducta, ba-ses uero æquales superficiei a f g b l c figuræ. Habet aūt & conus k eādem altitudi-nem, & basem æqualem superficiei dictæ figuræ: quare erit æqualis dictis conis. Coni uero dicti ostēsi sunt æquales esse dictæ figuræ, unà cum a e c cono. Igitur & k conus æquatur dictæ figuræ, unà cū a e c cono. Ex hoc igitur manifestū est, quod conus qui basem habeat circulum, cuius semidiametros æqualis sit ei quæ à uerti-ce portionis ad circumferentiam circuli, qui est basis figuræ, ducta sit: altitudinem uero æqualem semidiametro sphæræ: maior est figura portioni inscripta unà cum cono, &c. nam dictus conus maior est cono æquali figuræ, unà cum cono, &c. qui conus basem habeat basem figuræ portionis ad centrum: hoc est, qui basem ha-beat æqualem superficiei figuræ, altitudinem uero æqualem ei quæ sit à centro ad unum latus figuræ multorum angulorum perpendiculariter ducta. nam basis il-lius, base huius maior existit, & altitudo altitudine maior.

37 ESto sphæra, & maximus in ea circulus a b c, & secetur in ea portio semicir-culo minor, quā secet a b, & sit cētrum d, & à centro d ad a b ducantur a d, d b. & circa factam portionem circumscribatur figura multorum angulorum, circa quam describatur circulus, qui quidem habebit idem centrū cum a b c circulo. quod si quiescēte e k circumferatur dicta figura donec ad locum redeat unde moueri cœpit, circulus circumscriptus secundum sphæræ superficiē feretur: & anguli dictæ figuræ circulos describent, quorum diametri erunt lineæ angulos figuræ iungentes, quæ æquedistātes erūt ipsi a b: puncta uero, in quibus latera figuræ contingunt circulum minorem, circulos descri-



describent in minori sphæra, quorum diametri erunt lineæ continuantes puncta contactuum æquedistantes lineæ a b, latera uero dictæ figuræ secundum conicas superficies ferentur. & figura circumscripta sub conicis superficiebus continetur, cuius basis circulus est, qui est circa f g diametrũ: dictæ uero figuræ superficies est maior superficie minoris sectionis, cuius basis est circulus qui est circa a b diametrum. Ductæ enim sunt contingentes a m, b n. quare secundum conicas superficies ferentur: & figura quæ causatur à figura multorum angulorum, circumuoluta a m h e n b, maiorem habebit superficiem quàm portio sphæræ, cuius basis est circulus circa a b constitutus. nam utræq; in eodem plano existunt, & eundem terminum habent, circulum circa a b descriptum. & portio à figura comprehenditur. cæterum conica superficies ab f m g n producta, maior est ea quæ ab m a n b effecta est. nam f m maior est m a: nam subtenditur rectæ. linea uero n g, maior n b. cũ autem hoc sic se habeat, maior erit superficies superficie. nam hæc sunt in his quæ sumpta fuerunt, demonstrata. Manifestum est igitur, quod circumscriptæ figuræ superficies maior est superficie portionis sphæræ minoris. Insuper manifestũ est, quod superficies inscriptæ figuræ quæ circa portionem existit, æqualis est circulo cuius semidiametros possit id quod sub uno latere figuræ continetur, & sub omnibus simul lineis continuantibus angulos dictæ figuræ, & dimidia base dictæ figuræ multorum angulorum, secundum quod descripta fuit figura solida in maiori sphæra descripta. Hoc autem per ea quæ antè descripta sunt, manifestum est.

SVperficies figuræ quæ circa sphæræ portionem sit descripta, eo circulo maior existit, cuius semidiametros sit æqualis lineæ, quæ à uertice portionis ad circũferentiã circuli sit ducta, qui circulus basis portionis existat. Esto sphæra, & maximus in ea circulus a b c d, centrum eius e. Deinde circa portionem describatur figura multorum angulorum l k f, & circa hãc describatur circulus, & fiat figura, ut prius circumuoluendo, &c. deinde esto circulus n, cuius semidiametros possit id quod continetur sub uno latere figuræ, & sub omnibus simul coniungentibus angulos, & dimidia k l. uerũ idem spacium dictũ æquatur ei quod sub m h & f g continetur, quæ est altitudo portionis maioris sphæræ. Hoc autem prius ostẽsum est. semidiametros igitur circuli n, potest æquale ei quod sub m h, g f continetur. sed g f quidem maior est d x, quæ est altitudo minoris portionis. nam si iungamus k f, erit æquedistans ipsi d a. Est autem & a b æquedistans ipsi k l, & conus est f e. Triangulus igitur f k g, similis est triangulo d a x. & maior est f k quàm d a. maior est igitur etiã f g quàm d x. At uero m o æquatur ipsi o f, ipsa uero h e ipsi e f. est igitur e o æquedistans ipsi m h: igitur m h dupla est e o. Sed etiam c d dupla est ipsius e o. quare c d æqualis est ipsi m h. Quod aũt sub c d & d x continetur, est æquale quadrato a d. Superficies igitũ figuræ k f l, 38

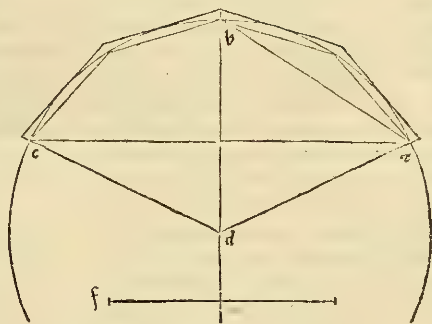


maior eſt circulo cuius ſemidiametros ſit æqualis ei quæ à uertice portionis ad circumferentiam circuli ducta ſit, qui eſt baſis eius portionis quæ eſt circa diametrũ a b. quoniam n circulus æqualis eſt ſuperficiei figuræ circa portionẽ deſcriptæ.

39 Figura circa ſphæræ portionem deſcripta, unà cum cono cuius baſis ſit circulus circa k l diametrum conſtitutus, uertex centrũ ſphæræ æqualis eſt cono, cuius baſis ſit ęqualis ſuperficiei figuræ: altitudo uero æqualis ei lineę, quæ à cẽtro ad latus figurę ſit perpendiculariter ducta, quæ quidem ſemidiametro quoq; ſphęræ inuenitur æqualis. Nã figura portioni circumſcripta, eſt in portione maioris ſphærę inſcripta, cuius centrum eſt idem cum minori. unde conſtat, quod propoſitum eſt ex antè deſcripta figuratiõe. Ex hoc igitur manifeſtũ eſt, quod figura circumſcripta unà cum cono, maior eſt eo cono qui baſim habeat circulum, cuius ſemidiameter æqualis ſit lineæ ductæ à uertice portionis ſphæræ minoris, ad circumferentiam circuli, qui ſit baſis portionis dictæ: altitudinem uero æqualem ſemidiametro ſphæræ. Nam conus qui erit æqualis dictæ figurę, unà cum cono maiorem baſim habebit, quàm ſit dictus circulus: altitudinem uero æqualem ſemidiametro ſphęræ minoris. Eſto item ſphęra, & maximus in ea circulus & portio a b c, minor ſemicirculo, & cẽtrum d: & intra a b c portionem inſcribatur figura multorum & parium angulorum, & huic ſimilis circumſcribatur eidem, & ponantur latera lateribus æquediſtantia. & circulus circumſcribatur figuræ circumſcriptæ, & ut prius quieſcente g h, circuli circumducti producant figuras conicis ſuperficiebus compræhenſas. Oſtendere oportet, quod circumſcriptæ figurę ſuperficies ad ſuperficiem inſcriptę eam habet proportionem, quæ eſt lateris circũſcriptæ ad latus inſcriptæ duplicatã. Figura uero ipſa, ſimul cum cono ad figurã, habet eandẽ proportionem triplicatam. Eſto m circulus, cuius ſemidiametros tantum poteſt, quantum ſub uno latere figuræ, & omnibus ſimul lineis angulos continuantibus, unà cum dimidia e f continetur: erit itaq; m circulus æqualis ſuperficiei figurę. Sumatur deinde circulus n, cuius ſemidiametros tantum poſſit, quantum ſub uno latere inſcriptæ figuræ, & omnibus ſimul lineis iungentibus angulos unà cũ dimidia a c. Hic quoq; circulus erit æqualis ſuperficiei figuræ inſcriptæ. Verum dicta ſpacia habẽt inter ſe eam proportionem, quam habet quadratum lateris e k ad quadratum a l. Igitur ut figura ad figuram, ita m circulus ad n circulum. Quare manifeſtũ eſt, quod ſuperficies figurę circumſcriptę ad ſuperficiem inſcriptæ figuræ, habet eam proportionem duplicatam, quã habet e k ad a l: eandem uidelicet, quam figura ad figuram. Eſto item conus x, qui baſim habeat æqualem circulo m, altitudinem uero ſemidiametrum ſphæræ minoris. Hic conus æqualis eſt figuræ circumſcriptæ unà cum cono illo, cuius quidẽ coni baſis eſt circulus qui eſt circa e f

ca e f diametrum, uertex uero d. Esto item alius conus o, qui basim habeat æqualē ipsi n, altitudinem uero æqualem ei quæ ab ipso d ad a l perpendiculariter ducta sit. hic quoq; figuræ inscriptæ unà cum una cono est æqualis, cuius quidem coni basis est circulus circa a c diametrum descriptus, uertex uero d cētrum. Hæc enim omnia prius descripta fuerunt. Quoniam igitur sicut e k ad semidiametrum sphæræ minoris, ita a l ad ductā à centro perpēdiculariter ad ipsam a l. Ostensum aūt fuit, quod sicut e k ad a l, sic semidiametros circuli m ad semidiametrū circuli n, et etiam diametros ad diametrum. Erit igitur, sicut diametros circuli illius qui est basis x, ad diametrum circuli qui est basis ipsius o, ita altitudo coni x ad altitudinem coni o. quare sequitur, conos x & o similes esse. conus ergo x habet ad conū o, eā quæ est diametri ad diametrū proportionem triplicatam. Vnde manifestum est, figuram quoq; circumscriptam unà cum cono ad figuram inscriptam, unà cum cono eam habere quam e k ad a l proportionem triplicatam. quare, &c.

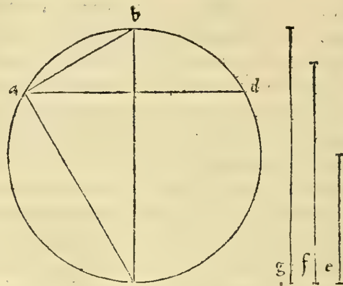
SVperficies cuiuscunq; portionis sphęræ, quæ quidem portio sit dimidia sphæra minor, æqualis est circulo, cuius semidiametros æquatur lineæ illi, quæ à uertice portionis ad circumferētiam circuli ducta sit, qui circulus portionis est basis. Esto sphęra, et maximus in ea circulus a b c. itē sectio in ea minor dimidia sphæra, cuius basis sit circulus circa a c cōstitutus, erectus super a b c circulo. & sumatur circulus f, cuius semidiametros sit æqualis lineæ a b. Oportet itaq; demōstrare, superficiē a b c portionis ęqualem esse circulo f. nā si non sit: esto primò maior dicta superficies circulo f, & ponatur d centrū, & ab ipso duę lineę ductę ad a, & ad c extrà educantur. Cū igitur sint duę 40



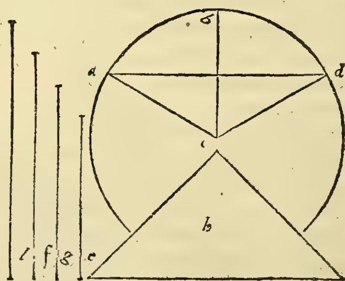
magnitudines inęquales, superficies uidelicet portionis, et f circulus, describemus duas figuras multorum angulorum, & parium & ęqualium laterū, omnino similes, unam circa sectorem circuli a b c, alteram intra eundem, ita ut circumscriptę ad inscriptam sit minor proportio, quàm superficiei portionis sphęrę ad circulum f. circumuoluto deinde circulo, ut prius, duas figuras efficiemus conicis superficiebus compręhensas, quarum altera circumscripta, altera inscripta erit: & superficies circumscriptę ad superficiem inscriptę eandem habebit proportionem, quam circumscripta figura habet ad inscriptam. nam utraq; proportio est duplicata illa quam habet latus circumscriptę, ad latus inscriptę figurę multorum angulorum. Sed circumscripta multorum angulorū figura ad inscriptā, minorem habet proportionem, quàm dictę portionis superficies ad circulum f. maior autem est circūscriptę figurę superficies superficie portionis. igitur & superficies figurę inscriptę maior erit f circulo. quod quidem esse non potest. Nam suprà demonstratum est, dictam figurę superficiem tali circulo minorem esse. Esto secundò, quod circulus ponatur maior esse superficie, & similiter circumscribatur & inscribatur figura altera alteri similis, & circumscriptæ ad inscriptam minor sit proportio quàm circuli f ad superficiem figurę: & item demonstrabitur deducendo ad idem inconueniens, circulum f non posse esse maiorem dicta superficie. Cum igitur neq; maior esse possit dicta superficies f circulo, neq; minor, ut demonstratum est, sit necessariò, ut sit eidem æqualis.

Si

41 SI portio sphęrę sit maior dimidia sphęra, rursus eius superficies æquat circulo, cuius semidiametros sit ęqualis lineę illi quę ducta sit à uertice portionis ad circumferentiam circuli, qui est basis dictæ portionis. Esto sphęra, & maximus in ea circulus a b c d, & intelligatur ipsa secta à plano secũdum a d, & sit a b d minor dimidia sphęra, et diametrus b c secet ad angulos rectos diametrum a d, & ipsa c & b iungantur c a, b a: & sit e circulus, cuius semidiametrus sit ęqualis ipsi a b. Sit autem f circulus, cuius semidiametrus sit ęqualis ipsi a c. & g sit circulus, cuius semidiametrus sit ęqualis b c. Circulus igitur g, ęqualis est duobus simul circulis e, f. Circulus autem g, ęqualis est toti superficiei sphęræ, cum utraq; sint quadrupla circuli, qui est circa diametrum b c. circulus e, æqualis est superficiei a b d portionis minoris: nam hoc est demonstratũ proxima superiori in portione minori dimidia sphæra. reliquus ergo circulus f, æqualis est superficiei a c d portionis maioris dimidia sphæra.



42 CVicũq; portioni sphæræ æquatur conus ille, qui basim habeat æqualẽ superficiei sectionis sphæræ, quæ secundum dictam portionem habeatur: altitudinem uero æqualem sphæræ semidiametro. Esto sphæra, & maximus in ea circulus a b d, centrum c. & conus basem habens circulũ æqualem superficiei, quæ secundum a b d circũferentiam habetur, altitudinem uero æqualem ipsi b c. Ostendẽdum est, quod portio a b c d, æqualis est dicto cono. Nam si non: esto primò portio maior cono, & ponatur h conus qualis dictus est. Cum igitur duæ sint magnitudines inęquales, portio scilicet, & conus h, inueniantur duæ lineæ l & e, l maior, e minor, quæ habeãt minorẽ proportionem, quàm portio ad conum: & sumantur duæ lineæ, f, g: ita ut l tantum excedat f, quantum f excedit g, & g, e. & circa planam circuli portionem circumscribatur figura multorum angulorum, & æqualium laterũ, & parium angulorum: & altera huic similis inscribatur eidem, ita ut circumscriptæ ad inscriptam sit maior proportio, quàm l ad ipsam f. & simili modo, ut prius factum est, circũducto circulo producentur duæ figuræ conicis superficiebus compræhensæ. Figura itaq; circumscripta, unà cum cono, qui uerticem habeat punctum c ad figuram inscriptam, unà cum cono habet eam proportionem triplicatam, quam habet latus figuræ multorum angulorum circumscriptæ, ad latus inscriptæ. Verum latus circumscriptę ad latus inscriptæ, habet minorem proportionem quàm l ad f. Figura igitur solida quæ dicta est, minorem habebit proportionem quàm est l ad f triplicata. At uero l ad e maiorem habet proportionem, quàm est l ad f triplicata. figura ergo solida circumscripta portioni, ad inscriptam figuram, minorem habet proportionem, quàm est l ad e. Verum l ad e minorem habet, quàm portio solida, ad conum h. quare figura solida circumscripta portioni, ad inscriptam eidem, minorem ha-



bet proportionem, quàm portio solida ad conum h: & permutatim. figura solida uero circumscripta maior est portione. Inscriptam ergo figuram ipsi portioni maiorem esse cono concludemus, quod sanè esse non potest. demõstratum enim est in superioribus, dictam figurã minorẽ esse oportere eo uidelicet cono, qui basim habeat circulũ, cuius semidiametros æqualis sit lineæ à uertice portionis ad circũferentiam portionis ductæ, qui circulus basis portionis existat: altitudinem uero semidiametrum sphæræ. Hic aũt est dictus conus h. habet enim basem circulum æqualem superficiei portionis, hoc est dicto circulo, & altitudinem æqualem semi diametro sphæræ. Portio igitur solida non est maior cono h. Esto secundò conus h maior solida portione: rursus atq; similiter l ad ipsam e, cum sit maior, ea minorẽ habeto proportionem, quàm conus ad portionem. & similiter sumantur f g, ita ut latus figuræ multorum angulorum & parium circumscriptæ circa planam portionem circuli ad latus inscriptæ eidem, minorem habeat proportionem quàm est l ad f. & fiant circa portionem solidam figuræ solidæ, ut superius fecimus. Demonstrabimus itaq; eodem modo, quòd figura solida portioni solidæ circumscripta, ad inscriptã figuram minorem habeat proportionem, quàm l ad e, & quàm h conus ad portionem. quare portio quoque ad conum minorem habebit proportionem, quàm figura solida portioni inscripta ad figuram circumscriptam. Portio autem maior est figura sibi inscripta. igitur concludemus, h conum esse figura circumscripta maiorem: quod item esse non potest. nam hoc demõstratum est, quod talis conus necessariò minor est figura portioni circumscripta. Ex qua re colligimus, portionem cono dicto esse æqualem.

ARCHIMEDIS DE SPHAERA ET Cylindro Libri primi Finis.

ARCHIMEDIS DE SPHAERA ET CYLINDRO LIBER secundus.

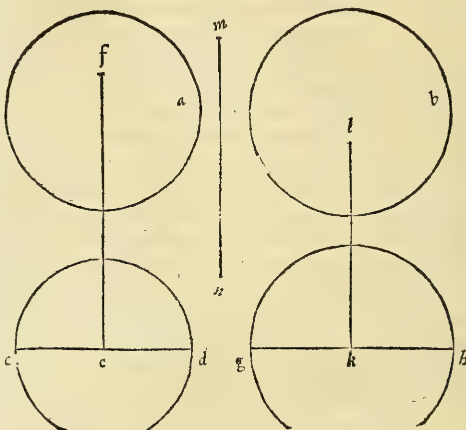
ARCHIMEDES DOSITHÆO Salutem.



NTEA quidem mihi iusseras, ut problematum demonstrationes scriberem, quorum ipse iam propositiones miseram ad Cononem. Contingit autem eorum plurima scribi per theoremata, quorum iampridem ad te miseram demonstrationes. Quòd uidelicet cuiuslibet sphæræ superficies maximi in sphæra circuli quadrupla existit. Et quòd superficiei cuiuscunque sphæræ circulus ille est æqualis, cuius semidiametros diametro sphæræ est æqualis. Item cuiuscunque portionis sphæræ superficies æquatur circulo, cuius semidiametros est æqualis lineæ rectæ, quæ à uertice portionis ad circumferentiam circuli, qui est basis portionis, ducatur. Itẽ quod cylindrus qui basem habeat maximum in sphæra circulum, altitudinem uerò æqualem diametro sphæræ, ipseq; sesquialter est magnitudini sphæræ, & eius superficies superficiei sphæræ sesquialtera habetur. Item quòd omnis portio solida sphæræ æqualis est cono, qui basim habeat circulum, qui sit æqualis superficiei portionis sphæræ: altitudinem uerò æqualem semidiametro sphæræ. Quæcunq; igitur inspecta theoremata & problemata ex his quę dicta sunt oriuntur, ad te missa sunt, omnia in hoc libro conscripta. Quæ uero ex alia inspectione colliguntur, ut quæ de elicis & conoidibus, nitor quàm celeriter mittere. Primũ autem quod

propoſitum fuerat, habebatur huiuſmodi. Sphæra data ſpacium planum inueni re, quod ſuperficiei ſphæræ eſſet æquale. Hoc autem manifeſtum & demonſtratum eſt ex prædictis inſpectis & theorematibus. Spacium enim planum quod cir circulo in ſphæra maximo ſit quadruplum, æquale eſt ſuperficiei ſphæræ.

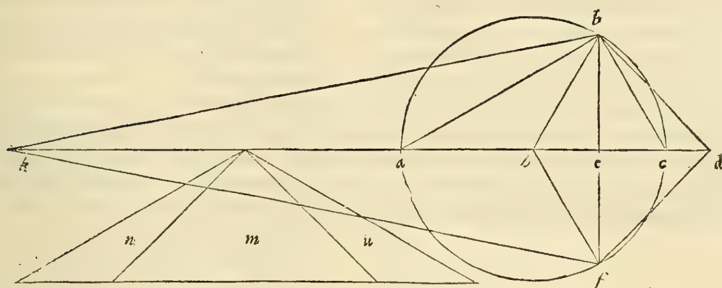
1 Secundum propoſitũ fuit, cono, ſiue cylindro dato ſphæram inuenire, dicto cono uel cylindro æqualem. Eſto datus conus, ſiue cylindrus, a: & ſphæra ipſi a æqualis, ſit b: & ponatur cylindrus c f d, qui ſit ſeſquialter dato cono, uel cylindro a. Sphæræ uero b cylindrus ſeſquialter eſto, qui baſem habet circulum, qui eſt circa diametrum g h: axem uero k l, æqualem diametro ſphæræ b. erit igitur e cylindrus æqualis cylindro k. cylindrorũ aũt æqualium baſes ſuis altitudinib. ſunt mutuæ in proportione. Sicut ergo e circulus ad k circulum, hoc eſt ſicut quadratum c d ad quadratum g h, ſic k l ad e f. Eſt autem k l æqualis ipſi g h. nam cylindrus ſeſquialter ſphæræ, axem habet æqualem diametro ſphæræ, & circulus k eſt in ſphæra maximus. ſicut ergo quadratum c d ad quadratum g h, ſic g h ad e f. Eſto id quod ſub c d, m n continetur, æquale quadrato g h. Sicut ergo c d ad m n, ſic quadratum c d ad quadratum g h, hoc eſt g h ad e f: & permutatim, ſicut c d ad g h, ita g h ad m n, & m n ad e f. Et utraque c d & e f data eſt. Igitur inter duas datas rectas lineas duæ mediæ proportionales ſunt, g h, m n. quare utraq; g h & m n data erit. Componetur autem iam propoſitum hoc modo. Eſto datus conus, ſiue cylindrus, a. oportet itaq; ipſi cono, uel cylindro, ſphæram æqualem conſtituere. Eſto coni, ſiue cylindri a, cylindrus ſeſquialter, cuius baſis ſit circulus qui eſt circa diametrũ c d, axis uero e f. & ſumantur inter c d & e f duæ mediæ proportionales g h, m n: ita ut ſicut c d ad g h, ita g h, ad m n, & m n ad e f. Et intelligatur cylindrus, cuius baſis ſit circulus, qui fiat circa diametrum g h, axis autem k l æqualis diametro g h. Dico iam, quod æqualis eſt e cylindrus ipſi k cylindro. Nam quoniã ſicut c d ad g h, ita m n ad e f. & permutatim, & g h eſt æqualis ipſi k l. Sicut igitur c d ad m n, hoc eſt quadratum c d ad quadratum g h, ſic e circulus ad k circulum. ſicut ergo e circulus ad k circulum, ſic k l ad e f. Cylindrorũ igitur e & k baſes, ſuis altitudinibus in proportione ſunt mutuæ. quare e cylindrus ipſi k cylindro erit neceſſario æqualis. Cylindrus uero k ſphæræ illius eſt ſeſquialter, cuius diametros eſt g h. Ergo ſphæra cuius diametros æquatur g h, hoc eſt b, æqualis eſt a cono, ſiue cylindro.



2 QVicunq; portioni ſphæræ conus ille habetur æqualis, qui baſim habeat eandem cum portione, altitudinem uero lineam rectã, quæ ad altitudinem portionis eandem habeat proportionem, quam ſemidiametros ſphæræ unà cum altitudine reliquæ portionis habet, ad eandem reliquæ portionis altitudinem.

Eſto ſphæra, & maximus in ea circulus, cuius diametros a c, & ſecet ſphæra à plano ſecundum b f, ad angulos rectos ſuper ipſam a c, & ſit centrum h, & fiat ſicut utraq; ſimul h a, a e ad a e, ſic d e ad c e. Item fiat ſicut utraq; ſimul h c, c e ad c e, ſic k e ad

ad e a. Et erigantur coni utrinque à circulo circa b f diametrum constituto, uertices habentes puncta k d. Dico itaq;, quod b d f conus, æquatur ei quæ est secundū c portioni sphæræ. conus autem b k f portioni, quæ est secūdum a punctum. Iun-



gantur itaq; b h, h f: & intelligatur conus, qui basim habeat circulum circa b f diametrum constantem, uerticem uerò punctum h. item alter conus m, qui basim habeat circulum æqualem superficiei b c f portionis sphæræ: hoc est, habentem semi diametrum æqualem b c. altitudo uero coni sit æqualis semidiametro sphæræ. Erit iam conus m æqualis b c h f portioni solidæ. Hoc autem est ostensum in primo libro. Quoniam igitur est sicut d e ad e c, sic utraque simul h a, a e ad a e, diuidendo erit sicut c d ad c e, ita h a ad a e: hoc est c h ad a e. & permutatim, sicut d c ad c h, sic c e ad e a. & coniungendo, sicut h d ad h c, ita c a ad a e: hoc est quadratum c b, ad quadratum b e. Sicut ergo d h ad c h, ita quadratum c b ad quadratum b e. Est autem c b æqualis semidiametro circuli m. At uero b e est semidiametros circuli circa b f diametrum constituti. Erit igitur, ut d h ad h c, sic m circulus ad circulum circa diametrum b f constitutum, & h c est æqualis axi coni m. ergo sicut d h ad axem coni m, sic circulus m ad circulum circa b f diametrum constitutum. Conus igitur qui habet basem circulum m, & altitudinem sphæræ semidiametrum, æqualis est b d f h solido rhombo. nam hoc in his quæ in primo libro sumpta sunt, demōstratum fuit. Vel hoc modo cōcludemus: Quoniam est sicut d h ad altitudinem m coni, ita m circulus ad circulum circa b f diametrum constitutum. quare conus m æquabitur cono, cuius basis sit circulus circa b f diametrum constitutus, altitudo autem d h. nam istorum bases altitudinibus sunt mutuæ in proportione. sed conus qui basem habet circulum circa b f diametrum constitutum, altitudinem autē d h, æqualis est b d f h solido rhombo: conus uero m æquatur b c f h, solidæ portioni: & b c f h solida portio æqualis erit b d f h solido rhombo. Communi itaq; sublato cono uidelicet cuius basis est circulus circa b f diametrum conuolutus, altitudo autem e h: residuum m scilicet b d f conus, æqualis erit b f c portioni sphæræ. Similiter autem ostendetur, b k f conum portioni sphæræ b a f esse æqualem. Nam quoniā sicut utraq; simul h c, c e se habet ad c e: sic k e ad e a, diuidendo erit sicut k a ad a e, ita h c ad c e. æqualis est aūt h c ipsi h a. quare & permutatim, sicut k a ad a h, ita a e, ad e c. unde cōponendo, sicut k h ad h a, sic a c ad e c: hoc est, quadratū b a ad quadratum b e. Ponatur itaq; rursus circulus n, semidiametrum habens æqualem lineæ ductæ à uertice portionis b a f, ad circumferentiam basis portionis, & intelligatur conus n, qui altitudinem habeat æqualem semidiametro sphæræ: æqualis ergo hic erit b h f a solidæ portioni. nam hoc in primo fuit ostensum. Et quoniam demonstratum est, sicut k h ad h a, ita esse quadrati a b ad quadratum b e, hoc est quadrati semidiametri n circuli, ad quadratum semidiametri circuli circa b f diame

 trum

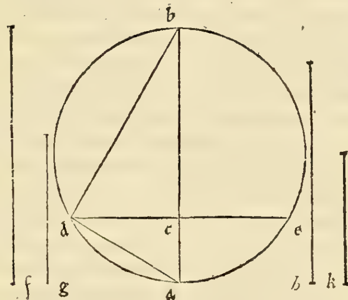
trum conuoluti: hoc est n circuli ad circulum circa b f diametrum constitutum. at uero a h æquatur altitudini n coni. quare sicut k h ad altitudinem coni n, sic circulus n ad circulum circa b f diametrum cõstitutum, altitudinem uero k h. Tota igitᷓ a b f portio sphęræ æquatur cono b k f, qui basem habeat eãdem cum portione, & altitudinem æqualem ei, quæ eandem habeat proportionẽ ad altitudinem portionis sphæræ, quam proportionem habet utraq; simul & semidiametrus sphæræ, & perpendicularis reliquæ sectionis ad perpendicularẽ reliquæ sectionis. sicut enim d e ad e c: sic d f b conus, hoc est b c f portio ad b c f conum.

Eadem descriptione retenta, & eisdem subiectis ostendemus, quod k b f conus æqualis est a b f portioni sphæræ. Esto itaq; n conus, basem habẽs superficiei sphę ræ æqualem, altitudinem uero semidiametrũ sphæræ. Conus igitur iste est æqualis sphæræ. nam sphæra ostensa est quadrupla esse coni basem habentis maximũ in sphæra circulum, altitudinem autem semidiametrum sphæræ. Sed & conus n

est quadruplus eiusdem coni, cum basis sit quadrupla basis. Nam superficies sphæ ræ quadrupla est maximi in ea circuli, & altitudo altitudini æqualis. & quoniam sicut utrũq; simul h a, a e ad a e, sic d e ad e c, disiũgendo & permutatim argumentabimur, sicut h c ad c d, ita a e ad e c. Rursus quoniã sicut k e ad e a, sic utraque simul h c, c e ad c e disiungendo, & permutatim sicut k a ad c h, hoc est ad h a, sic a e ad e c: hoc est h c ad c d. & coniungendo. æqualis est autem a h, h c. Sicut ergo k h ad h c, sit h d ad d c. & sic tota k d ad d h, ut d h ad d c, hoc est k h ad h a. quod continetur igitur sub d k, h a, æquatur ei quod sub d h k cõtinetur. rursus quoniã est sicut k h ad h c, sic h d ad c d, & permutatim. at uero sicut h c ad c d ostẽsum est, sic esse a e ad e c. sicut igitur k h ad a h, sic a e ad e c. quare & sicut quadratum k d, ad id quod continetur sub k h, h d: sic quadratum a c ad id quod continetur sub a e, e c. quod continetur uero sub k h, h d, ostensum est æquale esse ei quod sub k d a h continetur. Sicut igitur quadratum k d ad id quod continetur sub k d a h, hoc est k d ad a h: sic quadratum a c, ad id quod sub a e, e c continetur, hoc est ad quadratum e b. & a c, æqualis est semidiametro circuli n. sicut ergo quadratum semidiametri n circuli ad quadratum b e, hoc est n circulus ad circulum circa b f diametrum conuolutum: sic k d ad a h: hoc est k d ad altitudinem coni n. Conus igitur n, hoc est sphæra, æqualis est b d f k solido rhombo. Vel sic. est igitur sicut circulus n ad circulum circa b f diametrum constitutum, sic d k ad altitudinem coni n. Conus igitur n æqualis est cono, cuius basis sit circulus circa b f diametrum constans, altitudo d k. eorũ enim bases suis altitudinibus sunt in proportione mutuæ. sed talis conus æqualis est b k f d solido rhombo. quare conus quoq; n, hoc est sphæra, æquatur b f k d solido rhombo, ex conis b d f & b k f composito. quorum b d f conus ostensus est esse æqualis b c f portioni sphæræ: reliquus igitur b k f conus erit necessariò æqualis b a f reliquæ portioni sphæræ.

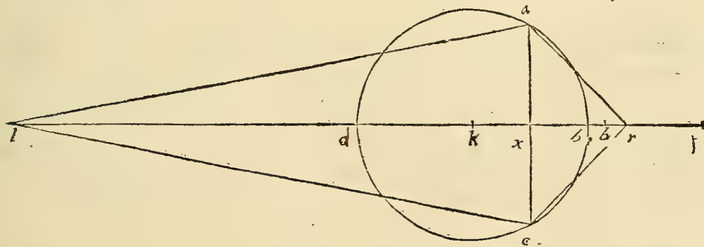
Datam

DAtam sphæram sic secare plana superficie, ut portionū superficies inter se si 3
milē cuicūq; proportioni datæ retineant proportionē. Vt hoc exequamur,
esto hoc factū esse. & sit maximus in sphęra circulus a d b e, diametros eius a b, &
emittatur plana superficies ad a b secūdum angulos rectos, & fiat à plana superfi
cie in a d b e circulo sectio d e, & iungantur lineæ a d, b d. Quoniā itaq; proportio
data est superficiei d a e portionis, ad
superficiem d b e portionis: & super-
ficiei portionis d a e æqualis est circu-
lus, cuius semidiametros æqualis est
ipsi a d: superficiei autem portionis d
b e, æqualis est circulus, cuius semi-
diametrus est æqualis ipsi b d. Sicut
autem dicti circuli inter se, sic quadra-
tum a d ad quadratum d b: hoc est, a c
ad c b. Proportio igitur quæ est a c ad
c b, erit data proportio. quare c pun-
ctum datum erit, & super a b ad an-
gulos rectos erecta est linea d e. ergo
& plana superficies, quæ est secundū



d e, erecta stabit similiter. Cōficietur autem sic. Esto sphæra, & maximus in ea cir-
culus a b d e, cuius diametros a b. proportio autem data sit f ad g, & diuidatur a b
ad punctum c. diuidatur sphæra à plano ad angulos rectos super a b linea recta
constituto, & sit communis sectio d e, & iungantur a d, d b. & exponantur duo
circuli h k: circulus h æqualem habens semidiametrum ipsi a d, circulus uero k
æqualem semidiametrum ipsi d b habens. Est igitur h circulus æqualis superfi-
ciei d a e portionis, k uero æqualis superficiei d b e portionis. Hoc enim ante de-
monstratū est in primo libro. & quoniam data est superficies quæ sub a b d conti
netur, & c d perpēdicularis existit, erit ut a c ad c b, hoc est f ad g, sic quadratum a d
ad quadratum d b: hoc est quadratum semidiametri h circuli, ad quadratum semi
diametri k circuli: hoc est h circulus ad k circulū. hoc item est superficies d a e por-
tionis, ad superficiem d b e portionis sphæræ.

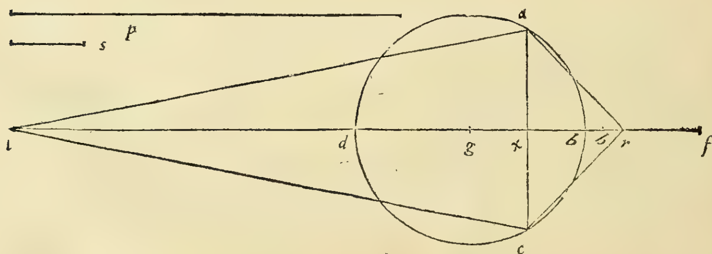
DAtam sphæram sic secare, ut portiones sphæræ inter se eandem habeant 4
proportionem ei, quęcunq; data sit proportioni. Esto data sphæra a b c d,
oportet eam plano secare, sic ut ipsæ sphæræ portiones inter se habeant propor-



tionem datam. Diuidatur itaq; secundū a c à plano. proportio igitur a d c portio-
nis, ad a b c portionem sphæræ est data. diuidatur autem sphæra per centrum, &
sit sectio maximus circulus a b c d, centrum autem k, & diametros d b. & fiat, ut si-
cut utraq; simul k d, d x ad d x, sic r x ad x b. Sicut autem utraq; simul k b, b x ad

b x, sic l x ad x d: & iungantur a l, l c, a r, r c. conus igitur a l c, est æqualis a d c portioni sphæræ, a r c uero ipsi a b c. Proportio igitur a l c coni ad a r c conum est data. Sicut autem conus ad conum, sic l x ad x r, cum eandem basem habeant, circulum qui est circa a c diametrum conuolutus. Proportio igitur etiam l x ad x r est data, & iam eadem sequuntur, quæ prius propter apparatum sicut l d ad k d, sic k b ad b r, & d x ad x b. & quoniam est sicut r b ad b k, ita k d ad l d coniungendo sicut r k ad k b, hoc est ad k d, sic k l ad l d. Tota igitur r l ad totam k l est, sicut k l ad l d. quod igitur sub r l, l d cõtinetur, æquatur quadrato l k. Sicut igitur r l ad l d, sic quadratum k l ad quadratum l d. & quoniam est sicut l d ad d k, sic d x ad x b: erit etiam è conuerso & iungendo, sicut k l ad l d, sic b d ad d x. sicut igitur quadratum k l ad quadratum l d, sic quadratum b d ad quadratum d x. Rursus quoniam est sicut l x ad d x, sic utraq; simul k b, b x, ad b x. disiungendo erit sicut l d ad d x, ita k b ad b x. & ponatur b f æqualis ipsi k b. quod autẽ f extra r cadet, manifestũ est. & est sicut l d ad d x, ita f b ad b x. quare & sicut d l ad l x, sic b f ad f x. Cum autem proportio r x ad l x sit data, erit etiam r l ad l x proportio data. Quoniam igitur proportio r l ad l x componitur ex proportione quam r l habet ad l d, & d l ad l x. uerũ sicut r l ad l d, sic quadratum d b ad quadratum d x. sicut autem d l ad l x, sic b f ad f x. igitur proportio r l ad l x coniungitur ex proportione, quam habet quadratũ b d ad quadratũ d x, & ex b f ad f x. Fiat autem sicut r l ad l x, sic b f ad f h. Proportio autẽ r l ad l x erat data: quare & proportio b f ad f h erit data. Linea uero b f est data, nam est æqualis semidiametro: igitur & f h linea data erit, & proportio b f ad f h componitur ex proportione quadrati b d ad quadratum d x, & ex b f ad f x. sed b f ad f h proportio componitur ex proportione b f ad f x, & ex f x ad f h. sublata cõmuni, quę est b f ad f x: reliquum erit igitur, sicut quadratum b d quod est datum ad quadratum d x, sic x f ad f h quod est datum. & est f d linea data iuxta datã d b, quam diuidere oportet secundum x, & facere ut x f ad f h datam sit sicut quadratum b d datum ad quadratum d x. Hoc autem non habet determinationem simpliciter dictam, sed ijs quæ istic requiruntur positis: hoc est posito hoc, duplam esse d b ipsius b f, & hoc, maiorem esse f h quàm h b, tanquam per resolutionem, nõ habet determinationem. Problema uero tale est. Datis duabus lineis rectis d b, b f, quarũ d b sit dupla ipsius b f, & signo h in b f posito, diuidere ipsam d b in puncto x, & facere quod sicut quadratum b d ad quadratum d x, sic f x ad f h. Vtraq; uero hæc in fine resoluentur & componentur.

Componitur autem problema hoc modo. Esto data proportio, quam p maior habeat ad s minorem, & detur quædam sphæra, & diuidatur plano per cen-

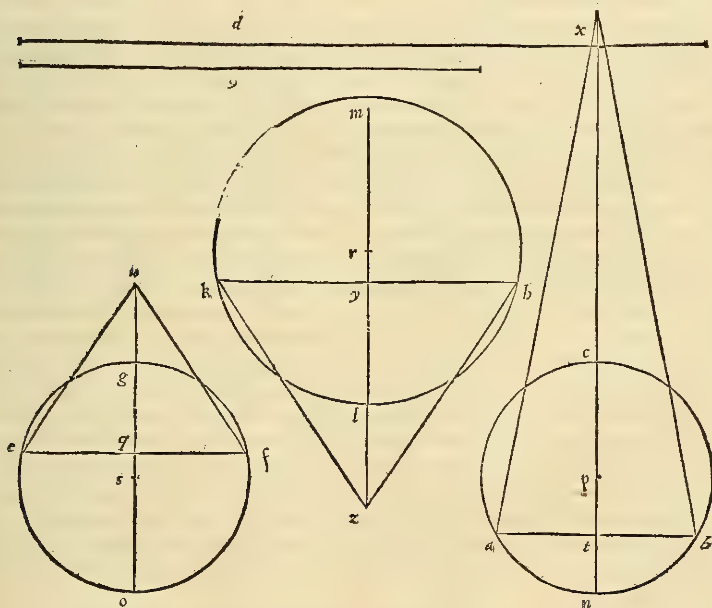


trum ducto, & sit sectio a b c d circulus, cuius diametros sit b d, centrum k, & ipsi k b ponatur æqualis b f, & diuidatur b f in puncto h, ita ut sit h f ad h b, sicut p ad

s. &

s. & etiam diuidatur b d in puncto x, ita ut sit x f ad h f, sicut quadratũ b d ad quadratũ d x. Et per punctum x educatur planum, erectũ super b d secundũ angulos rectos. Dico itaq;, quod planũ illud diuidit spheram, ita ut maior portio ad minorem sic se habeat, uti p ad s. Factũ sit enim, ut sicut utraq; simul k b, b x ad b x, sic l x ad d x. Sicut aũt utraq; simul k d, d x ad x d, ita r x ad x b. Et iungantur a l, l c, a r, r c. est igitur secundũ apparatum ita, sicut in resolutione ostendimus, id quod sub r l, l d continetur, æquale quadrato l k: & sicut k l ad l d, ita b d ad d x. Quare sicut quadratum k l ad quadratum l d, sic quadratum b d ad quadratum d x. & quia id quod sub r l, l d continetur, est æquale quadrato l k, erit sicut r l ad l d, ita quadratum l k ad quadratum l d. erit igitur, & sicut r l ad l d, sic quadratum b d ad quadratum d x: hoc est, x f ad f h. & quoniam sicut utraq; simul k b, b x ad b x, sic l x ad x d. æqualis est autẽ k b ipsi b f, erit igitur & sic f x ad x b, sicut l x ad x d. & euertẽdo, sicut x f ad f b, ita x l ad l d. quare & sicut l d ad l x, sic b f ad f x. & quoniam est sicut r l ad l d, sic f x ad f h. sicut autem d l ad l x, sic b f ad f x. & per æquale in proportionalitate indirecta, sicut r l ad l x, ita b f ad f h. sicut ergo l x ad x r, sic f h ad h b. sicut autem f h ad h b, sic p ad s. quare sicut l x ad x r: hoc est, a l c conus ad a r c conum: hoc est a d c portio sphæræ, ad a b c portionem sphæræ, sic p ad s.

DAtis duabus sphæræ portionibus, tertiam constituere portionem, quæ alteri earum quæ datæ sunt similis sit, alteri uero æqualis. Esto duæ portiones sphæræ datæ a b c, e f g: & sit basis ipsius portionis a b c, circulus circa diametrum 5



a b constitutus: eius uero uertex sit c pũctum: basis uero e f g, sit circulus circa diametrum e f constans: uertex g punctũ. Oportet itaq; portionem sphæræ inuenire, quæ sit æqualis ipsi a b c portioni, & ipsi e f g similis. Esto inuenta sit, & ponatur esse h k, & sit eius basis circulus circa h k diametrum conuolutus, uertex uero l punctum. Sint etiam circuli in sphæris a n b c, h m k l, e o f g: diametri uero eorũ

ad

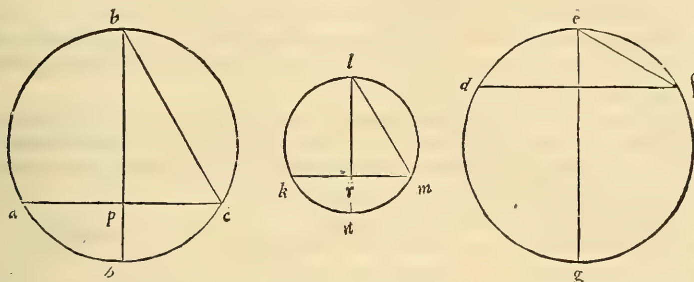
ad angulos rectos basibus portionum instituti sint c n, l m, g o. & sint centra p, r, s. & factum sit sic, ut utraq; simul p n, n t ad n t, ita x t ad t c. sicut autē utraq; simul r m, m y ad m y, sic z y ad y l. & sicut utraq; simul s o, o q ad o q, sic u q ad q g. et intelligantur coni, quorum bases sint circuli circa diametros a b, h k, c f constituti, uertices uero x z u puncta. conus itaq; a b x, æquat̄ portioni a b c sphæræ. conus uero h z k, æquatur ipsi h k l. conus demum e u f, æquatur ipsi e g f. hoc enim demonstratum est antea. Et quoniam sphæræ portio a c b ęquatur h l k portioni, conus a x b erit æqualis h z k cono. æqualiū autem conorum bases sunt altitudinibus mutuæ. Circulus igitur circa diametrum a b, ad circulum circa diametrum h k, est sicut z y ad x t. sicut autem circulus ad circulum, sic quadratum a b ad quadratum h k. Sicut ergo quadratum a b ad quadratum h k, sic z y ad x t. Et quoniā similis est e f g portio portioni h l k, conus igitur e u f similis est cono z h k. Hoc autem ostendetur. Est igitur sicut u q ad e f, sic z y ad h k. proportio autem ipsius u q ad e f data est: igitur proportio z y ad h k erit data. Esto eadem x t ad d, & x t data est, erit & d data. & quoniam est sicut z y ad x t, hoc est quadratū a b ad quadratū h k, sic h k ad d. Ponatur id quod sub a b & ꝯ continetur, æquale esse quadrato h k, erit igitur quadratum a b ad quadratum h k, sicut a b ad ꝯ. Ostensum est aūt, quod sicut quadratum a b ad quadratū h k, sic h k ad ipsam d: & permutatim, sicut a b ad h k, sic ꝯ ad d. Sicut aūt a b ad h k, sic k h ad ꝯ. propterea quod quadratum h k æquatur ei quod fit ex a b in ꝯ. sicut ergo a b ad h k, ita h k ad ꝯ, & ꝯ ad d. Inter duas igitur datas duæ mediæ in proportione continua sunt positæ: hoc est inter a b & d, sunt h k, & ꝯ.

Componetur autem iam propositum hoc pacto. Esto portio a b c, cui uolumus statuere æqualem portionem. & esto e f g portio, cui similem oportet statuere. & sint maximi in sphæris circuli a b c n, e f g o: quorum diametri sint c n, g o: & centra p, s. & fiat, ut sicut utraq; simul p n, n t ad n t, sic x t ad t c. sicut aūt utraq; simul s o, o q ad o q, sic u q ad q g. conus igit̄ x a b, est ęqualis portioni a b c sphęræ. conus uero f u e, æquat̄ portioni e g f. fiat sicut u q ad e f, sic x t ad d. & inter duas lineas rectas datas a b, & d duæ mediæ in continua proportione sumantur h k & ꝯ: ita ut sicut a b ad h k, ita h k ad ꝯ, & ꝯ ad d. & similiter h k circulo portio statuatur h l k, similis e f g portioni circuli, & perficiatur circulus, & sit eius diametros l m, & intelligatur sphæra cuius maximus circulus sit l h m k, centrū r. & secūdum h k planum transeat erectum ad angulos rectos super l m, erit iam portio sphæræ uersus l similis e f g portioni sphæræ, cum circulorum portiones sint similes. Dico autem, quod etiam est æqualis a b c portioni sphæræ. fiat enim sicut utraq; simul r m, m y ad m y, sic z y ad y l. igitur conus z h k, æquatur portioni sphæræ h k l. & quoniam conus z h k similis est cono f u e, est ergo sicut u q ad e f, hoc est x t ad d, sicut z y ad h k: & permutatim, & conuersim. sicut igitur z y ad x t, sic h k ad d. Cum autem proportionales sint a b, h k, ꝯ, d erit sicut quadratum a b ad quadratum h k, sic h k ad d. sicut autem h k ad d, sic z y ad x t. ergo sicut quadratū a b ad quadratum h k, hoc est circulus circa diametrum a b constitutum, ad circulum circa diametrū h k cōstantem, sic z y ad x t. conus igitur a x b æquatur cono h z k. quare & a b c portio sphæræ est æqualis h k l portioni sphæræ. Igitur a b c portioni datæ æqualem constituimus h l k portionem sphæræ, quæ etiam alteri e f g similis existit.

6 DVabus portionibus, siue eiusdem siue non eiusdem sphæræ datis, tertiam inuenire sphæræ portionem, quæ quidem alteri datarum portionum sit similis, superficiem uero habeat alterius portionis superficiei æqualem. Sint sphæricæ portiones secundum a b c, d e f circumferentias sumptæ. & esto portio, cui similem inuenire oporteat secundum a b c circumferētiam sumpta. ea uero cuius superficies æqualis esse debeat superficiei portionis inueniendæ, sit secundum

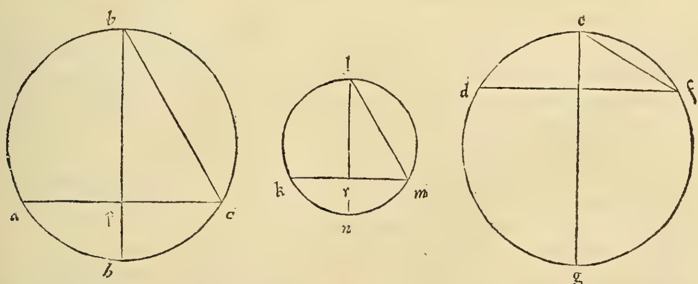
d e f

d e f circumferentiam. & ponatur factũ quod quæritur, & esto k l m portio sphæræ ipsi a b c portioni similis. superficiem quoq; habeat superficiei d e f portionis æqualem: & intelligantur centra sphærarum, & per ea transeãt plana erecta per-



pendiculariter super bases portionum. & in sphæris quidem sint sectiones hæ k l m n, a b c h, e f g d maximi circuli, & in basibus portionum sint k m, a c, d f diametri. sphærarum uero diametri sint super k m, a c, d f perpendiculariter erectæ. sintque l n, b h, e g: & coniungantur l m, b c, e f. & quoniam superficies portionis sphæræ k l m æqualis est superficiei d e f portionis, æqualis erit ergo circulus cuius semidiametros sit ipsi l m æqualis, circulo cuius semidiametros sit æqualis e f. Superficies enim dictarum portionũ ostensæ sunt esse æquales circulis, quorum semidiametri sint æquales lineis, quæ à uerticibus portionum ad bases earum deducantur. Quapropter l m erit æqualis e f. Cum autem k l m sit similis portioni a b c, erit sicut l r ad r n, sic b p ad p h. & cõuersim, & coniungendo, sicut n l ad l r, sic h b ad b p. uerum & sicut r l ad l m, sic b p ad b c. nam trianguli similes existũt. Sicut ergo n l ad l m, hoc est ad e f, sic h b ad b c: & permutatim. proportio uero e f ad b c est data. nam utraq; earum est data. igitur proportio l n ad b h data erit. sed b h est data: quare & l n, & sphæram quoq; datam esse necesse est.

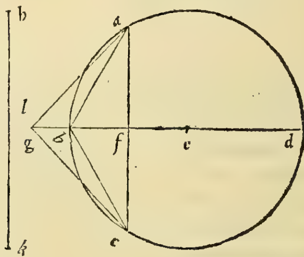
Componetur autem propositum hoc modo. Sunto duæ portiones sphæræ datæ a b c, d e f. & sit a b c, cui similem d e f, cuius superficiei æqualem oporteat constituere superficiem, & eadem parentur omnia, quæ in resolutione parata fuerunt.



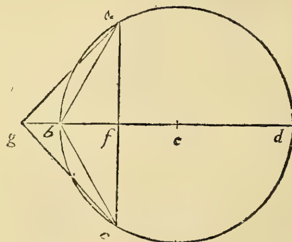
runt. & fiat, sicut b c ad e f, sic b h ad l n. & circa diametrum l n describatur circulus, & intelligatur sphæra cuius sit maximus circulus l k n m. & diuidatur n l in puncto r, ita ut sit sicut h b ad b p, sic n l ad l r. & secundum r diuidatur superficies plano super l n perpẽdiculariter erecto, & ducatur linea l m. portiones igitur circulorum, quæ sunt super k m, a c lineas rectas, sunt inter se similes: quare & sua

rum sphærarum portiones similes erunt. & quoniam est sicut h b ad b p, sic n l ad l r. etenim sunt secundum diuisionem. Sed & sicut b p ad b c, sic r l ad l m. ergo & sicut h b ad n l, sic b c ad e f. erit igitur e f ipsi l m æqualis: quare & circulus cuius semidiametros est e f, æquabitur circulo cuius semidiametros est l m. & circulus quidem cuius semidiametros est e f, æquatur superficiei portionis d e f. circulus autem cuius semidiametros est l m, æquatur superficiei portionis k l m. hoc enim in primo libro fuit ostensum. Superficies igitur k l m portionis sphæræ, similis est a b c, & æqualis superficiei d e f.

7 A Data sphæra portionem plano sic abscindere, ut ipsa portio eã quæ proposita sit proportionem seruet ad conum, qui basim habeat eandem cum portione, & altitudinem æqualem. Esto iam data sphæra, & maximus in ea circulus a b c d, diametros eius b d: oportet iam sphæram plano secare ipso a c, ita ut sit a b c portionis sphęræ ad conum a b c, proportio eadem proportioni datæ. Factum sit hoc, & sit centrum sphæræ e, & sit sicut utraq; simul e d, d f ad d f, sic g f ad f b. conus igitur a c g est æqualis portioni a b c. Proportio igitur coni a g c, ad conum a b c est data. quare & proportio g f ad f b data erit. Sicut autem f g ad f b, sic utraq; simul e d, d f ad d f. igitur proportio utriusque simul e d, d f ad d f est data: quare et e d ad d f data, quare & d f data erit. similiter a c data. & quoniam utraq; simul e d, d f ad d f maiorem habet proportionẽ quàm utraq; simul e d, d b ad d b, & est utraq; simul e d, d b ter ipsa e d. ipsa uero b d, bis e d: habebit utraque simul e d, d f ad d f maiorem proportionẽ, quàm sicut tria ad duo. proportio uero utriusq; simul e d, d f ad d f, est eadem proportioni datæ. Oportet igitur proportionem datam in compositione maiorem esse quàm tria ad duo.

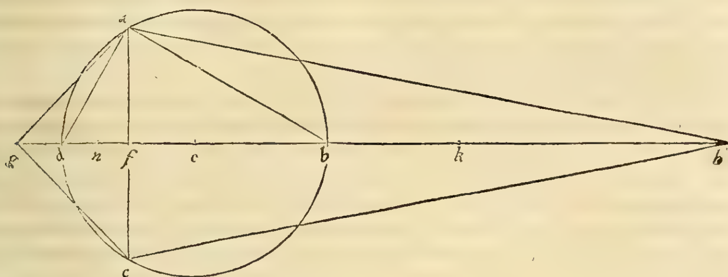


Componetur autem propositum hoc pacto. Esto data sphæra, & maximus in ea circulus a b c d, diametros uero b d, centrum e. proportio autem data sit h k ad k l, maior scilicet quàm tria ad duo. sicut autem tria ad duo, sic utraq; simul e d, d b, ad d b. & ideo h k ad k l maiorem habet proportionẽ, quàm utraq; simul e d, d b ad d b. diuidendo igitur h l ad l k maiorem proportionẽ habet, quàm e d ad d b. & fiat sicut h l ad l k, sic e d ad d f, & per ipsum f perpendicularis a f c ipsi b d ducatur, & per lineam a c ducatur planum ad b d perpẽdiculare. Dico igitur, quod a b c portio sphæræ ad a b c conum, habet eandem proportionem datæ proportioni h k ad k l. Factum sit enim, quod sicut utraq; simul e d, d f ad d f, sic g f ad f b. conus igitur c a g, æquatur portioni sphæræ a b c. & quoniam est sicut h k ad k l, sic utraque simul e d, d f ad d f: hoc est g f ad f b, hoc est a g c conus ad a b c conum. conus uero a g c æquatur portioni sphæræ. Sicut igitur a b c portio ad a b c conum, sic h k ad k l.



8 SI sphæra quæuis à plano non per centrum ducto secetur, maior portio ad minorem habere probatur proportionem minorem, quàm sit ea proportio duplicata, quam habet superficies maioris ad superficiem minoris portionis, maiorẽ uero

uero quàm sit proportio, quæ sit sesquialtera ad dictam proportionem. Esto sphæra, & maximus in ea circulus a b c, & diametros b d. & secet plano per a c ducto, & erecto super a b c d circulo, & sit maior sphæræ portio a b c. Dico itaque, quod

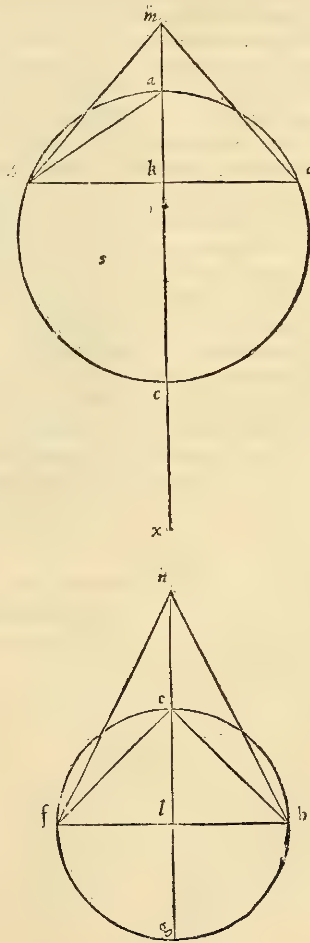


portio a b c ad a d e portionem, minorem habet proportionem, quàm sit ea proportio duplicata, quam habet superficies maioris portionis ad superficiem minoris. maiorem uero quàm sit proportio sesquialtera ad eandem. Iungantur b a, a d: & sit centrum e, & fiat ut sicut utraque simul e d, d f ad d f, ita h f ad f b. sicut autem utraque simul e b, b f ad b f, sic g f ad f d. & intelligantur coni basem habentes circulum, qui est circa diametrum a c: uertices uero puncta h, g. & conus a h c, æqualis erit portioni sphæræ a b c. conus uero a c g, ipsi a d c æqualis. & est sicut quadrati b a ad quadratum a d, sic superficies portionis a b c ad superficiem a d c portionis. hoc enim antea scriptũ est. Ostendendum, quòd maior portio sphæræ ad minorẽ habet minorẽ proportionem, quàm sit ea proportio duplicata, quam superficies maioris portionis habet ad superficiẽ minoris portionis. Dico quòd a h c conus, ad a g c conũ, hoc est f h ad f g, habet minorem proportionẽ, quàm est illa duplicata, quam habet quadratum b a ad quadratum a d, hoc est b f ad f d. Et quoniam est sicut utraque simul e d, d f ad d f, sic h f ad f b. sicut autem utraque simul e b, b f ad b f, sic f g ad f d: erit & sicut b f ad f d, ita h b ad b e. nam b e est æqualis ipsi d e. hoc enim in superioribus simul ostensum fuit. Rursus quoniam sicut utraque simul e b, b f ad b f, sic g f ad f d. Esto ipsi b e æqualis b k. manifestum nãque est, quòd h b est maior b e: quoniam & b f maior est f d. & erit sicut k f ad f b, sic g f ad f d. sicut autem f b ad f d, ita ostensum est esse h b ad b e. æquatur autem b e ipsi k b. sicut ergo h b ad b k, sic k f ad f g. Et quoniã h f ad f k minorem proportionem habet, quàm h b ad b k: sicut autem h b ad b k, ostensum est ita esse k f ad f g. igitur h f ad f k minorem habet proportionem, quàm k f ad f g. minus ergo est quod continetur sub h f, f g, quadrato f k. Id igitur quod cõtinetur sub h f, f g, ad quadratum f g minorem habet proportionem, quàm quadratum k f ad quadratum f g. Quadratum uero k f ad quadratum f g, habet eam proportionem duplicatam, quæ est k f ad f g. igitur h f ad f g minorem proportionem habet, quàm est ea duplicata quæ est k f ad f g. Hoc autem est quod quærebamus. Et quoniam b e est æqualis ipsi d e, minus est igitur id quod sub b f, f d cõtinetur, eo quod sub b e, e d continetur. ergo f b ad b e minorem habet proportionem, quàm e d, ad d f, hoc est h b ad b f. quadratum igitur f b, minus est eo quod fit ex h b in b e. Sit itaque quadratum b n æquale ei quod sub h b, b e. est igitur sicut h b ad b k, sic quadratum h n ad quadratum n k. quadratum autem h f ad quadratum f k maiorem habet proportionem, quàm quadratum h n ad quadratum n k. quadratum ergo h f, ad quadratũ f k maiorem proportionẽ habet, quàm h b ad b k, hoc est, quàm h b ad b e. Hoc

idem eſt, quàm k f ad f g. ergo h f ad f g maiorem habet proportionem, quàm ſit ſeſquialtera ad proportionem k f ad f g. hoc enim perficit quod intendimus. et eſt ſicut h f ad f g, ſic a h c conus ad a g c conum: hoc eſt portio a b c ad portionē a d c. ſicut autem k f ad f g, ſic b f ad f d: hoc eſt quadratum b a ad quadratum a d: hoc idem eſt ſicut ſuperficies portionis a b c a d ſuperficiē a d portionis. ſed maior portio ad minorem habet minorem proportionem, quàm ſit ea duplicata, quam habet ſuperficies maioris portionis ad ſuperficiem minoris portionis, maiorem uero quàm ſit proportio ſeſquialtera ad eandem.

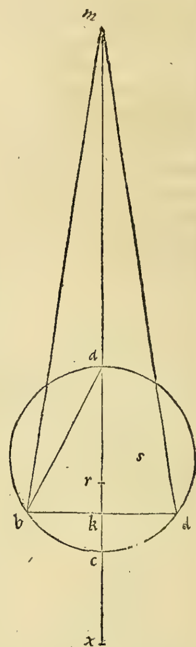
Aliter. Eſto ſphæra, & maximus in ea circulus a b c d, diametros autem a c, centrum uero e. & ſecetur plano ſecundum b d erecto ſuper a c. Dico quod maior portio d a b, ad minorem b c d, habet minorem proportionem quàm ſit ea duplicata, quam habet ſuperficies a d b portionis ad ſuperficiem b c d portionis: maiorem uero quàm ſit proportio ſeſquialtera ad eandem. Iungantur enim a b, b c. Proportio autem ſuperficiei ad ſuperficiem eſt, ſicut circuli, cuius eſt ſemidiametros a b, ad circulum cuius ſemidiameter eſt b c. hoc eſt h a ad a c. ponatur autem utraqꝫ a f, c g eſſe æqualis ipſi ſemidiametro. proportio autem b a d, portionis ad b c d, componitur ex proportione b a d portionis ad conum, cuius baſis ſit circulus circa b d diametrū deſcriptus, uertex uero a punctum: & ea quam habet idem conus ad conum habentem eandē baſem, uerticem uero c punctū: & ex ea quam habet dictus conus ad b c d portionem. ſed proportio b a d, portionis ad b a d conū eſt, ſicut g h ad h c. coni uero ad conum eſt ſicut a h ad h c. coni autem b c d ad portionem b c d, eſt ſicut a h ad h f. At uero proportio cōpoſita ex proportione g h ad h c, & ex a h ad h c, eſt ſicut eius quod fit ex g h in a h, ad quadratum h c. eius autem quod fit ex g h in a h ad quadratum h c, cum ea quæ eſt a h ad h f, eſt ſicut ea quæ eſt eius quod fit ex g h, in quadratum h a, ad quadratū h c in h f. proportio aūt eius quod fit ex g h in quadratū h a, ad id quod fit ex quadrato h c in g h, eſt ſicut quadratum h a ad quadratum h c. quod igitur fit ex quadrato h a in h g, ad id quod fit ex quadrato c h in h f, minorem proportionē habet, quàm proportio quadrati a h ad quadratum h c. Quoniam enim eſt maius quadratū c h in f h, quàm quadratum c h in h g: quoniam maior eſt h f ipſa h g. Dico igitur, quod maior portio habet ad minorem proportionem, maiorem quàm ſeſquialteram proportioni ſuperficiei ad ſuperficiem. Portio enim ad portionem oſtenſa eſt habere eam proportionem, quam habet quadratum a h, ductum in h g, ad quadratum h c in h f. proportioni autem ſuperficierū ſeſquialtera eſt proportio cubi a b, ad cubum b c. Dico iam, quòd quadratum a h in h g, ad quadratū c h in h f maiorem habet proportionē, quàm cubus a b ad cubum b c: hoc eſt cubus a h ad cubum h b, hoc eſt quadrati a h ad quadratum h b, et a h ad h b. proportio autem quadrati a h ad quadratum b h, aſſumens ſimul proportionem a h ad h b, eſt ſicut quadrati a h, ad id quod fit ex c h in h b. proportio autē quadrati a h, ad id quod fit ex h b in b c, eſt ſicut quadrati a h in h g, ad id quod fit ex h b in h c, ductum in h g. Dico iam quòd quadratū a h, in h g, ad quadratum c h in h f maiorem proportionē habet, quàm quadratum a h, ad id quod fit ex b h in h c: hoc eſt quadratum a h in h g, ad id quod continetur ſub b h, h c, ductū in h g. Eſt igitur oſten-

oſtendēdum, quod quadratum h c in h f minus producit, quàm id quod ſub b h, h c continetur, ductum in g h. quod idem eſt ac ſi demonſtremus, quòd quadratũ h c ad id quod ſub b h, h c cõtinetur, minorem habet proportionem quàm g h ad h f. Oportet itaque oſtendere, quod g h ad h f maiorem habet proportionē, quàm c h ad h b. Ducatur ab ipſo b perpendicularis ſuper ipſam g f, quæ ſit b d. oportet itaq; oſtendere, quòd g h ad h f maiorem proportionem habet, quàm c h ad h b. Eſt autem h f æqualis utriq; ſimul a h, k e. quare oſtēdere oportet, quòd g h ad h f, hoc eſt ad utrãq; ſimul h a, k e maiorem habet proportionē, quàm c h ad h b. ſublata igit̃ c h ab ipſa g h, & ab ipſa k e ſublata e l, æquali b h oportebit oſtēdere, quòd reliqua c g ad reliquam utramq; ſimul a h, k l maiorem habet proportionē, quàm c h ad h b, hoc eſt h b ad h a, hoc eſt l e ad h a, & permutatim, quòd k e ad e l maiorem habet proportionem, quàm utraque ſimul k l, h a ad h a: & diuidendo k l ad l e habet maiorem proportionem, quàm k l ad h a. quare minor eſt l e, quàm h a.



EArum ſphæræ portionum, quæ æqualibus ſuperficiebus continentur, medietas ſphæræ maxima exiſtit. Eſto maximus in ſphæra circulus a b c d, cuius diameter a c. Et eſto alia ſphæra, cuius maximus circulus e f g h: eius diameter e g. & ſecentur ambæ plano, altera per centrum ducto, altera non per centrum ducto. & ſint plana ſecantia erecta ſuper diametros a c, e g: & ſectæ ſint ſecundum lineas d b, f h. Eſt igitur portio ſub f e h ſuperficie cõtenta, dimidia ſphęra: portionũ uero quæ ſecundum b a d circumferentiam habentur in alia figura, ad a punctum, altera eſt maior dimidia ſphæra, altera in alia figura minor dimidia ſphęra. Eſto aũt ſuperficies maioris portiõis unius ſphęræ ſuperficiei dimidiæ ſphęræ æqualis, quæ eſt ad circumferentiam f e h. Dico igitur, quod maior eſt dimidia ſphæra, quæ eſt ad circumferentiam f e h, quàm portio quæ eſt ſecundum b a d circumferentiam. Quoniam igitur ſuperficies dictarum portionũ poſitæ ſunt æquales, manifeſtũ eſt quod b a linea recta eſt æqualis e f rectæ. nam oſtenſum eſt, quod cuiuſcunq; portionis ſphæræ ſuperficies æqualis ſit circulo, cuius ſemidiametros ſit æqualis lineę rectæ, ductæ à uertice portionis ad circumferentiam circuli, qui eſt baſis portionis. Et quoniam b a d circumferentia maior eſt dimidio circulo in altera figura, in qua eſt s pũctum: manifeſtum igitur eſt, quod b a minor eſt quàm dupla in potētia ipſius a k, ſemidiametro autem maior quàm dupla in potentia. Eſto etiam quòd c x ſit æqualis ſemidiametro circuli a b d, & quã pro 9

portionem habet c x ad c k, hanc habeat m a ad a k. A circulo uero circa diametrum b d descripto, erigatur conus, cuius uertex m punctum. conus igitur iste æquatur portioni sphæræ, quæ est ad circumferentiam b a d. Esto ipsi e l æqualis ipsa e n, & à circulo circa diametrum h f constituto erigatur conus, cuius uertex sit punctum n. & iste quoque æqualis est dimidiæ sphæræ, quæ est secundum h e f circumferentiam. id autem quod continetur sub a r, r c, maius est contento sub a k, k c: propterea quod habet latus minus suum minore latere alterius maius. quadrato uero a r æquatur id quod continetur sub a k, c x. nam dimidium est quadrati a b. igitur utrumque simul est maius utroque simul. Quod igitur continetur sub c a, a r, maius est contento sub x k, k a. Ei uero quod continetur sub x k, k a, æquatur id quod continetur sub m k, k c. quare quod continetur sub c a, a r, maius est eo quod continetur sub m k, k c. quare maiorem habet proportionem c a ad k c, quàm m k ad a r. quam uero proportionem habet a c ad k c, eãdem quadratum a b ad quadratum b k. Manifestum igitur, quod dimidium quadrati a b, quod est æquale quadrato a r, ad quadratum b k maiorem habet, quàm m k ad duplam ipsius a r, quæ æquatur lineæ l n. maiorem ergo proportionem habet circulus circa diametrum h f constitutus, ad circulum circa diametrum b d descriptum, quàm m k ad l n. quare minor est conus, qui basem habet circulum circa diametrum h f constantem, uerticem uero n punctum, eo cono qui habet basem circulum circa b d constitutum, uerticem autem m punctum. Vnde manifestum quoque, dimidiam sphæram, quæ secundum e f h circumferentiam constat, maiorem esse portione, quæ secundum b a d circumferentiam posita est.



ARCHIMEDIS DE SPHAERA ET Cylindro Libri secundi Finis.

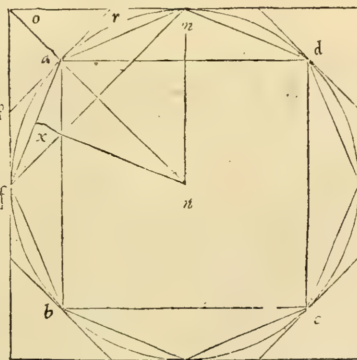
ARCHI-

ARCHIMEDIS CIRCVLI DIMENSIO.



QVILIBET circulus triangulo rectangulo æqualis eſt, illi uidelicet cuius latus alterum eorum quæ rectum angulum 1 ambiunt, ſit dicti circuli ſemidiametro æqualis, alterum eiuſdem circuli circumferentiæ. Eſto a b c d circulus, ſic habeat ſicut proponitur. Dico, quod æqualis eſt e triangulo. Et ſi fieri poteſt, eſto circulus dicto triangulo maior, & inſcribatur circulo quadratum a c, & diuidantur arcus per æqualia, ducanturq; ad puncta diuiſionum lineæ rectæ, fiantq; hoc modo intra circulum figuræ rectilineę, donec inciderimus in aliquam figuram rectilineã, quæ ſit maior dicto triangulo: & ponatur centrum n. & ſit ſuper unum latus figuræ perpendicularis n x. igitur n x eſt minor latere trianguli. Eſt etiam linea claudens figuram, minor reliqua trianguli linea, cum ſit minor circuli limbo. Dicta igitur figura minor eſt dicto triangulo: quod quidem abſurdum eſt. Eſto item ſi fieri poteſt, ſit triangulo circulus minor, & circulo circumſcribatur quadratum, & arcus inter puncta cõtingentiæ circuli interclusi in æqua diuidantur, & per puncta diuiſionum ducantur lineę contingentes. rectus igitur angulus à lineis o a r ambitur, quare o r erit maior r m. nã r m, r a ſunt æquales, & triãgulus r o p eſt maior figura o f a m quàm dimidium: quare & maior dimidio eius partis quadrati circulo circumſcripti, quæ eſt ex parte o. Sumptæ ſint itaq; portiones ſimiles ipſi p f a, quæ ſint minores eo, quo triangulus e ſuperat circulum a b c d: atque idcirco ipſa quoque figura rectilinea circulo circumſcripta, minor erit triangulo e. quod item abſurdum eſt. nam maior eſſe probatur: quia n a æqualis eſt perpendiculari trianguli, limbus uero dictæ figuræ baſe trianguli maior habetur. quare circulus dicto triangulo erit neceſſariò æqualis.

PRoportio circuli cuiuſcũque ad quadratũ ſuæ diametri eſt, ſicut undecim ad quatuordecim. Eſto circulus, cuius diametrus a b & circumſcribatur ei quadratum c g: & ipſa c d dupla ſit d e: ipſius etiam c d, ſit e f pars ſeptima. Quoniam igitur c e ad c d eam habet proportionẽ,



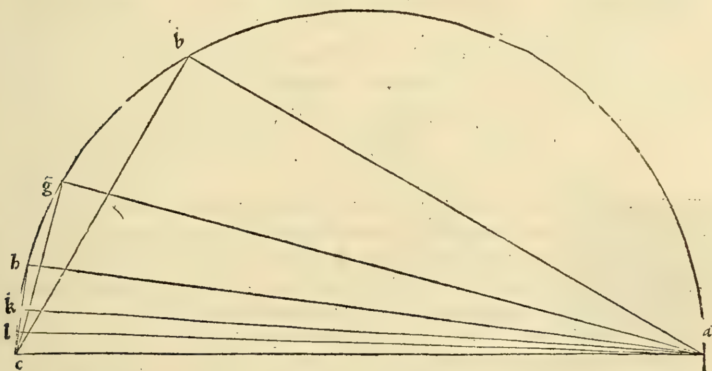
quam uicenum primum ad ſeptenum tenet: i c d uero ad e f etiam, quam ſeptenum

num ad unum. c f igitur ad c d, uti uicenũ secundum ad septenum habebit. Verum ipsius a c d trianguli quadruplum est c g. quadratum & triangulus a c d f est ipsi circulo æqualis, cum c d perpendicularis sit semidiametro æqualis, & basis diametro sit tripla, & propè sesquiseptima, uti ostendetur. Circulus igitur ad quadratum c g proportionem habet eam, quam undenus ad quatuordenum.

3 CViuslibet circuli circumferẽtia suæ diametri est tripla, & plus parte, quæ minor est septima, & maior decem septuagenis primis. Esto circulus, cuius diametrus a c, centrũ e, & c l f circulum cõtingens, angulus qui sub f e c cõtinetur, sit tertia pars recti: & e f ad f c eam proportionẽ habeat, quam trecenti seni ad centum quinquagenos trinos. f c uero ad c e habet proportionem, quam ducenti sexageniquini ad centũ quinquagenos trinos. Diuidatᷣ itaq; angulus f e c, in æqualia, ducta linea e g. Est igitur sicut f e ad e c, ita f g ad g c: & permutatim, & componendo, sicut utraq; simul f e, e c ad f c, ita e c ad c g. quare e c ad c g maiorem habet proportionem, quàm quingenti septuageniprimi ad centum quinquagenos trinos. e g ergo ad g c eam potentia proportionem habet, quam trecenta sex & uiginti milia unũ & quadraginta, ad tria & uiginti milia quadringenta & nouem. longitudine uero sicut quingenta unum & septuaginta ad centum tria & quinquaginta. Rursus secetur in duo æqualia angulus g e c, ducta linea e h. Eadem itaq; ratione e c ad c h maiorem habet proportionem, quàm mille centum duo & sexaginta ad centum tria & quinquaginta. Igitur h e ad h c maiorem habet proportionem, quàm mille centũ septuaginta duo ad centum tria & quinquaginta. Item in duo æqua diuidatur angulus h e c, ducta linea e k. igitᷣ e c ad c k maiorẽ habet

habet proportionē, quàm duo milia trecenta quatuor & triginta & quarta ad centum tria & quinquaginta. ergo e k ad c k maiorem habet, quàm duo milia trecenta nouem & triginta & quarta ad centum tria & quinquaginta. Item in duo æqua diuidatur angulus k e c, ducta linea e l. igitur e c ad l c habet maiorem proportionē, quàm quatuor milia quadringenta tria & septuaginta, ad centum tria & quinquaginta. Quoniam igitur angulus f e g, cum sit tertia pars anguli recti, quater diuisus est in æqualia, erit angulus l e c anguli recti pars quadragesimaoctaua. Ponatur itaq; ipsi angulo l e c æqualis angulus c e m. Angulus ergo l e m erit recti pars uigesimaquarta, quare linea l m est latus figuræ multorum angulorum circa circulum descriptæ, quæ sex & nonaginta lateribus concluditur. Cum igitur sit ostensum, e c habere ad c l maiorem proportionem, quàm quatuor milia sexcēta tria & septuaginta & semis, ad centum tria & quinquaginta. Sed et ipsius e c dupla est a c, ipsius uero l c dupla est l m. habebit ergo a c, ad limbum ipsius figuræ sex & nonaginta laterum, proportionem maiorem, quàm quatuor milia sexcenta tria & septuaginta & semis, ad quatuordecim milia sexcenta & octo & octuaginta. & est tripla, & insuper habens sexcentas septem & sexaginta partes & semis, ipsorum quatuor milium sexcentorum trium & septuaginta & semis: quæ quidem sunt dicti numeri minus septima parte. quare figuræ multorum angulorum circulo circumscriptæ, latera simul iuncta diametro circuli sunt tripla, & insuper partem parte septima diametri minorem habent. Quare multo magis limbus circuli cum sit diametro sua plus quàm triplus, minorem tum parte septima super triplicatam diametrum addet.

Esto item circulus, cuius diametrus a c, angulus uero b a c, sit tertia pars anguli recti. Igitur a b ad b c minorem habet proportionem, quàm trecenta quatuor



& quinquaginta ad septingenta octuaginta. a c uero ad c b habet eam quam mille quingenta sexaginta ad septingenta octuaginta. Secetur in duo æqua b a g, sit æqualis angulo g c b: sed et angulo g a c, & angulus g c b æqualis angulo g a c. & communis est angulus rectus a g c, & tertius angulus g f c erit tertio angulo a c g æqualis. quare triangulus a g c est æquiangulus triangulo c g f. erit ergo sicut a g ad g c, sic g c ad g f, & ita a c ad c f. Verum sicut a c ad c f, ita & utraq; simul c a, a b ad b c. & sicut utraq; simul c a, a b ad b c, sic a g ad g c. Propter hoc itaque a g, ad g c minorem habet proportionem, quàm duo milia nongenta undecim ad septingēta octuaginta, uerum a c ad c g minorem habet proportionem, quàm tria milia

h trede-

tredecim ad ſeptingenta octuaginta. Diuidatur item in duo æqua angulus c a g, ducta linea a h. igitur a h ad h c eadem ratione minorẽ proportionẽ habet quàm quinque milia trecenta quatuor & uiginti & quinta & quarta ad ſeptingenta octuaginta, uel quam mille octingenta quatuor & uiginti ad ducenta quinquaginta. nam utraq; utrinq; quare a c ad c h minor, quàm mille octingenta octo & triginta & nona ad ducenta quadraginta. Item angulus h a c in duo æqua diuidatur

Item k a c angulus diuidatur per lineam a l: ergo a l ad l c minorem habet proportionẽ quàm duo milia ſedecim & ſexta ad ſex & ſexaginta. ipſa uero a c ad c l minorem quàm duo milia decem & ſeptem & quarta, ad centum & ſex & ſexaginta. Conuerſim uero limbus figuræ multorum angulorum ad diametrum maiorem habet proportionem, quàm ſex milia trecenta & unũ & ſexta ad duo milia decem & ſeptem & quartam. Sunt illa duobus milib. decem & ſeptẽ & quarta maiora, q̃ tripla ſuper decies partientia ſeptuageſimas primas. igitur limbus figuræ ſex & nonaginta lateribus concluſæ circulo inſcriptæ, maior eſt diametro circuli, quàm tripla ſuper decies partiens ſeptuageſimas primas. quare multo magis circumferentia circuli maior erit ſua diametro, quàm tripla ſuper decies partiens ſeptuageſimas primas. Vnde colligitur, circuli circumferentiam ſua diametro maiorem eſſe quàm triplam ſeſquioctauã, minorẽ uero quàm triplã ſeſquiſeptimã.

ARCHIMEDIS DE CIRCVLI DImenſione Finis.

ARCHIMEDIS DE CONOIDALIBVS ET SPHAEROIDIBVS figuris inuenta.

ARCHIMEDES DOSITHAEO recte agere.



RELIQVORVM theorematum demonſtrationes, quas in his quæ ſuperius ad te miſſa ſunt uoluminibus, nõ habebas, tibi nunc in hoc libro conſcriptas mitto. Nonnullas pręterea quorundam aliorum, quæ poſtea ſunt inuenta. quæ cũ ſæpe prius in manus adduxiſſem, tentaſſemq; inſpicere & cõtemplari, ueritus ſum maxime, ne difficilem admodum & penitus indeprehenſibilem haberent explicationem. Atque idcirco cum cæteris tibi data non fuerunt ipſa propoſita. Verum poſteaquam ea diligentiori ſtudio inueſtigare cœpiſſem, quæ prius dubia & perobſcura uidebantur, omnia cõpræhendi. Erant autem reliqua quidem priorum theorematum de rectangula figura conoidali propoſita. Quę uero nuperrime ſunt inuẽta circa obtuſianguli figuram conoidalem, & etiam ſphæroidas figuras uerſantur: quarum quaſdam oblongas, quaſdam prolatas libet appellare. De rectangulo itaq; conoidali hæc ſubiecta fuerant.

Si rectanguli coni ſectio quieſcente diametro circumferatur, donec in eũ unde duci cœperat locum redierit figura, quæ à rectanguli coni ſectione cõpræhendetur, conoidale rectangulum uolumus appellari, & eius axem diametrum quieſcentem, uerticem uero punctũ in quo ſuperficiei conoidalis axis applicatur.

Item

Item si conoidalem figuram rectangulam planum contingat, ipsi uero contingenti alterum planum æquedistanter ductum aliquam conoidalis portionẽ abscindat, ipsius portionis basim uocari planũ, quod ab ipsa conoidalis sectione in abscindendo comprehensum sit: uerticem uero, punctũ illud in quo alterum planum conoidale contingit. axem aũt lineam rectam, quæ inter portionem deprehendit̃ à linea recta, quæ à uertice portionis ducta, sit axi conoidalis æquedistãs.

Hæc autem proponebantur consideranda & inspicienda. Cur fiat, quod si conoidalis rectanguli sectio secetur à plano super axem erecto, portio abscisa erit sequialtera cono qui habet basem cum portione eandem, & axem eundem. Rursus quare est, si à conoidali rectangulo duæ portiones à planis utrinq; ductis abscindantur, portiones abscisæ habent inter se, eam quæ est suorum axiũ, proportionem duplicatam.

Circa uero obtusianguli conoidale hæc supposita uolumus. Si in eodem plano sit obtusianguli coni sectio, & eius diametrus & lineæ, quæ sint proximę dicti coni portioni, & quiescente diametro uertatur planum donec redeat ad locum unde cœpit moueri, in quo scilicet plano dictę lineæ existunt, lineæ rectæ quæ sectioni coni obtusianguli proximę sunt, palàm est quod conum comprehendent æquicrurem, cuius uertex punctum erit in quod lineæ quæ proximę sunt cõcurrunt. axis uero diametros immota. Figura uero sub sectione coni obtusianguli comprehensa, conoidale obtusiangulum appelletur. axem autem eius diametrum immotam: uerticem uero, punctum in quo axis superficiei conoidalis applicatur. Conum aũt comprehensum à lineis sectioni coni obtusianguli proximis complectentem conoidale uocari. Lineam uero rectam, quæ intermedia capitur inter uerticem conoidalis & uerticem coni complectentis conoidale, adiectam axi dici. Et si obtusianguli conoidale planum contingat, ipsi autem contingenti alterum planum æquedistanter ducatur, quod abscindat à conoidali portionem, basem abscisę portionis uocari planum quod sit à sectione conoidalis in secando comprehensum. uerticem autem, punctum in quo planum contingit conoidale. axem uero, lineam intra portionem comprehensam, à linea ducta per uerticẽ portionis & uerticem coni complectentis conoidale, & quæ dictis uerticibus intermedia habetur rectam lineam ad axem adiectam uocari.

Omnia uero conoidalia rectangula sunt similia. Eorum autem quæ sunt obtusianguli, similia dicantur illa, quæ à conis similibus sunt comprehensa.

Hæc autem inspicienda proponuntur. Quare est, si à conoidali obtusianguli portio abscindatur plano super ipsius axem erecto, portio abscisa ad conũ eandem basem cum portione & eundem axem habentem, habet eam proportionẽ quam habet utraq; simul linea, & ea quæ æquatur axi portionis, & ea quæ tripla est lineę axi adiectæ, ad lineã æqualem his duab. simul, axi portionis, & lineę quę dupla sit lineæ axi adiectæ.

Item quare est, si à cono anguli obtusi portio abscindatur plano non erecto super axem, portio inde abscisa ad figuram, quæ basim habeat eandem, & axem eũdem portioni, quæ figura sit sectio coni, eam habet proportionem, quam utraq; simul linea quæ axi portionis sit æqualis: & linea quæ tripla sit lineæ axi adiectæ ad lineam æqualem istis utrisq;, uidelicet axi portionis, & lineæ duplæ ad lineam axi adiectam.

At uero circa sphæroidas figuras subiecimus ista.

Si sectio coni anguli acuti, quiescente eius maiore diametro circumferatur, donec redeat in eum locum unde moueri cœpit, figuram inde comprehensam à sectione coni anguli acuti, sphæroides oblongum appellari. Si autem minori diametro quiescente circũferatur, item donec ad locum unde cœpta est moueri portio coni acuti anguli redeat, figuram inde à sectione coni anguli acuti comprehẽ

ſam ſphæroides prolatum uocari. Vtriuſq; autem ſphæroidis axem dici diametrum quieſcentem: uerticem uero punctum illud in quo axis applicatur ſuperficiei ſphæroidis. Centrum uero punctum axis medium: diametrum uero lineam à centro eductam perpendiculariter ipſi axi.

Si ſphæroidas figuras utcunq; plana contingant æquediſtantia, & figuras nõ ſecantia: ipſis autem, ut dictum eſt, contingentibus alterum planum æquediſtanter agatur, diuidatq; dictas figuras ſphæroidas, portionum inde naſcentium baſem quidem uocari, id plani quod compræhenſum eſt à ſphæroidis ſectione in diuidente plano: uertices uero, puncta in quibus plana æquediſtantia contingunt ſphæroides. axes autem lineas rectas, in portionibus comprehenſas ex recta linea, quæ uertices earum iungit. Quòd aũt plana contingentia in uno ſolum puncto contingant ſphæroidis ſuperficiem, quodq; linea recta contactus coniũgens per centrum ſphæroidis tranſeat, in ſequentibus oſtendemus. Similes autem figuras ſphæroidas dici, quarum axes ad diametros eandem habent proportionẽ.

Portiones autem ſphæroidum & conoidalium figurarum ſimiles illę dicatur, quæ à ſimilibus figuris ſint abſciſæ, quæq; baſes ſimiles habeãt, & axes earum aut erecti ſint ſuper planas baſium ſuperficies, aut angulos æquales habeant ad diametros baſium (correlatiuas) conſimiles, proportionemq; teneant ad diametros baſium conſimiles eandem.

Proponuntur autem hæc circa ſphæroidas figuras conſideranda: Cur fiat, ſi figurarum ſphæroidum aliqua ſecetur plano per eius centrum tranſeunte, & ſuper axem erecto, portionum inde productarum utraq; dupla ſit cono ſuo, eãdem baſim & axem eundem cum portione habenti. Si autem plano ſecetur non ſuper axem erecto, & per centrum tranſeunte: earum quæ inde reſultant portionũ, maior quidem ad conum eãdem baſim, & eundem cum portione axem habentem, habebit eandem proportionem, quam habet linea, quę ſit æqualis utriſque ſimul iſtis, dimidio axis ſphæroidis, & axi minoris portionis, ad axem minoris portiõis. Minor autem portio ad conum, qui eandem baſem & axem eundem cum portione habuerit, eam tenet proportionem, quam linea æqualis utriſq; ſimul iſtis, dimidio axis ſphęroidis, & axi maioris portionis habet, ad axem portionis maioris.

Item quare fit, ſi qua figurarum ſphæroidum plano ſecetur, tranſeunte per cẽtrum non erecto ſuper axem, utraque portionum inde naſcentium dupla erit figuræ, quæ baſim eandem, & axem habeat cum portione eundem: ſit autem ipſa figura abſciſor coni.

Item ſi neq; per centrum, neq; erecto ſuper axem plano, ſphæroides ſecetur, portionum inde factarum maior ad figuram eandem baſim, & eundem cum portione axem habentem, tenebit eam proportionem, quam linea æqualis utriſque ſimul iſtis dimidiæ lineæ, quæ utriuſq; portionis uertices iungit, & axi portionis minoris habet ad axem portionis minoris. Minor autem portio ad figuram eandem baſem & axem habentem cum portione eundem, habebit eam proportionem, quam linea æqualis utriſque ſimul iſtis dimidiæ lineæ, quæ utriuſque portionis uertices iungit, & axi maioris portionis ad axem maioris portionis. ſit autẽ & in his figura abſciſor coni.

Iſtis itaq; quæ dicta ſunt theorematibus demonſtratis, per hæc ipſa inueniũtur multa alia theoremata, et problemata multa: quale eſt hoc quod ſequĩt, Quod ſphæroides figuræ ſimiles, & portiones ſphæroidum figurarum ſimiles, & ſimiliter conoidalium, habent eam quæ eſt axis ad axem proportionem triplicatam.

Item quare ſphæroidum figurarum æqualium quadrata diametrorum mutuam habent axium proportionem. & ſi figurarum ſphæroidum quadrata diametrorum mutuam habuerint axium proportionem, ſphæroides figuras illas æquales eſſe.

Propo

Propositum autem quale est hoc, A data figura sphæroidis, aut conoidalis portionem abscindere plano, quod sit alteri plano dato æquedistanter ductum. Esse autem portionem abscisam æqualem aut cono dato, aut cylindro, aut sphæræ datæ. Præmittens igitur primum & theoremata & pręcepta proposita, quę ad illorum demonstrationem sunt necessaria, postea tibi ea quæ supra sunt proposita, describemus feliciter.

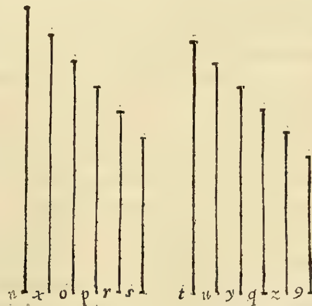
Si conus plano secetur omnibus lateribus suis coincidenti, sectio erit aut circulus, aut coni anguli acuti sectio. Quod si dicta sectio sit circulus, palàm est quod portio ab eo uerticem uersus compræhensa, conus existit. Si uero sectio sit coni anguli acuti sectio, figura à coni sectione dicta uersus uerticem coni compræhensa, abscisor coni uocetur. Huius uero abscisoris basis uocetur planũ illud quod à sectione coni acuti anguli continetur. uertex uero punctum, quod est & coni uertex. axis autem, linea à uertice ad centrum sectionis coni acuti anguli ducta.

Et si cylindrus duobus planis æquedistantibus secetur, quæ omnib. lateribus cylindri coincidant, sectiones erunt aut circuli, aut coni acuti anguli sectiones æquales & similes inuicem. Siquidem sectiones circuli fuerint, manifestũ est quod figura à cylindro abscisa inter plana æquedistantia intercepta, cylindrus existit. Si uero sectiones fuerint coni acuti anguli sectiões, abscisa à cylindro figura, quæ est inter plana æquedistantia contenta, sector cylindri appelletur. Ipsius autem sectoris bases uocentur plana comprehensa à sectione coni acuti anguli. axis uero linea ducta ad centra, sectionum coni acuti anguli. Erit autem hæc ipsi axi cylindri eadem.



SI fuerint quotcunque numero magnitudines sumptæ, quæ sese excedant æqualiter, fueritq; earum excessus minime illarum æqualis, sumantur aliæ totidem numero magnitudines omnes maximè prædictarũ æquales. istæ pòst simul sumptæ collectæ omnis ad prius sumptas omnis collectas minus sunt quàm duplæ. item eædem omnis istæ ad illas easdem omnes, dempta earum maxima, plus erunt quàm duplæ. Huius aũt demonstratio manifesta existit. I

SI fuerint quotcũq; numero sumptę magnitudines, itemq; totidem alię numero ponantur magnitudines, hoc pacto, ut quãcunque unaquaque prius sumptarum ad suam proximam habuerit proportionem, eandem unaquæq; posterius sumptarum ad suam eodem ordine proximam seruet, quæcunq; fuerint illæ proportiones, item prius sumptæ magnitudines ad quasdam alias, totidem numero magnitudines omnes, aut earum aliquas, quibuscũq; proportionibus referantur: sumptæ quoq; posterius magnitudines ad quasdã alias totidẽ, eodem ordine & eisdem proportionibus sint relatæ: erit tunc, ut magnitudines prius sumptæ omnes, habeant ad eas magnitudines omnes ad quas dicta ratione comparãtur, eandem proportionem, quam magnitudines posterius sumptæ omnis habuerint, 2



rint, ad omnes illas magnitudines ad quas fuerint similiter comparatæ. Esto quę dam magnitudines a b c d e f, item aliæ totidē g h i k l m, sintq; ut unaquæq; prius sumptarum habeat ad suam proximam, sicut unaquæq; posterius sumptarum ad suam proximam. Vt uidelicet a habeat ad b eandem proportionem, quam g ad h. ipsa uero b habeat ad c, sicut h ad ipsam i, & reliquę deinceps similiter. referātur autem a b c d e f magnitudines, ad alias magnitudines n x o p r s, in quibuscūque proportionib. ipsæ uero g h i k l m ad alias, uidelicet t u y q z 9, eisdem eodem ordine proportionibus: ut sicut a habet ad n, ita g ad t, & sicut b ad x, ita h ad u, & reliquæ istis similiter. Ostēdendū itaq; est, quod omnis a b c d e f, ad omnis n x o p r s eandem habent proportionem, quam habent omnes g h i k l m, ad omnes t u y q z 9. quoniam n ad a eandem habet proportionem, quam t ad g: ipsa uero a ad b, sicut g ad h. uerum b ad x, sicut h ad u. erit sicut n ad x, ita t ad u. eadem ratione & x ad o, sicut u ad y: & reliqua his similiter. Habent autem omnes a b c d e f g ad a, sicut g h i k l m ad g. uerum a ad n, sicut g ad t. at uero n ad omnes n x o p r s, sicut t ad omnes t u y q z 9. Manifestum igitur est, quod omnes a b c d e f, ad omnes n x o p r s: sicut omnes g h i k l m, ad omnes t u y q z 9. Clarum autē est, quod si ipsarū a b c d e f magnitudinum, istę a b c d e referantur ad n x o p r, ipsa uero f nō referatur: at ipsarū g h i k l m, istæ g h i k l, referantur ad t u y q z sibi correspondentes eisdem proportionibus, m uero nō referatur. Et similiter omnis a b c d e f, ad omnes n x o p r eandem habebunt proportionē, quā omnes g h i k l m, ad omnes t u y q z.

3 Si lineæ quotcunq; numero, fuerint inter se æquales, & unicuiq; earū accedat spaciū, ita quod spaciū secundæ superet spaciū primę quadrata forma, & sic deinceps reliqua se habeant, sintq; excessuū latera æqualē excedētia, & hic laterū excessus sit æqualis minimæ huius numeri lineæ. item sint alia spacia prædictis numero æqualia, quantitate uero unumquodq; maximo prædictorum æquale. Dico, tunc hęc simul omnia spacia minorem habere proportionem ad prædicta simul omnia, quàm linea

quæ

quæ sit æqualis utrisque simul istis lineis, ei quæ est latus excessuum spaciorũ maximum, & uni ex lineis æqualibus habeat ad lineam æqualem utrisq; simul istis, lineæ quæ sit tertia pars lateris excessus maximi, & lineæ quæ sit unius æqualiũ dimidia. Et item hæc eadem spacia ad illa eadem omnia, dempto eorum maximo, maiorem habere proportionem, quàm sit dictarum linearum proportio. Esto lineæ rectæ quotcunque numero quantitate inter se æquales, in quibus a, & unicuiq; earum spacium accedat, ita ut crescendo maius excedat sibi proximum minus forma quadrata. sint autem excessuum latera b c d e f g, quæ sese æqualiter excedant. & excessus ille sit æqualis minimæ illarum linearum, uidelicet ipsi g. sitq; b maximum latus dictorũ excessuum, & g sit minimũ latus minimi spacij ex dictis spacijs. Esto quoq; alia spacia numero æqualia prædictis, quantitate uero unumquodq; æquale maximo prędictorum, quod adiacet lineæ a b. sintq; hæc secunda spacia, in quib. h i k l lineę, sitq; linea h i æqualis lineę a, linea uero k l æqualis lineę b: & utraq; simul h i sit dupla ad lineam i. utraq; uero k l simul sit tripla ad lineam k. His ita dispositis, demõstrandum est, quod omnia simul spacia in quibus h i k l, ad spacia simul omnia in quibus a b, a c, a d, a e, a f, a g minorem habent proportionem, quàm habeat linea h i k l, ad lineam i k. Item quod hæc eadẽ spacia simul omnia ad illa eadem simul omnia, dempto maximo eorum, maiorem habent proportionem, quàm sit dicta lineæ ad lineam proportio. Sunt enim quędam spacia, in quibus a, sese æqualiter excedentia: & eorum excessus est æqualis numero, quoniam adiectiones linearum & latitudines sunt æqualiter sese excedentes. sunt itẽ alia spacia, in quibus h i totidem numero prædictis spacijs, quantitate uero unũquodq; maximo prædictorum æquale. Omnia igitur simul in quibus h i spacia sunt, omnium simul in quibus a, minus quàm dupla. sunt item eadem simul omnia, eorundem simul omnium, dempto eorum maximo, plusquam dupla. Spacia igitur omnia simul in quibus i, erunt omnibus simul in quibus a, minora: omnibus item simul dempto maximo, maiora erunt quàm dupla. Rursus quædam lineæ sunt hæ b, c, d, e, f, g: quæ sese æqualiter excedunt. & ille excessus est æqualis minimæ earum. & item aliæ lineæ, in quib. k l lineis prædictis multitudine æquales, magnitudine uero unaquæq; æqualis maximæ illarum. quadrata igitur simul omnia linearum secundarum inter se, & lineæ prioris ordinis maximę æqualium sunt minus quàm tripla ad quadrata simul omnia, linearum prioris ordinis sese æqualiter excedentium. ad quadrata uero simul omnia reliquarum, dempto maximæ lineæ quadrato, sunt eadem plus quàm tripla. Hoc autem est ostensum in his quę circa lineas cocleares sunt exposita. Spacia igitur in quibus k, spacijs simul omnibus in quibus b c d e f g, sunt minora: spacijs uero simul omnibus in quibus c d e f g, sunt maiora. quare & omnia simul spacia in quib. i k, spacijs simul omnib. in quibus a b c d e f g, erũt minora. Illis aũt in quibus a c d e f g spacijs, simul omnibus maiora erunt. Patet igitur, omnia simul spacia in quib. h i k l, ad spacia simul omnia in quibus a b, a c, a d, a e, a f, a g. esse minora: illis uero in quibus a c, a d, a e, a f, a g spacijs simul omnibus maiora. Ex quo clarum est, spacia simul omnia in quibus h i k l, ad spacia simul omnia in quibus a b, a c, a d, a e, a f, a g minorẽ proportionem habere, quàm habeat linea h l ad lineã i k. ad reliquas uero illarũ dempta a b linea, maiorem proportionem dicta proportione seruare. quare, &c.

Si cuiuscunq; coni sectionẽ lineę rectæ ab eodem puncto exeuntes cõtigerint, sint autem & aliæ rectę lineæ intra coni sectionẽ lineis contingentib. æquedistãter ductæ, & sese inuicẽ secantes quadrãgulæ superficies, quæ sub dictarũ linearũ sectionib. cõtinentur, eandẽ habent proportionẽ ad quadrata cõtingentiũ, unaquæq; ad quadratũ cõtingentis illius quæ sibi respondeat, quã habet superficies producta ex partib. alterius lineæ una in alterã ductis, ad quadratum cõtingentis eius quæ sibi fuerit æquedistãs. Hoc aũt demonstratũ iam fuit in conicis elemẽtis.

Si

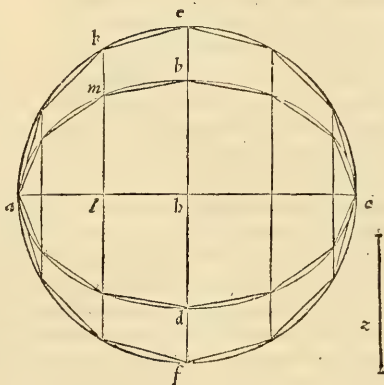
4 SI ab eadem rectanguli coni sectione duæ portiones, utcunque contingant, abscindantur, quæ diametros habeant æquales, ipsæ quoque portiones æquales erunt, & trianguli ipsis inscripti, qui eandem cum portionibus basim & altitudinem habuerint, erunt æquales. Diametrum autem uoco cuiuscunque portionis lineam rectam, quæ diuidit in duo æqua omnem lineam rectam basi ipsius portionis æquedistantē.

Esto rectanguli coni sectio a b c, et ab ea abscindantur duę portiones a d e, & h b c. Esto autem ipsius portionis a d e, diametros d f: ipsius uero h b c diametros b g, & esto d f æqualis ipsi b g. Ostendendum est, quod portiões ipsę sunt æquales inuicem, a d e ipsi h b c: & trianguli quoque ipsis eo modo, quo dictū est inscripti, æquales inuicem. Esto primum quæ scindit alteram portionem h c, secundum angulos rectos ad diametrum portionis coni rectanguli. sumatur autem ea iuxta quā possunt illæ quæ à sectione ducuntur dupla eius quę à sectione ad axem ducitur, esto illa in qua m: ducatur autem ab ipso a perpendicularis super d f, quæ sit a k. Quoniam igitur d f est diametros portionis, & a e in duo æqua diuiditur in puncto f, & d f est æquedistans diametro sectionis coni rectanguli: sic enim in duo diuidit omnes æquedistāter ipsi a e ductas. quam itaque proportionem habet quadratum a f ad quadratum a k, eandem habeat m ad n. quæ autem à sectione ad ipsam d f ducuntur æquedistanter ipsi a e possunt ea spacia, quæ lineæ ipsi n æquali adiaceant, latitudinem habentia lineam illam, quam illæ ductæ æquedistanter ipsi a e ex d f diametro incidunt uersus d terminum sumptam. Nam hoc est ostensum in conicis. Igitur a f ualet tantum, quantum continetur sub n & d f. potest autem & h g æquale ei quod continetur sub m & b g, cum h g sit perpendicularis super diametrum, & quadratum a f ad quadratum h g habeat eandem proportionem quam m habet ad n, quia d f & b g sunt positæ æquales. habet autem quadratum a f ad quadratum a k eandem proportionem, quam habet m ad n, erunt igitur h g & a k æquales. sunt autem & b g, & d f ęquales: quare id quod fit ex h g in b g, æquatur ei quod fit ex a k in d f. æqualis est igitur triangulus h g b triangulo d a f, quare & eorum dupla æqualia sunt. Portio autem a d e, est sesquitertia trianguli a d e: trianguli uero h b c, similiter sesquitertia est portio h b c: quare patet, portiones & triangulos ipsis portionibus inscriptos inter se esse æquales. Si uero neutra earum quæ diuidunt portiones linearum fuerit ad ipsam sectionis diametrum secundum angulos rectos, ducta ex diametro sectionis coni rectanguli uersus eam partē à qua diametros sectionis ab ipsa sectione exierit, sumatū pars quæ sit æqualis diametro portionis unius, & à puncto huius sumptæ extremo ducatū in utramque partem secundū angulos rectos linea recta, quæ abscindit portionem

utrisque

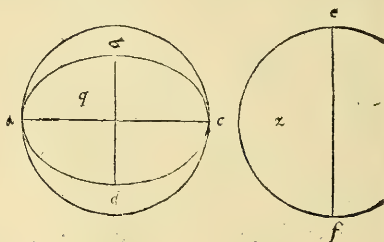
utriq; prædictarum æqualem, ut ſuprà oſtenſum eſt. quare conſtat propoſitũ.

OMne ſpacium quod compræhenditur à ſectione coni acutianguli ad circulum, qui habeat diametrum æqualem maiori diametro ſectionis coni acutianguli, habet eam proportionem quam minor ſectionis diametros habet ad maiorem, quæ eſt circuli diametros. Eſto coni acutianguli ſectio, in qua a b c d, eius maior diametros eſto, in qua a c: minor uero, in qua b d. eſto circulus circa a c diametrũ. Oſtẽdendũ eſt, ſpaciũ à ſectione coni acutianguli comprehenſum, habere ad dictum circulum eam proportionem, quã habet b d ad a c: hoc eſt ad e f. quã itaq; habet b d ad e f, eam habeat circulus in quo z ad a e c f circulum. Dico quod circulus z eſt æqualis ſectioni coni acutianguli. Si enim circulus z non dicat̃ ęqualis ſpacio cõprehẽſo à ſectione coni acutiãguli, eſto primũ ſi fieri poteſt maior. poteſt itaq; in circulo z figura multorum angulorum & numero pariũ inſcribi, quæ ſit maior dicto ſpacio a b c d. intelligatur ergo inſcripta,

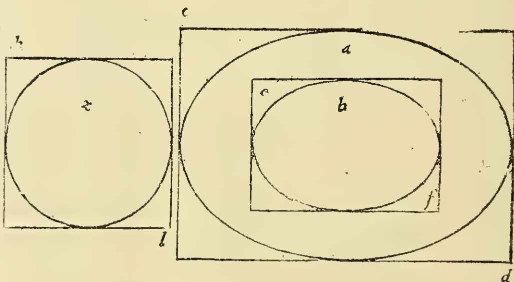


& inſcribatur circulo a e c f figura ſimilis inſcriptæ circulo z, & ab eius angulis ducantur perpendiculares ſuper a c diametrum: in quibus uero punctis perpendiculares ſcindunt ſectionem coni acutianguli, ea puncta lineis rectis iungantur. eritq; iam quædam figura in ipſa coni acutianguli ſectione inſcripta, quę figura ad rectilineam figuram circulo a e c f inſcriptam, eãdem habebit proportionem, quã habet b d ad e f. quoniam e h, k l perpendiculares in eandem proportionem diuiduntur ſecundum m b: manifeſtum eſt, quod l e ſpacium tabulare, ad h m habet eam quam h e ad b h proportionem. eadem ratione & cætera ſpacia tabularia, unumquodq; eorum quæ ſunt in circulo, ad unumquodq; eorum quæ ſunt in ſectione coni acutianguli, eam habebit quæ eſt e h ad b h proportionem: habent quoq; trianguli qui ad a c exiſtunt, in circulo ad triangulos in ſectione coni acutianguli proportionem eandẽ. Tota igitur figura rectilinea circulo inſcripta a e c f, ad totam figuram rectilineam ſectioni coni acutianguli inſcriptam, habebit eandem proportionem quam e f habet ad b d. habet autem eadem ipſa figura rectilinea ad rectilineam circulo z inſcriptam, hanc eandem proportionem, quoniam circuli eandem proportionem inter ſe retinebant. Igitur rectilinea circulo z inſcripta, eſt æqualis rectilineæ ſectioni coni acutianguli inſcriptæ: quod quidẽ eſſe non poteſt, nã maior erat toto ſpacio à ſectione coni anguli acuti cõpræhenſo. Sed eſto item ſi fieri poteſt minor. Rurſus poteſt in ſectione coni acutianguli inſcribi figura paribus contenta lateribus, quæ maior ſit circulo z. Eſto igitur inſcripta, & ab angulis eius perpendiculares ducantur ad a c, & educãtur ad circuli circumferentiam. Rurſus igitur erit, ut rectilinea circulo a e inſcripta, ad rectilineã ſectioni coni acutianguli inſcriptam, habeat eam proportionẽ, quam e f ad b d. ſi itaq; circulo z inſcribatur ſimilis illi, oſtendetur eam quæ in circulo z eſt inſcripta, æqualem illi eſſe quæ ſectioni coni acutianguli eſt inſcripta: quod ſanè eſſe non poteſt. Circulus igitur z neq; minor eſt ſpacio à ſectione coni acutianguli comprænhenſo. Manifeſtum eſt igitur, quod dictum ſpacium habet ad a e c f circulum eandem proportionem, quam habet b d ad e f.

6 QVodlibet ſpacium à coni acutianguli ſectione comprehenſum, ad quem cunque circulum comparetur, eam habet proportionem, quam ſuperficies ex utriſque eius ſectionis diametris producta habere percipitur, ad quadratum diametri eius circuli ad quem fuerit comparatũ. Eſto ſpacium à coni acutianguli ſectione comprehenſum, in quo q. eius ſectionis diametri ſint a c, b d maior autem a c: & eſto circulus in quo z, eius autẽ diametros in quo eſt e f. Eſt igitur demõſtrandũ, ſpacium q ad circulum z eam habere proportionem, quam ſuperficies producta ex a c diametro in b d habet, ad quadratum diametri e f. Circũſcribatur itaque circulus ipſi a c diametro. Spacium igitur q, ad circulũ cuius diametros eſt a c, eam habet proportionem, quam ſuperficies ex a c in b d producta habet, ad quadratum diametri a c. circulus quoque cuius diametros eſt a c, ad circulum cuius diametros eſt e f, habet eandem proportionem, quam habet quadratũ a c ad quadratum e f. Ergo manifeſtum eſt, ſpacium q ad circulum z eam proportionem habere, quam ſuperficies ex a c in a d producta, habet ad quadratum e f.



7 SPacia quæque à coni acutianguli ſectione compræhenſa, ad alia quæque ſpacia quæ à coni acutianguli ſectione compræhendantur comparata, eandem proportionem habere probantur, quam ſuperficies ex iſtorum diametris productæ, ad ſuperficies ex illorum diametris productas habuerit. Eſto ſpacia à coni acutianguli ſectione cõpræhenſa, in quibus a b: eſto etiam c d ſuperficies producta ex diametris ſectionis a. eſto item e f ſuperficies producta ex diametris ſectionis b. Eſt itaque declarandũ, ſpacium a ad ſpacium b, eandem proportionem habere, quam c d habuerit ad e f. Sumatur itaque quiſpiam circulus in quo z, quadratum diametri illius eſto k l: habet itaque a ſpacium ad circulum z eandem proportionem, quam c d ad k l: circulus autem z ad b ſpacium eandem habet proportionem, quam k l ad e f. Manifeſtum eſt igitur, a ſpacium habere ad b ſpacium eã, quam c d ad e f habuerit proportionem. Ex hoc igitur manifeſtum eſt, quod ſpacia à ſimilibus ſectionibus coni acutianguli compræhenſa, eam inter ſe proportionem ſeruabunt, quam ſectionum diametri, quæ rationis eiuſdem fuerint, potentia inuicem retinebunt.



8 DAta coni acutianguli ſectione, & ab eius centro recta linea ſuper plano in quo dicta ſectio exiſtit, perpendiculariter erecta, fieri poteſt, ut conus quidã deprehendatur, qui uerticem habeat erectæ lineæ terminum, in cuius coni ſuperficie data coni ſectio compræhendatur. Detur aliqua coni acutianguli ſectio, & de eius centro recta linea ſuper planum perpendiculariter erigatur, in quo data ſectio

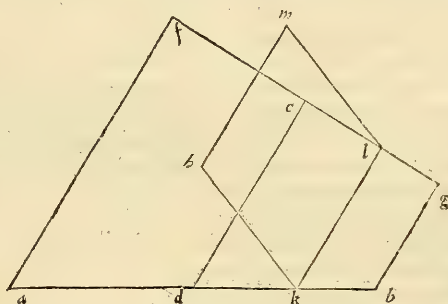
ctio continetur: per minorem uero diametrum & lineam erectam planum educatur, & sit in ipso minor diametros a b: centrum uero datæ sectionis d, linea à cētro erecta c d, eius terminus c. sectio autem coni acutianguli intelligatur circa diametrum a b descripta, in plano erecto a d, c d. Oportet itaque conum inuenire, qui uerticem habeat punctum c, in cuius superficie sit coni acutianguli sectio. Ducatur autem à pūcto c ad a b recta, quæ educatur: & à puncto a ducatur a f, ita ut id quod fit ex a e in e f, ad quadratum e c, eam habeat proportionem, quam habet quadratum dimidię maioris diametri ad quadratum d c. hoc enim fieri potest, cum maior sit proportio ista, quàm ea quam habet id quod fit ex a d in d b, ad quadratum d c. Secūdum uero a f planum erigatur, erectum super planum in quo est a c, a f. in quo item plano circulus describatur circa diametrum a f, & ab hoc circulo conus fiat qui uerticem habeat pūctum c. in huius autem coni superficie demonstrabitur esse sectio coni acutianguli. Nam si non fuerit, necesse est punctum aliquod esse in sectione coni acutianguli, quod non erit in superficie coni. intelligatur itaque punctum quoddam in sectione coni acutianguli sumptum, quod sit h, quod non sit in superficie coni, & ducatur ab ipso h perpēdicularis h k, erit igitur ipsa super plano erecta in quo est a c, a f. ducta itaque linea recta à puncto c ad k, incidet iā ipsa lineæ a f. esto in pūcto l: et à pūcto l erigatur perpēdicularis super a f, quæ sit l m, in circulo circa a f descripto. intelligatur autem m eleuatum in circūferentia eius. ducatur autem et à puncto l æquedistans ipsi a b, quæ sit x o: à puncto autem e, ducatur p r. Quoniam igitur id quod sub e a & e f continetur, ad quadratum e c, eam habet proportionem, quam quadratum dimidiæ maioris diametri, ad quadratum d c: quadratum uero e c, ad id quod cōtinetur sub e p, e r, eam habet quam quadratū d c ad id quod fit ex a d in d b. Id igitur quod fit ex a e in e f, eā habet ad id quod ex p e in e r, quā quadratum dimidiæ maioris diametri habet ad id quod fit ex a d in d b. Est aūt sicut id quod fit ex a e in e f, ad id quod fit ex p e in e r: sic id quod fit ex a l in l f, ad id quod fit ex l x in l o. sicut autem quadratum dimidiæ maioris diametri, ad id quod fit ex a d in d b: sic quadratum h k, ad id quod fit ex a k in k b. Igitur eandem habet proportionem id quod fit ex a l in l f, ad id quod fit ex x l in l o: quam quadratum h k, ad id quod fit ex a k in k b. Habet autem id quod fit ex x l in l o, ad quadratum c l, eandem proportionem, quam id quod fit ex a k in k b, ad quadratum k c. Igitur id quod fit ex a l in l f, ad quadratum c l, eandem proportionem, quam quadratum h k ad quadratum k c. ei autem quod fit ex a l in l f, æquale est quadratum l m. nam in semicirculo circa a f descripto, ducta est l m perpendicularis. eandem igitur habet proportionem quadratum l m ad quadratum l c, quam quadratum h k ad quadratum k c. quare in eadem linea recta sunt puncta tria, c h m: ipsa uero c m linea est in superficie coni. manifestum igitur, quod punctum h in coni superficie existet. Suppositum autem fuerat, ibi non existere: nullum igitur punctum in sectione coni acutianguli est, quod non existat in superficie dicti coni.

ni. Tota ergo coni acutianguli sectio in superficie eiusdem coni existet.

9 DAta coni acutianguli sectione, & linea recta ex eius centro non perpendicu-lariter educta in altum, in plano quod ex altera diametro sit erectum, super plano in quo est coni acutianguli data sectio, potest conus inueniri, qui uerticem habeat terminum lineæ eductæ, in cuius superficie coni acutianguli sectio data cõsistet. Esto itaq; datæ sectionis coni acutianguli diametros b a, centrum autem d. & sit d c ex centro educta, ut dictum est: intelligatur autem coni acutianguli sectio quędam circa diametrum a b, in plano erecto super planum in quo sũt lineæ a b, c d. Oportet itaq; conum inuenire, qui uerticẽ habeat punctum c, in cuius superficie sit coni acutianguli data sectio. Lineæ igitur a c, c b non erunt æquales: quare c d non stat erecta super plano, in quo est ipsius coni acutianguli sectio data. Sit igitur ęqualis c e ipsi c b, esto uero n recta æqualis dimidiæ alterius diametri, quæ est coniugalis ipsi a b, & per d ducatur f g ęquedistans ipsi e b: ab ipso uero e b erigatur planum erectè stans super planum in quo est a c, c b: & in hoc plano describatur circulus circa diametrum e b, aut ellipsis. siquidem quadratum n est æquale ei quod fit ex f d in d g, fiat circulus. Sin autem fiat coni acutianguli sectio talis, ut quadratum alterius diametri ad quadratum e b eandem habeat proportionem, quam habet quadratum n ad id quod fit ex d f in d g: deinde conus sumatur, qui uerticem habeat punctum c, in cuius superficie erit circulus: aut coni acutianguli sectio circa diametrum e b. hoc enim esse potest, quoniam linea à puncto c ad mediam e b ducta, rectà est ad planum quod est secundum e b constitutum. in hac itaq; superficie inest etiam coni acutianguli sectio circa diametrum a b. Si non existit in dicta superficie, dabitur aliquod punctum in coni acutianguli sectione, quod non erit in dicta superficie coni. Intelligatur quoddam huiusmodi punctum sumptum h, quod non sit in dicta coni superficie: & à puncto h ducatur perpendicularis h k super a b: iuncta uero c k extra ducatur, & coincidat e b in puncto l. per punctum uero l ducatur quædam in plano erecto secundum e b perpendicularis super e b, quæ sit l m: ipsum autẽ m punctum intelligatur eleuatum super superficiem coni, & ducatur per punctum l æquedistans ipsi a b linea p r: erit iam sicut quadratum n ad id quod fit ex f d in d g, ita quadratũ l m ad id quod fit ex e l in l b. uerum sicut id quod fit ex f d in d g, ad id quod fit ex a d in d b: ita quod fit ex e l in l b, ad id quod fit ex e l in l r. erit igitur sicut quadratũ n, ad id quod fit ex a d in d b, ita quadratũ l m, ad id quod fit ex p l in l r. sicut autẽ

quadratum n, ad id quod fit ex a d in d b, ita quadratum h k, ad id quod fit ex a k in k b, quoniam in eadem coni acutianguli ſectione ductæ ſunt perpendiculares ſuper diametrum a b. eandem igitur proportionem habet quadratum l m, ad id quod fit ex p l in l r, quam habet quadratum h k, ad id quod fit ex a k in k b. habet autem quod fit ex p l in l r ad quadratum c l eandem proportionem, quam habet id quod fit ex a k in k b, ad quadratum k c: igitur eandem proportionem habet quadratum l m, ad quadratum l c, quam quadratum h k ad quadratum k c, quare puncta c h m erunt in eadem linea recta. ſed c m puncta ſunt in ſuperficie coni: quare manifeſtum eſt, h punctum in eadem ſuperficie exiſtere. ſuppoſitum autẽ fuerat, non eſſe: igitur patet, quod fuerat demonſtrandum.

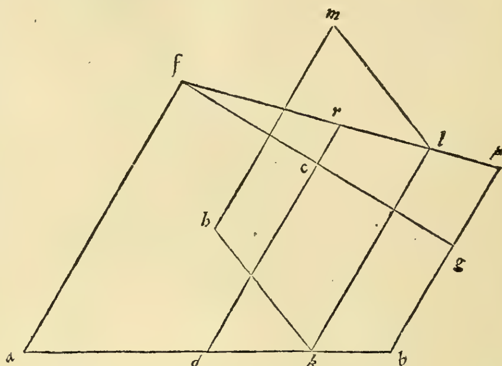
DAta coni acutianguli ſectione, & linea ab eius ſectionis centro erecta in pla- 10
no, quod ſit ex altera diametro eductum, quodq́ erectum ſtet ſuper plano in quo eſt coni acutianguli ſectio data, poteſt cylindrus effingi, qui axem habeat directè iunctum lineæ à centro ſectionis, ut dictum fuit, erectæ, in cuius cylindri ſuperficie data coni acutianguli ſectio exiſtat. Eſto datæ ſectionis coni acutianguli altera diametros b a, cẽtrum eius d. eſto autem c d linea ex centro, ut dictum fuit, erecta: intelligatur autem coni acutianguli ſectio circa diametrum a b in plano illo conſtituta, quod ſtet erectũ ſuper plano, in quo ſunt lineæ a b, c d. oportet itaque cylindrum effingere, qui axem habeat in directũ lineæ c d coniunctum, in cuius cylindri ſuperficie data coni acutianguli ſectio exiſtat.



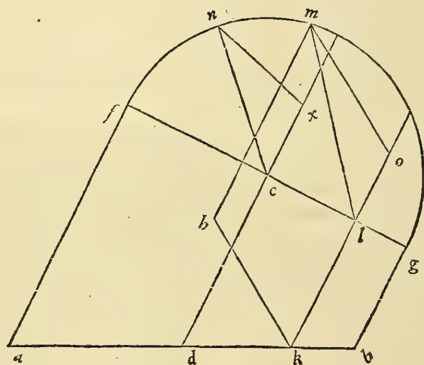
à punctis itaq; a b educantur a f, b g, æquediſtantes ipſi c d: altera iam diametros ſectionis coni acutianguli, aut æqualis erit interuallo quod inter a f & b g lineas continetur, aut maior, aut minor. Eſto primum æqualis f g lineæ, & linea f g ſit erecta perpendiculariter ad lineam c d: ab ipſa uero f g exeat planum, quod ſit erectum ſuper linea c d: & in hoc plano circulus eſto circa diametrum f g, & ab hoc circulo cylindrus exeat habens axem c d: in ſuperficie igitur huius cylindri erit data coni acutianguli ſectio. Nam ſi non ſit, dabitur aliquod punctum in ſectione coni acutianguli, quod non continebitur in ſuperficie dicti cylindri. ſit illud h, & ab ipſo h ducatur perpendicularis h k ſuper a b: erit autem ipſa erecta ſuper plano, in quo ſunt a b, c d lineæ. à puncto uero k ducatur k l æquediſtans ipſi c d, & à puncto l erigatur l m perpendiculariter ad f g, in circulo circa f g cõſtituto. intelligatur autem m eleuatum in ſuperficie ſemicirculi eius qui eſt circa diametrum f g. habet itaq; eandem proportionem quadratum h k perpendicularis, ad id quod fit ex a k in k b: & quadratum f c, ad id quod fit ex a d in d b. quoniam f g eſt æqualis alteri diametro. Habet autem & id quod ex f l in l g, ad id quod fit ex a k in k b, eam quam habet quadratũ f c ad quadratũ a d ellipſis: quare id quod fit ex f l in l g, æquatur quadrato h k, & etiam idem æquale quadrato l m: æquales igitur h k & l m perpendiculares erunt: quare lineæ l k & m h ſunt æquediſtãtes. atq; ideo d c & m h, æquediſtantes erunt. unde & in ſuperficie cylindri erit h m, quoniam ab m puncto in ſuperficie cylindri conſtituto ducta eſt m h, æquediſtans axi. ex quo ſequitur, punctum h in eadem exiſtere ſuperficie. Fuerat ſuppoſitũ, non ſic eſſe, unde patet id, quod oportuit demonſtrare. Clarum iam eſt,

quod cylindrus compræhendens ellipsim, erit erectus, si altera diametros æqualis fuerit interuallo, quod interiacet inter lineas ab extremis alterius diametri ductas, ipsi lineæ ex centro erectæ æquedistantes.

Esto item altera diametros maior f g. et esto æqualis f p linea alteri diametro: ab ipsa autẽ p f erigatur planum erecte, stãs super plano, in quo est b c d: & in hoc plano esto circulus circa diametrũ p f. ab hoc circulo prodeat cylindrus, qui axem habeat d r. in superficie itaq; cylindri huius eadem ratione sectio coni acutianguli existere demonstrabitur.



Esto demum altera diametros minor f g. quantum maius potest f c, quam dimidium alterius diametri: esto id c x lineæ quadratum. & à puncto x erigatur linea æqualis dimidiæ alterius diametri, erecta super plano in quo sunt lineæ rectæ a b c d, sitq; hæc x n. intelligatur aũt punctũ n eleuatũ. c n igitur erit æqualis c f. in plano uero in quo est f g, c n circulus describat̃, circa diametrum f g. iste autem ductus erit per n punctum. & ab ipso circulo cylindrus effingatur, qui axem habeat c d: in superficie itaq; huius cylindri sectio coni acutianguli existit. Sin autem non sic, dabitur aliquod punctum in sectione coni acutiãguli, quod nõ erit in superficie cylindri. esto illud h, & ducatur h k perpendicularis super a b, & à puncto k ducatur k l æquedistans lineæ c d. & à puncto l ducatur erecte l m super f g in semicirculo circa diametrum f g constituto. intelligatur autem punctum m eleuatum in arcu semicirculi circa f g constituti, super semicirculum circa f g constitutum. & à puncto m ducatur m o, perpendicularis super lineam k l eductam. erit aũt hæc erecta super plano in quo sunt a b, c d, quia est linea k l erecta perpendiculariter super lineam f g. est itaq; sicut quadratũ m o ad quadratũ m l, ita quadratum n x ad quadratum c n: sicut autem quadratum m l, ad id quod fit ex a k in b k, sic quadratum c n ad quadratum a d. quia quadratum m l est æquale ei quod fit ex f l in l g: quadratũ uero c n quadrato c f æquatur. erit igitur sicut quadratum m o, ad id quod fit ex a k in k b, sic quadratũ x n, ad quadratum a d. Est aũt & quadratũ k h, ad id quod fit ex a k in k b, sicut quadratũ x n ad quadratum a d: quia x n est æqualis dimidiæ alterius diametri. patet quod lineæ perpendiculares m o, h k, erunt



erunt æquales: quare o k & h m erunt æquales. quoniam autem m h est ducta æquedistans axi in cylindro, et punctum m est situm in superficie eius, necesse est et lineam m h in cylindri esse superficie collocatam. manifestum est igitur, quod & h punctum in eadem superficie continetur. Sumptum autem fuerat, non contineri in illa. Constat ergo necessarium esse, sectionem coni acutianguli in superficie cylindri contineri.

OMnis coni ad quemcunque conū proportionem compositam esse ex proportione basium inter se, & ex proportione altitudinum, demonstratur ex his quæ prius sunt ostensa: & quod omnis abscisio coni ab abscisione coni, habet proportionem compositam ex proportione basium & proportione altitudinum: & quod omnis sector cylindri triplus est ad abscisionē coni quę basim habeat eandem cum sectore, & eandem altitudinem. Eadem enim est demonstratio, & eius quod cylindrus est triplus ad conum, qui basim eandem, & altitudinem habeat eandem cum cylindro. 11

SI figura conoidalis rectangula plano per axē ducto scindatur, sectio erit conoidalis rectanguli sectio ipsa uidelicet eadem, quæ ipsam figuram conoidalem comprehendit, si fuerit circumuoluta: diametros eius erit cōmunis sectio duorū planorum, eius quod scindit figuram, & eius quod per axem ducitur perpendiculariter, superdiuidens alterum erectum. Quod si secetur plano super axem erecto, sectio circulus erit, qui centrum in axe habebit. Si conoidale obtusiangulum scindatur plano per axem, aut æquedistanter axi ductum, aut per uerticem coni comprehendentis conoidale, sectio erit coni obtusianguli sectio. Siquidem per axem ea erit quæ figuram ipsam circumuoluta describit. Si autem æquedistanter axi, erit prædictæ similis. Si autem & per uerticem coni comprehendentis conoidale, non erit prædictæ similis: diameter uero sectionis erit communis sectio planorū, diuident * figuram, & eius quod per axem ducatur erectum super planum diuidens. 12

Si conoidale secetur plano super axem erecto, sectio erit circulus, cuius centrū est in axe situm.

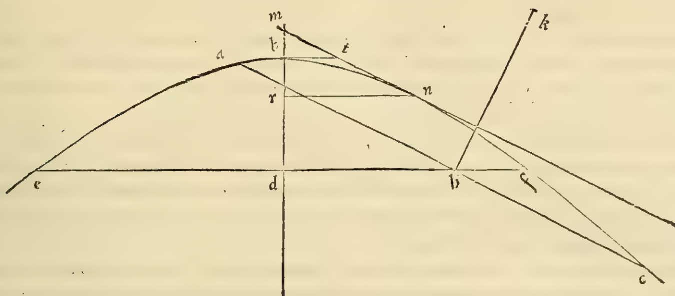
Si quæcunque sphæroidum figurarum scindatur plano per axem, aut æquedistanter axi ducto, sectio erit coni acutianguli sectio: quod si per axem, eadem erit quæ figuram ipsam circūuoluta describit: si autem æquedistanter axi, erit illi similis. eius uero diametros erit sectio cōmunis duûm planorū: eius quod secat, et eius quod per axem ducitur erectum super planum secans. Si autem secetur plano super axem erecto, sectio erit circulus, cuius centrum in axe situm habetur. Si autem quæcunque dictarum figurarum plano per axem ducto secetur, lineæ à punctis quæ in figuræ superficie sunt, non in sectione sita ductę perpendiculariter, ad planum secans intra sectionem figuræ cadent. Horum autem omnium demonstrationes sunt manifestæ.

SI conoidale rectangulum plano secetur, neque per axem, neque æquedistanter axi ducto, neque super axem erecto, sectio erit coni acutianguli sectio. eius maior diametros erit pars in conoidali deprehensa: pars dico sectionis communis duûm planorum, eius quod figuram secuerit, & eius quod per axem ductum, erectum super secans planum: minor uero eius diameter erit æqualis interuallo inter illas duas comprehenso, quæ ab extremitatibus maioris diametri ductæ sint axi æquedistantes. Secetur itaque conoidale rectangulum plano, uti dictum est, ipso eodem prius scisso à plano per axem ducto, & erecto super planum secans. Esto conoidalis sectio a b c, plani autem figuram secantis sit c a linea recta: axis autem conoidalis sit, & diametros sectionis b d. Ostendendum est, sectionem conoidalis quæ à plano circa a c fit, esse coni acutianguli sectionem: & maior eius diametros est a c, minor autem diametros æqualis est ipsi a l, cum c l fuerit ipsi b d ęquedistans, 13

ſtans, & a l fuerit ſuper c l ducta perpendicularis: intelligatur aliquod punctum k in ipſa ſectione ſumptum, & à puncto k ducatur k h perpendicularis ſuper c a: erit igitur k h erecta ſuper plano perpendicularis, in quo eſt a c b coni rectanguli ſectio, quia & planum ſecans ſtat erectũ ſuper eodem plano. per h autem ducatur e f, quæ faciat angulos rectos ſuper b d, & per e f & k h rectas lineas extra ducatur planum: erit autem hoc erectum ſuper lineam b d. diuiditur itaque figura conoidalis plano ſuper axem erecto, quare ea ſectio circulus erit cuius centrũ eſt d. igitur k h, æquum poterit ei quod fit ex f k in k e. nã quod eſt ſuper e f, ſemicirculus eſt: & k h, in eo eſt perpendicularis. nã eius quod fit ex e h in h f, eſt media proportionalis. ducatur aũt contingens coni ſectionem linea m n, æquediſtans ipſi a c. cõtingat uero in puncto n: ducatur item b t, æquediſtans ipſi e f. id itaque quod fit ex a h in c h, ad id quod fit ex e h in h f, eandem habet proportionem, quam quadratum n t ad quadratum b t: hoc enim oſtenſum eſt. linea uero n t æqualis eſt lineæ t m: quoniã & b r, ipſi b m eſt æqualis. habet igitur id quod fit ex a h in h c, ad quadratum k h, eandem proportionem, quam quadratum t m ad quadratum t b. quare & quadratum perpẽdicularis h k, ad id quod fit ex a h in h c, habet eandem proportionem, quam quadratum b t ad quadratũ t m. Quoniã igitur trianguli c a l, t m b ſunt ſimiles, ſimiliter oſtendentur quadrata, quæ fiũt ab alijs perpendicularib. ductis à ſectione ad a c, ad ea quæ fiũt ex partibus a c, altera in alterã ductis, eandẽ habebũt proportionẽ, quã quadratũ a l ad quadratum a c. unde manifeſtũ eſt, quod ſectio eſt coni acutianguli ſectio: eius uero maior diametros eſt a c, minor uero æqualis ipſi a l.

14 SI conoidale obtuſiangulum plano ſecetur, coincidenti omnibus lateribus figuræ compræhendentis conoidale, ſitque ipſum planum non ſuper axem erectum, huiuſmodi ſectio erit coni acutianguli ſectio, eiuſque maior diametros erit linea intra conoidale deprehenſa, quæ pars eſt ſectionis duûm planorum: eius uidelicet quod eſt ſecans, & eius quod per axem conoidalis ductum eſt, erectum ſit per planum ſecans. Secetur itaque conoidale obtuſiangulum, ut dictum eſt, & alio item plano ducto per axem, & erecto ſuper planum ſecans, ſectio uero conoidalis eſto a b c, coni obtuſianguli ſectio: plani autem ſecantis figuram ſit linea recta a c, axis autem conoidalis & diametros ſectionis b d. intelligatur iam punctũ aliquod k in ſectione ſumptum, & à puncto k ducatur k h perpendicularis ſuper a c: ipſa iam erit erecta ſuper plano in quo eſt a b c ſectio coni: per punctum uero h ducatur perpendiculariter e f ad b d, & per e f & k h lineas rectas planũ ducatur ſecans conoidale, ſecabitur iam planum recto ſuper axem. quare huiuſmodi ſectio erit circulus, cuius centrum eſt d: igitur k h perpendicularis, æquum poterit ei quod fit ex h e in h f. Ducatur item m n æquediſtans ipſi a c, & contingens ſe-

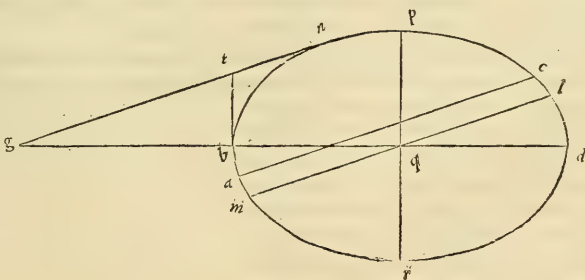
ſectionem coni in puncto n, ducatur b t æquediſtans ipſi c f. Id iam quod fit ex e h in h f, ad id quod fit ex a h in h c, eãdem habet proportionem, quam quadratũ b t, ad quadratum t n. quare quadratũ k h perpendicularis ad id quod fit ex a h in h c,



eam habet proportionem, quam quadratum b t ad quadratum t n. Similiter igitur oſtenditur, quod & quadrata aliarũ perpendicularium, quæ à ſectione ad a c ducentur, ad ea quæ fiunt ex partib. a c, altera in alteram ductis, quæ partes ab ipſis fiunt perpendicularibus, eam habent proportionem, quam quadratum b t ad quadratum t n. & b t, minor eſt ipſa t n, quoniam & m t minor eſt ipſa t n: etenim m b minor eſt b r. Hoc enim eſt in ſectionib. coni obtuſianguli accidens. Conſtat igitur, ſectionem eſſe coni acutianguli ſectionem, & maior eius diametros a c. Similiter exeunte n r perpendiculari in ſectione coni obtuſianguli, diametros eius maior erit c l.

SI ſphæroides oblongum plano ſecetur ſuper axem non erecto, ſectio huiuſmodi erit coni acutianguli ſectio, eius maior diametros erit linea quæ pars cõmunis ſectionis duũm planorum exiſtit, eius quod ſecat, & eius quod per axem ductum eſt, erectum ſuper planum ſecans, quæ linea intra ſphęroides in ſecando intercipitur. Si enim ſecetur per axem, aut axi æquediſtãter, manifeſtum eſt. 15

Secetur autem alio plano per axem ducto, erecto ſuper alterum ſecans, & eſto ſphæroidis ſectio a b c d, ſectio coni acutiãguli: plani autem ſecantis eſto c a linea recta. axis autẽ ſphæroidis, & diametros ſe



ctionis coni acutianguli eſto b d, centrum autem q, & minor diametros eſto p r: Ducatur autẽ b t perpẽdicularis ad b d, & g n æquediſtans ipſi a c, cõtingens coni acutianguli ſectionem in puncto n. ducatur & m l per punctum q, æquediſtãs ipſi a c. Similiter iam his quæ prius dicta ſunt oſtendetur, quadrata perpendicularium earum quæ à ſectione ad a c ducuntur, ad ea quæ fiunt ex partibus a c altera in alteram ductis, eandem habere proportionem, quam quadratum b t ad quadratum

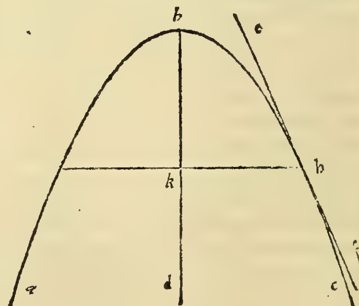
dratum t n. quod itaque huiusmodi sectio sit coni acutianguli sectio, patet: & quod diametros eius sit a c, item patet. Quod autem sit maior, ostendendum est. quod enim fit ex p q in q r, ad id quod fit ex m q in q l, eandem habet proportionem, quam quadratum b t ad quadratum n t: quia æquedistantes contingentibus sunt m l, & r p. minus autem est quod fit ex p q in q r, eo quod fit ex m q in q l, cum r q minor sit q l. Minus igitur est quadratum b t, quadrato m t: quare & quadrata perpendicularium, quæ à sectione ad a c ducentur, uel ductæ sunt, minora erunt his quæ fiunt ex partibus a c, altera in alteram ductis. Manifestum igitur, quod a c est maior diametros.

Si sphæroides prolatum plano secetur, cætera erunt eadem supradictis: diametros uero minor erit, ea quæ intra sphæroides compræhendetur. Ex istis autē manifestum est, quod si planis æquedistantibus secentur, eorum sectiones erunt similes. Nam quadrata perpēdicularium ad ea quæ fiunt ex partibus, eandem inter se proportionem retinebunt.

16 SI in cuiuscunque conoidis rectanguli superficie puncta quæcunque notentur, lineæ quæ ab eis ducentur, æquedistantes axi in eam partem in qua conoidis conuexa sunt, extra ipsum conoides cadunt: quæ autem in alteram partem trahuntur, eas intra ipsum cadere necesse est. Ducto enim plano per axem et per pūctum, à quo æquedistās axi ducta est, huiusmodi sectio est coni rectanguli sectio, diametrus uero eius axis conoidis. Verum in sectione coni rectanguli à quocunque signo in sectione sito, lineæ ducantur axi æquedistātes, quæ uersus eam partem in qua sunt eius conuexa trahuntur, extra sectionem cadere necesse est: quæ uero in alteram, intrà cadunt. patet igitur propositum.

In conoidali obtusiangulo à quocunque puncto in superficie eius sito lineæ ducantur, æquedistātes lineæ cuipiam quæ in conoidali existit, ducta à uertice coni eius qui conoidale complectitur, quæ in eam partem ducentur in qua eius conuexa existunt, extra conoidale cadunt: quæ uero in alteram partem, intra cadere necesse est. Ducto enim plano per lineam quæ à uertice coni complectentis conoidale intra conoidale ducta sit, & per punctum à quo ducitur æquedistans illi, huiusmodi sectio erit sectio coni obtusianguli, diametros eius linea quæ à uertice coni intra conoidale ducta est. In sectione autem coni obtusianguli, à quocunque puncto in sectione sito ducantur lineæ æquedistantes, lineæ sic ductæ à uertice quæ in eam partem ducentur, ubi sunt eius conuexa, extra: quę uero in alterā partem trahentur, intra sectionem cadere necesse est.

Si quascunque conoidales figuras planum quodcunque contingat, non scindēs conoidale, in uno solo puncto cōtinget, & planū per axem, & per contactum ductū, erectū erit super plano cōtingente. Cōtingat itaque si fieri potest, in pluribus punctis: sumptis igitur duob. punctis, in quibus planum cōtingat conoidale, ab utroque ducemus æquedistantes axi lineas, & ab his ductis educetur planum æquedistans axi. aut enim per axem, aut ęquedistanter axi ductum erit. quare sectionem faciet coni sectionem, & pūcta erunt in coni sectione sita. quoniam igitur sunt in una superficie, & in plano linea recta, quæ inter illa cadit, erit intra coni sectionem: quare & intra conoidalis superficiem existat. ipsa uero eadem recta linea est in plano contingente, quia & puncta



pũcta in ea sunt. erit igitur ut aliquid plani contingentis sit intra conoidale, quod esse non potest. nam supponebatur, non secare: in uno igitur solo puncto continget. Quod autem planũ per contactum & per axem ductũ, erectum sit super contingens planum. Si enim in puncto uerticis conoidale cõtingat, patet. nam duobus planis per axem ductis conoidalis sectionis, erunt coni sectiones, quæ diametrum habent ipsum axem: lineæ uero plani contingentis sunt, quæ sectiones conorum contingunt in extremitate diametri, quæ angulos rectos faciũt diametro sectionum. erunt igitur in plano contingenti duæ lineæ rectæ, angulis rectis ad axem directæ: erit igitur planum ipsum super axem erectũ. quare & planum per axem ductum, erit super illud erectum. Sed esto non contingat in uertice conoidalis planum. ducatur iam planum per contactum & axem, & sectio conoidalis sit b c coni sectio, axis autem sit & diametros sectionis b d: contingentis autem plani sectio sit e h f, linea recta contingens coni sectionem in puncto h: & perpẽdicularis ab ipso h ducatur h k ad b d, & planum statuatur erectum super axem. efficiat autem hoc planum sectionem, circulum cuius centrum sit k, sectio autem communis huius & contingentis plani erit contingens circulum: ergo faciet angulos rectos ad h k. quare erecta erit super plano, in quo sunt k h, b d. Cõstat igitur, planum contingens esse erectum super plano, cũ & lineæ rectæ sint in eodẽ.

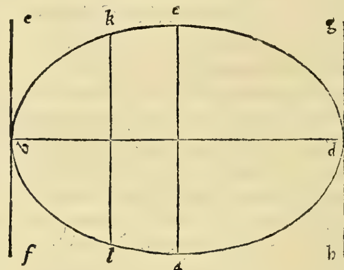
SI utramuis figurarũ sphæroidum planum contingat, nõ scindendo figuram, 17
in uno solo puncto eam cõtinget: & id planum quod per axem & cõtactum fuerit ductum, erit super plano contingenti erectum. Esto, si fieri potest, contingat in pluribus punctis. notentur itaq; hæc puncta, in quibus planum contingit sphæroidem, & ab utroq; horum ducantur lineæ rectæ æquedistantes axi: & ducto per illas plano, sectio fiet coni acutianguli sectio, & pũcta erũt in sectione coni: linea igit̃ recta media inter pũcta, erit intra coni sectionem: quare & intra sphæroidis superficiem existet. ipsa autem recta linea in plano cõtingente situatur, quoniam & puncta sita sunt in eodẽ: plani igitur contingentis aliquid erit intra sphæroidem. non est aũt hoc uerum. nam suppositum fuit, planum nõ secare sphæroidem. Igitur manifestum est, quod in uno solo puncto contingit. Quod autem planum per axem & contactum actum, sit erectum super plano contingente, similiter sicut in conoidali figura ostensum fuit, & in hoc demonstrabimus.

Si & sphæroidum figurarum utrauis plano scindatur, per axem ducto, & sectionem inde factam aliqua contingens linea recta ducatur, & per contingentem planum statuatur erectum super plano quod secet figuram, continget figuram secundum idem punctum, in quo linea eam contingit sectionem coni, non enim in alio puncto superficiei suæ eam cõtinget. Sin autem ducta perpendicularis à pũcto super planum scindens, incidet intra coni sectionem: nã super cõtingentem cadet, quoniam plana alternatim alterum super altero sunt erecta: quod esse non potest. nam ostensum est quod intra cadet.

SI aliquam sphæroidem figuram duo plana 18
inter se æquedistantia contingant, linea recta quæ contactuum puncta coniunget, per centrum sphæroidis permeabit. Si plana fuerint super axem erecta, manifestum est quod dicitur. Cæterum esto non sint plana cõtingentia super axem erecta, planum ductum per axem, & alterum contactuum erectum erit super planum contingentis: quare & super æquedistans illi. necesse est igitur, planum per axem ductum, & per utrumq; contactum esse

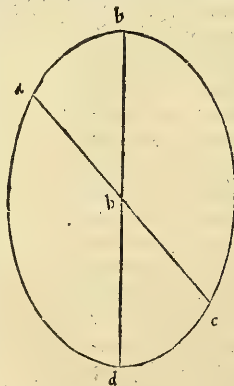
actum: ſi autem non, erunt duo plana ſuper idem planum erecta, per eandem li neam ducta, quæ non ſit ſuper planum erecta. nam ſuppoſitum eſt, axem non eſſe erectum ſuper plana æquediſtantia. in eodem igitur erunt plano, axiſq; & cõ tactus ipſi, & ſecta erit ſphæroides ſuper axem: ſectio igitur huiuſmodi erit coni acutianguli ſectio: ſectiones autem planorum contingentium æquediſtantes erunt, quæ contingent coni acutianguli ſectiones in contactibus planorum. & ſi duæ rectæ lineæ inter ſe æquediſtantes contingant coni acutianguli ſectionem, centrum ſectionis coni acutianguli, & puncta contactuum in eadem recta linea erunt ſita.

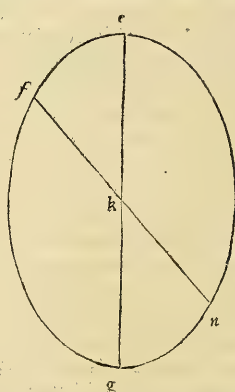
19 SI quamcunq; figuram ſphæroidem duo plana æquediſtantia contingant, ducatur autem planum quoddam per centrum ſphæroidis, æquediſtans planis contingentibus lineæ rectæ, quæ ex facta ſectione ducentur æquediſtantes ei lineæ quæ ipſos contactus coniungat, extra ſphæroidẽ cadẽt. Supponant̃ quæ dicta ſunt, & notetur pũctum aliquod in ſectione facta. Ex puncto igitur notato, & ex linea recta quę iungit cõ tactus, ducatur planum. ſcindet autẽ hoc & ſphæroidem, & plana æquediſtantia. Eſto igitur ſphæroidis ſectio a b c d, coni acutianguli ſectio: ſectiones autem planorum cõtingentium, ſint e f, g h lineę rectæ. ſignum autem notatum a. ea uero quæ contactus cõ iungit, ſit b d. Ipſa igitur per centrũ tranſibit. ſectio uero plani æquediſtã tis contingentibus eſto a c. ipſa quoq; in centrum cadet. nam et planum ipſum in quo ipſa eſt, per centrũ trãſit. Quoniã igitur a b c d, uel circulus eſt, uel coni acutianguli ſectio, & ipſam contingunt duę rectæ e f g h, per centrum autem ducta eſt eis æquediſtans a c: manifeſtũ eſt quod ductæ à punctis a c, æquediſtantes ipſi b d, contingent ſectionem, & extra ſphæroidẽ cadent. Si aũt planum æquediſtans punctis contingentib. non ſit per centrum actũ, eſto k l. manifeſtũ eſt, illæ quæ à recta ex ſectione facta in eam partem efficientur, in qua portio minor exiſtat, extra ſphęroidem cadent: quę autem in alteram partem ducentur, intra ſphæroidem cadere oportere probatum eſt.



20 QVælibet figura ſphæroides plano per centrũ ducto ſecta in duo æqua, ipſa & eius ſuperficies ſecatur à plano.

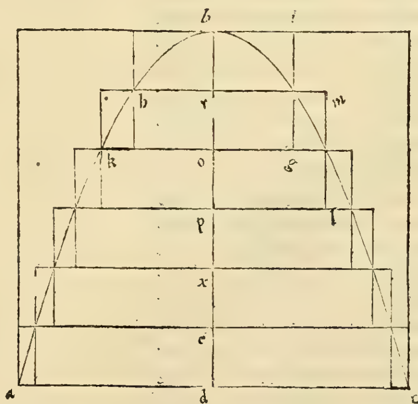
Secetur itaq; figura ſphæroides à plano per centrum ducto, aut ſecundum axem, aut erecto, aut non erecto ſuper axem plano ſecabitur. ſi ſecundum axem, uel plano ſuper axẽ erecto fuerit ſecta, patet quod ipſa & eius ſuperficies in duo æqua diuiditur. nam manifeſtum eſt, quod altera eius





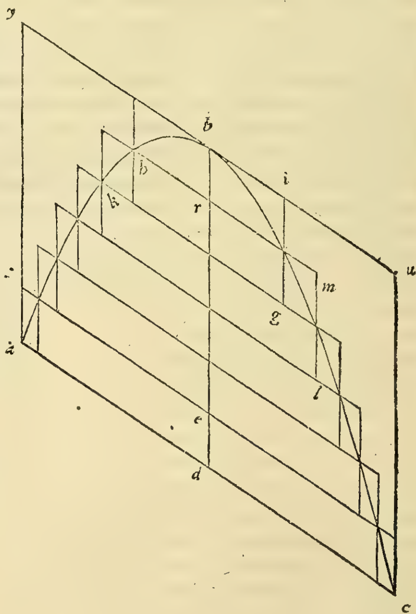
eius pars alteri coaptat̃, & alterius partis superficies superficiei alterius. Sed esto non secundum axem, necq; plano super axem erecto secetur: secta ipsa sphæroide à plano super primum planum secans erecto, sit sectio a b c d, coni acutianguli sectio: eius diametros & axis sphæroidis esto b d, & centrũ h: plani aũt quod per centrũ sphæroidẽ diuiserit, esto sectio a c linea recta. Sumatur item altera sphæroides huic similis & æqualis, & secta ipsa secundũ axem à plano, esto eius sectio e f g n, coni acutianguli sectio: diametros uero eius & axis sphæroidis esto e g, centrum k. & per k ducatur f n, faciens angulum k æqualem angulo h: à linea uero f n, educatur planum erectum super planum in quo est e f g n sectio: erunt iam conorum acutianguli sectiones a b c d, f g n, æquales & similes. aptatur itacq; altera alteri, posita e g super b d, & f n super a c. aptatur etiam planum quod est secundum n f, plano quod est secundum a c: quoniam ab eadem linea super idem planũ consistit utrumcq;. aptabitur ergo & portio secta ex sphæroide à plano secundum n f constituto, quæ est in parte ubi est e, alteri portioni sectę ex altera sphæroide à plano secundum a c ducto, quæ est in parte in qua est b: & reliqua sectio reliquæ sectioni, & superficies portionum superficiebus similiter. Rursus e g posita super b d, sic ut e super d situm sit, & g super b, linea media inter punctum f n, super lineam inter puncta a c constituta: manifestum est, quod & conorum acutianguli sectiones inuicẽ aptabunt̃ altera super alterã, & f cadet super c, & n super a. similiter autem & planum quod est secundum n f, aptabitur plano secundum a c ducto: & portionum quæ à plano secundum n f ducto sectæ sunt, illa quidem quæ ad partem g, aptabitur portioni à plano secundũ a c acto sectæ, quæ est in parte b. illa uero quæ est in parte e, aptabitur illi quæ est in parte d. quoniam igitur eadem portio utricq; portionum adæquabitur, manifestum est quod portiones erunt æquales, & eadem ratione earum erunt superficies æquales.

DAta quacuncq; conoidalis portione, quæ sit abscisa à plano super axem erecto, data etiam quacuncq; sphæroidis portione similiter abscisa, quæ dimidia sphæroide minime maior existat, fieri potest ut portio solida una ei inscribat̃, altera circumscribatur ex cylindris habentibus altitudinem æqualem confecta, ita ut figura circumscripta addat super figuram inscriptam, quacuncq; solida quantitate minus. Detur portio qualis est a b c: secta aũt ipsa plano secundum axẽ ducto, esto portiõis sectio a b c, coni sectio: plani autẽ quod portionẽ secuit, sit sectio a c linea recta: & esto portionis axis, & diametros sectionis b d. quoniam igitur suppositum est, planum secãs esse erectum super axem, sectio circulus erit. eius diametros sit a c: & ab hoc circulo cylindrus extruatur, qui axem habeat b d: superficies autem eius cadet extra portionem. quia est aut conoidale, aut sphæroides, non maius dimidio sphæroide. hoc cylindro assiduè in duo æqua secto, à plano super axem erecto, fiet tandem ut residuum erit solida quantitate data minus. Esto reliquum ab eo cylindrus, qui basem habeat circulum circa diametrum a c constitutum, axem autẽ e d: 21



minorq; ſit data quantitate ſolida. diuidatur itaq; b d in partes æquales e d, punctis r o p x: & à diuiſionibus ducantur lineæ rectæ æquediſtantes ipſi a c ad coni ſectionem. ab his autem ductis, educantur plana erecta ſuper b d: erunt igitur quæ inde fient ſectiones, circuli quorum centra erunt in b d linea. ab utroq; itaq; horum circulorum duo cylindri extruantur, quorũ uterq; habeat axem æqualem ipſi e d, alter quidem in parte cylindri uerſus d, alter uero in parte uerſus b, erit iã quædam in portione ſolida figura inſcripta ex cylindris cõpoſita, qui in eam partem effecti ſunt in qua eſt d: & altera item circumſcripta, compoſita ex illis cylindris, qui in partem in qua eſt b, ſunt ducti. Reliquũ eſt ut oſtendamus, quod circumſcripta addit ſuper inſcriptam, data ſolida quantitate minus. Vnuſquiſque ergo cylindrorum qui figuræ ſunt inſcripti, eſt ęqualis cylindro qui ab eodem circulo uerſus partem b exeat, ſicut h g ipſi h i, & k l ipſi k m, & reliqui tantundem, & omnes cylindri omnibus ſunt æquales. manifeſtum eſt igitur, quod figura circumſcripta inſcriptam ſuperat cylindro, qui baſim habet circulum circa diametrũ a c conſtitutum, axem uero e d. hic autem minor eſt ſolida quantitate propoſita.

22 POrtione conoidalis quacunq; data, quæ à plano ſuper axem non erecto abſciſa fuerit, & data item ſphæroidis portione quacunq;, ſimiliter abſciſa, quæ dimidia ſphæroide minime maior exiſtat, fieri poteſt ut alterã portioni inſcribatur ſolida figura, altera uero circũſcribatur ex cylindris, ſectionibus, altitudinem altitudini ſectionis æqualem habentibus compoſitam: hoc pacto, ut figura circũſcripta addat ſuper inſcriptam minus quacunq; ſolida quantitate data. Detur portio qualis dicta eſt: ipſa uero figura ſecta alio plano ſecũdum axem ducto, & erecto ſuper plano portionem ſecante, ipſius quidẽ figuræ ſectio ſit a b c d, coni ſectio: ipſius aũt plani, quod portionẽ abſcidit, eſto ſectio c a linea recta. quia igitur poſitum eſt, planum abſcindens portionem non eſſe erectum ſuper axem, ſectio erit coni acutianguli ſectio, eius autem diametros a d: ſit u y contingens ſectionem coni in puncto b, & ſecundum ipſam u y educatur planum æquediſtãs plano ſecundum a c ducto: hoc continget figuram in puncto b: & ſiquidem fuerit portio conoidalis rectanguli, à pũcto b ducatur æquediſtãs axi b d. Si uero fuerit conoidalis obtuſianguli, à uertice coni comprę hendentis conoidale, recta linea ducta ad b, extra ducatur b d: ſi autem ſphæroidis linea recta ducta ad b, ſit intercepta



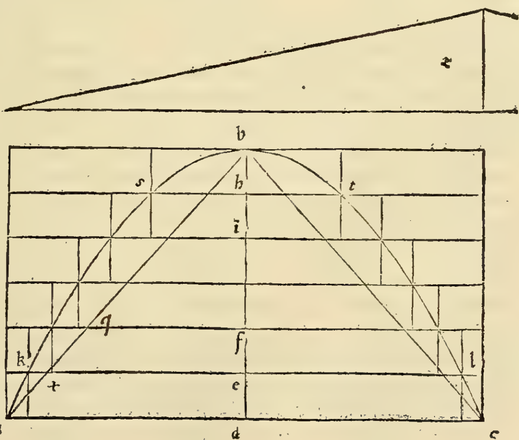
b d: manifeſtũ eſt quod b d diuidit a c in duo æqua. erit igitur b uertex portionis, & b d axis. Iam eſt coni acutianguli ſectio circa diametrum a c, & linea b d à centro erecta in plano, erecto ſuper planum in quo eſt coni acutianguli ſectio, alio plano

plano ſecundum alterum diametrum conſtituto: pòteſt igitur cylindrus conſtrui qui axem habeat b d, in cuius ſuperficie erit data coni acutianguli ſectio circa diametrum a c cõſtituta. eius autem ſuperficies cadet extra portionem, quoniam eſt aut conoidalis aut ſphæroidis portio, & non maior dimidia ſphæroide. Erit igitur quoddam cylindri fruſtum, quod baſim habet coni acutianguli ſectionem circa a c diametrum conſtitutam, axem uero d b. hoc autem fruſto in duo diuiſo planis æquediſtãtibus, plano ſecundum a c ducto, erit reſiduum minus ſolida quantitate propoſita. Eſto fruſtum, quod habeat baſim coni acutianguli ſectionem, diametrum a c, axem uero e d, minus ſolida quantitate propoſita: diuidatur a b in partes æquales e d, & à punctis diuiſionum ducantur lineæ rectæ, quæ æquediſtent a c, erunt erectæ ſuper coni ſectionem: ab his exeant plana æquediſtantia plano ſecundum a c ducto. ſecant itaq; hæc ſuperficiem portionis, & erunt huiuſmodi conorum acutianguli ſectiones ſimiles illi quæ eſt circa diametrum a c: quia plana æquediſtantia ſunt. In unaquaq; igitur coni acutianguli ſectione extruantur cylindri fruſta duo, hoc quidem in parte ſectionis coni acutianguli uerſus d, illud autem uerſus b, quæ axem habeat æqualem d e: erunt itaq; quædam figuræ ſolidæ, hæc quidem inſcripta portioni, illa uero circũſcripta eidem, quæ ex cylindri fruſtis componuntur. Reliquum autem eſt, ut oſtendamus quod figura circumſcripta ſuper figuram inſcriptam, minus addat ſolida quantitate propoſita. Oſtendetur autem hoc ſimiliter priori, quod figura circumſcripta excedit inſcriptam fruſto, quod baſim habet coni acutianguli ſectionem, quæ circa diametrum a c conſiſtit, axem uero e d. hoc autem minus exiſtit propoſita quantitate ſolida.

His itaq; hoc ordine præſtitutis, demonſtrabimus ea quæ de figuris propoſita fuerunt.

OMnis portio conoidalis rectanguli, quod ſectum fuerit plano ſuper axem erecto, ſeſquialtera eſſe probatur coni, qui baſim & axem eandem habeat cum portione. Eſto itaq; portio conoidalis rectanguli abſciſa plano ſuper axẽ erecto, & ſecto ipſo conoidali ab altero plano ſecũdum axem ducto. eſto quidem ſuperficiei ſectio a b c, coni rectanguli ſectio. plani autem portionem abſcindentis ſit ſectio linea a c recta: axis uero portionis, b d. eſto item conus eandem baſim 23

& eundem axem cum portione habẽs, cuius uertex ſit b. demonſtrãdũ eſt, quod portio conoidalis ſeſqalteta eſt huius coni. Exponatĩ itaq; conus z, q ſeſquialter ſit huius coni, cuius baſis circulus circa a c diametrum cõſtitutus: axis uero b d. Eſto autem cylindrus, qui baſim habeat circulum circa a c diametrum cõſtitutum, axem autem b d: erit igitur conus z dimidium huius cylindri, cum conus z ſit ſeſquialter eiuſdem coni. Dico igitur, portionem conoidalis æqualem eſſe cono z. nam ſi non eſt ęqualis, uel maior uel minor exiſtet.

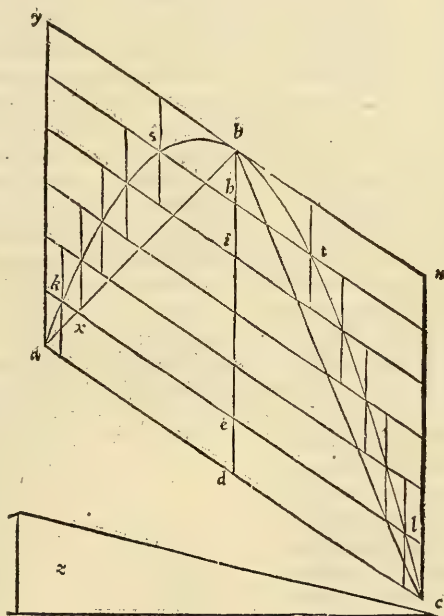


existet. Esto itaque si fieri potest, maior: inscribatur aût portioni quædam solida figura, & altera circumscribatur ex cylindris altitudinem æqualem habentibus, cõpositam hoc pacto, ut circumscripta super inscriptam minus addat eo, quo portio conoidalis excedit conum z: & sit maximus cylindrorum ex quibus figura circũscripta componitur, qui basim habeat circulum circa diametrum a c constitutum, axem uero e d. eorum autem minimus sit ille qui basim habeat circulum circa s t diametrum descriptum, axem uero b i. Cylindrorum uero ex quibus figura inscripta componitur, maximus sit ille, qui basim habeat circulum circa k l constitutum, axem uero d e. minimus autẽ, qui basim habeat circulum circa s t diametrũ, axem autem h i. Educantur autem plana omnium cylindrorum ad superficiem cylindri, qui basim habeat circulum circa a c diametrum descriptum, axem uero b d: erit iam totus cylindrus dissectus in cylindros, qui multitudine erunt æquales illis qui sunt in figura inscripta comprænensi, magnitudine uero æquales eorum maximo. & quoniam circumscripta figura portioni minus addit super inscriptam, quàm portio super conum, constat figuram inscriptam maiorem haberi cono z. Primus autem cylindrus eorum qui sunt in toto cylindro, qui axem habet d e, ad primum cylindrum eorum qui in figura portioni inscripta habentur, habentem axem d e, eãdem habet proportionem, quam d a habet ad k e potestate. Hæc autem eadem est illi quam habet b d ad b e, & quam habet d a ad e x. similiter ostenditur, secundus cylindrus eorum qui sunt in toto cylindro, qui axem habet e f, ad secundum cylindrũ eorum qui sunt in figura inscripta, eandem habere proportionem, quam p e, hoc est d a, ad q f. & unusquisque cæterorũ qui sunt in toto cylindro, ad cylindrum in figura inscripta, qui basim habeant eandem, eãdem habebit proportionem, quam dimidia diametros basis suæ, habet ad eam sui partem quæ intermedia linearum rectarum a b, b d comprænenditur. & omnis cylindri, qui in cylindro comprænenduntur, cuius basis est circulus circa a c diametrum descriptus, axis uero d i linea recta, ad omnes cylindros in figura inscripta comprænensos, eandem habebunt proportionem, quam omnes rectæ lineæ ex centris circulorum eductæ, qui sunt in basibus dictorum cylindrorum, ad omnes lineas rectas inter medium a b & b d interceptas. Dictæ uero lineæ rectæ sunt dictis, dempta a d, plusquam dupla. quare & cylindri simul omnes qui in toto sunt cylindro, cuius axis est d i, erunt plus quàm dupli figuræ inscriptæ: multo magis autem totus cylindrus, cuius axis est b d, existet plus quàm duplus figuræ inscriptæ. Idem uero erat coni z duplus. figura igitur inscripta minor erit cono z, quod est contra id quod positum fuerat. nam posita fuerat maior: non est igitur portio conoidalis maior cono z. Similiter autem neque minor. Rursus enim inscribatur figura, & circumscribatur hoc pacto ut altera alteram excedat minus eo quo conus z excedit portionem conoidalis, & cætera ut suprà similiter disponantur. Quoniam igitur inscripta figura portione minor existit, & inscripta minus exceditur à circumscripta, quàm portio à cono, patet quod circumscripta minor est cono. Item primus cylindrus in toto cylindro existens, qui axem habet d e, ad primum cylindrum eorum qui in figura circumscripta existunt, eundem qui habet axem e d, eam habet proportionem, quam quadratum a d ad ipsum idem. Secundus autem cylindrus eorum qui sunt in toto cylindro, qui habet axem e f, ad secũdum cylindrum in figura circumscripta collocatum, qui basim habet e f, eandem habet proportionem quam d a ad k e potestate: hæc autem est eadem ei quam habet b d ad b e, & ei quam habet d a ad e x. & reliquorum cylindrorum unusquisque qui in toto cylindro sunt, qui habeant axem æqualem d e, ad unumquemque cylindrorum qui sunt in figura circumscripta, qui habent eandem axem, habebit eam proportionem quam dimidia basis eius ad eam sui partem, quæ inter a b, b d interducitur media: & omnis cylindri in toto cylindro existẽtes, quorũ axis est b d linea

linea recta, ad omnis cylindros in figura circumscripta collocatos eam habebunt proportionem, quam omnes rectæ lineæ ad omnes lineas rectas: ipsæ autem omnes rectæ, quæ ex centris circulorum exeunt, qui bases sunt cylindrorum ad rectas lineas omnes quæ ab ipsis assumptę sunt, simul cum a d minores sunt, quàm duplæ. manifestum igitur, quod cylindri omnes qui in toto cylindro existunt, minores erũt quàm dupli ad cylindros in figura circumscripta existentes. cylindrus igitur, qui basim habet circulum circa diametrum a c constitutum, axem autem b d, minor existet quàm duplus circumscriptæ figuræ. non est autem sic, uerum maior quàm duplus eadem. nam coni z duplus existit. Et ostensum est figurã circumscriptam cono z esse minorem. non igitur conoidalis portio cono z minor. & ostensum est, quod neq; eo maior habetur. quare eam esse sesquialteram coni habentis basim, & axem cum portione eundem, necessariò conclusum est.

SI à conoidali rectangulo portio abscindatur plano super axem non erecto, similiter sesquialtera esse probatur portionis abscissæ à cono quæ basim & axẽ eundem habet, cum ipsa portione. Esto portio conoidalis rectanguli abscissa uti proponitur, & ipso secto à plano secũdum axem ducto, erecto super planam 24

quod abscindit portionem, figuræ quidem sectio esto a b c, coni rectanguli sectio: plani uero abscindentis portionem esto a c linea recta. ducatur autem u y æquedistans ipsi a c, et contingens coni rectanguli sectionem in puncto b. & ducatur b d æquedistans axi. Hæc autẽ iam in duo diuidit ipsam a c. planum autem ab u y educatur, æquedistãs plano quod est secundum a d. cõtinget autem hoc conoidalem in puncto b, & erit portionis uertex punctum b, axis autem b d. Quoniam igitur planũ quod est secundum a c, nõ erectum super axẽ, secat conoidalem, sectio huiusmodi erit coni acutianguli sectio. eius autem maior diametros a c. Cum itaque sit circa a c diametrum coni acutianguli sectio, & linea b d sit à centro sectionis coni acutianguli erecta, in plano erecto ex diametro super plano in quo ipsa est coni acutianguli sectio, cylindrus poterit effingi qui axem habeat in linea recta a b d, in cuius superficie existet ipsa coni acutianguli sectio: poterit etiã conus effici, qui uerticẽ habeat pũctum b, in cuius superficie existet ipsa coni acutianguli sectio, & frustũ cylindri quoddam quod basim habeat ipsam coni acutianguli sectionem circa a c diametrum collocatam, axem autẽ b d: & portio coni qui basim habeat eandem cum frusto & portione, & axem eũdem. Est igitur ostendendum, conoidalis portionem huiusmodi abscisoris coni esse sesquialteram. Esto itaq; z conus sesquial-



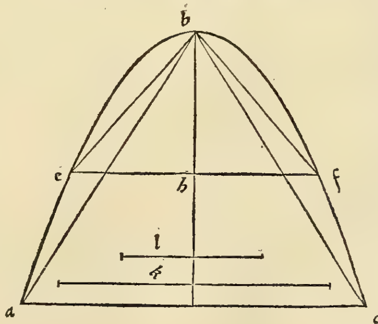
ter huius abſciſoris coni prædicti. erit igitur cylindri fruſtum, quod baſim habeat eandem cum abſciſore, & axem eundem, duplus coni z. hic namq; ſeſquialter exiſtit abſciſoris coni, baſim habentis eandem cum portione, & axem eundem. abſciſor autem coni dictus tertia pars exiſtit fruſti cylindri, baſim & axem habentis eũdem cũ portione. Dico itaq; neceſſe eſſe portionẽ conoidalis cono z eſſe æqualẽ. nã ſi non æqualis erit, maior aut minor eo exiſtet. Eſto primũ maior, ſi fieri poteſt: inſcribatur itaq; portioni quædam ſolida figura, & altera circumſcribatur ex fruſtis cylindrorũ compoſita, quæ baſim habeant & altitudinem æqualem inter ſe, hoc pacto, ut figura circũſcripta ſuper inſcriptam figuram addat minus eo, quo portio conoidalis excedit conum z: & plana fruſtorum erunt ad ſuperficiem fruſti baſim habentis eandem cum portione, & axem eundem. Rurſus itaq; primũ fruſtum eorum quæ in toto fruſto quod habet axem d e, ad primum fruſtum eorum quæ ſunt in figura inſcripta, quod habet axem d e, eam habet proportionem quam quadratum a d, ad quadratum k e. nam ſi fruſta æquam altitudinem habentia, eandem inuicem proportionem ſuis baſibus habeant, baſes autẽ eorum cum ſint ſimiles conorum acutianguli ſectiones, eandem habent inter ſe proportionem, quam diametri eius rationis ſuæ poteſtate: ſunt autem diametrorũ eiuſdem rationis dimidiæ lineæ a d, k e. quam autem habet proportionem a d ad ipſam k e poteſtate, eam habet b d ad b e lõgitudine, cum b d diametro æquediſtet. ipſæ uero a d, k e æquediſtant ei quæ ſecundum a c, puncto b contingit: quam autem proportionem habet b d ad b e, hanc habet a d ad e x. Primum igitur fruſtum eorum qui ſunt in toto fruſto, ad primũ fruſtum in figura inſcripta collocatum, eam habet proportionẽ, quam a d ad e x: & reliquorum eorum quæ ſunt in toto fruſto unumquodq;, quod habet axem æqualem ipſi d e, ad unumquodque fruſtorum quæ ſunt in figura inſcripta, quod habeat axem eundem, habet eãdem proportionẽ quam dimidia diametri baſium eius ad eam quæ ab ipſa eſt media, interſecta inter a b, b d. Oſtendetur autem ſimiliter ſuperioribus inſcriptam figuram maiorem eſſe cono z, & cylindri fruſtum quod baſim habeat & axem cũ portione eundem, maius eſſe quàm duplum figuræ inſcriptæ: quare etiam coni z maius eſſe quàm duplum. Hoc autem non eſt uerum, ſed duplum exiſtit: non eſt igitur maior portio conoidalis cono z. Eadem ratione oſtẽdetur, quod neq; minor. Vnde conſtat, eſſe æqualem. & ideo portio conoidalis coni baſim eandem, & axẽ cum portione eundem habentis, ſeſquialtera eſſe probata eſt.

25 SI conoidalis rectanguli duæ portiones abſcindantur, duob. planis, altero ſup axẽ erecto, altero non ſuper axẽ erecto, ſintq; portionũ axes æquales, ipſas quoq; portiones æquales eſſe neceſſe eſt. Abſcindant itaque à conoidali duæ portiões, ut dictũ eſt: ſecto itaq; conoidali ſecũdũ axẽ plano ducto, & altero plano ſuper axẽ erecto, eſto conoidalis ſectio a b c, coni rectãguli ſectio. eius aũt diametros b d:

b d: planorum uero sint sectiones a f, e c lineæ rectæ: eius quidem quod est super axem erectum sit e c, nõ erecti uero super axem sit a f. axes autem portionum sunto b h, k l inuicem æquales, uertices uero puncta b l: demonstrandum est, quod portio conoidalis cuius uertex est b, portioni conoidalis cuius uertex est l, existit æqualis. Quoniam igitur ab eadem coni rectanguli sectione coni duæ portiones sunt abscisæ, a l f, & e b c, & earum sunt diametri æquales k l, b h, triãgulus a l k æqualis est triangulo e h b. ostensum est enim, triangulum a l f triangulo e b c esse æqualem. ducatur iam a q perpendicularis super k l eductam: & quoniam b h, & k l sunt equales, sunt quoque e h & a q æquales. Esto itaque in portione cuius uertex est b conus inscriptus, eandem basim & axem eundem habens cum portione: in portione uero cuius uertex l, sit abscisor coni eandem basim & axem eundem cũ portione habens: ducatur autem perpendicularis ab l super a f, quæ sit l n: erit iã ipsa altitudo abscisoris coni, cuius uertex est l. abscisor autem coni cuius uertex l, & conus cuius uertex b, habent inter se proportionem compositam, ex basiũ proportione, & ex altitudinum proportione. habent itaque proportionem compositam ex proportione, quam habet spacium contentum à sectione coni acutianguli circa diametrum a f constituta, ad circulum circa diametrum e c descriptum, & ex proportione quam habet n l ad b h. spacium autem ab coni acutianguli sectione contentum ad eundem circulum eam habet proportionem, quam id quod fit ex diametris altera in alteram ductis ad quadratum e c. & abscisor coni cuius uertex est l, ad conum cuius uertex est b, habet proportionem compositam ex proportione, quam habet k a ad e h, & ex proportione quam habet n l ad b h. at uero k a dimidia est diametri basis abscisoris coni, cuius uertex est l: ipsa uero e h, dimidia est diametri basis coni: ipse autem l n, b h sunt eorum altitudines. habet autem l n ad b h eandem proportionem, quam habet ad k l, cum b h sit ipsi k l æqualis: habet etiam l n ad k l eam, quam q a ad a k: habet quoque abscisor coni ad conũ proportionem compositam, ex ea quam habet a k ad a q. nam a q equatur ipsi e h, & ex ea quam habet l n ad h b. Composita autem ex dictis proportio, scilicet a k, ad a q, eadem est ei quam habet l n ad l k. abscisor ergo habet ad conum eam proportionem, quam l n ad l k, & quam habet l n ad b h. b h autem æquatur ipsi l k. manifestum est igitur, quod abscisor coni cuius uertex est l, æquatur cono cuius uertex est b. Ex quo constat portiones quoque æquas esse, cum altera earum coni sesquialtera sit, altera item abscisoris coni sesquialtera, cũ hic & ille sint æquales.

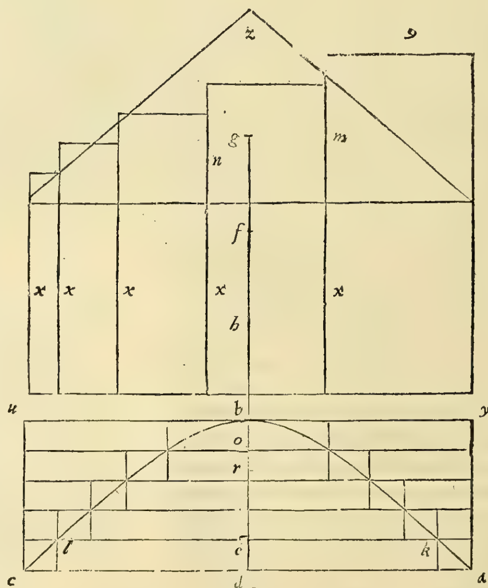
SI à conoidali rectangulo duæ portiones abscindantur planis utcunque ductis, portiones habebunt eam inter se proportionem, quam quadrata axium inter se retinuerint. 26

Abscindantur itaque duæ à conoidali rectãgulo portiones, utcunque contigerit. Esto autem k æqualis axi alterius portionis: l uero axi alterius item æqualis. Demonstrandum est, quod portiones eam habent proportionem inter se, quam habent quadrata k & l. sectio itaque conoidali à plano secundum axem ducto, portionis esto sectio a b c, coni rectanguli sectio: axis autem b d. & assumatur b d æqualis ipsi k, & secundum d planũ educatur super axem erectum: portio autem conoidalis, quæ basim habet circulum circa diametrum a c descriptũ, axem uero b d, æqualis est portioni a-



xem habenti æqualem ipsi k. Siquidem igitur ipsa k sit æqualis ipsi l, manifestū est portiones quoq; inter se esse equales. nam utraq; ipsarum erit æqualis uni & eidē, & quadrata ipsarum l k æqualia. quare eandem habebunt proportionem portiones, quam habuerint quadrata axium. Si aūt l non sit æqualis ipsi k, esto æqualis ipsa l ipsi b h. & per punctum h ducatur planum erectum super axem: portio autem, quæ basim habuerit circulum circa diametrum e f descriptum, axem autem b h, æquatur portioni habenti axem æqualem ipsi l. Describantur iam coni, qui bases habeāt circulos circa diametros a c, e f constitutos, uerticem uero b punctū. Conus aūt habens axem b d, ad conū habentē axem b h, proportionem habet cō positam ex ea quam habet a d ad h e potestate, & ex ea quam habet d b ad b h longitudine. quam autem proportionem habet d a ad h e potestate, eam habet b d ad b h longitudine. conus igitur habēs axem b d, ad conum habentem axem b h, habet proportionem compositam ex ea quam habet d b ad b h, & ex ea quam habet d b ad b h. hæc autem est eadem illi quam habet quadratum d b, ad quadratū h b. quam proportionem autem habet conus axem habens b d, ad conum habentem axem h b, hanc habet eandem portio conoidalis habens axem b d, ad portionem habentem axem h b. utraq; enim utriq; est sesquialtera: & portioni axem habenti b d æquatur portio conoidalis axem habens æqualem ipsi k. portioni autem habenti axem ipsam h b, æquatur portio conoidalis axem habens æqualem ipsi l, & ipsi b d æquatur k, ipsi uero h b æquatur ipsa l. Clarum est ergo, quod portio conoidalis axem habens æqualem ipsi k, eandem habet proportionem ad portionem conoidalis habentem axem æqualem ipsi l, quam quadratum k ad quadratum l.

27 QVælibet portio conoidalis obtusianguli abscisa plano super axem erecto, habet ad conum, qui eandem basim & axem cum portione teneat eundem, eam proportionem, quā habet utraque simul linea quæ sit æqualis axi portionis, et ea quæ sit tripla lineę ad axem adiectæ, ad lineā his utrisque æqualem, axi portionis & lineæ duplæ, ad lineam axi adiectam.



Esto aliqua portio conoidalis cuiuspiam obtusianguli, abscisa plano super axē erecto, & ipso conoidali secto à plano secundum axem ducto. eius sectio sit a b c coni obtusianguli sectio: plani autem abscindētis portionem esto a c, & axis item portionis esto b d: linea uero axi adiecta, sit b h, & ipsi b h sit æqualis f h & g f. Demonstrādum est itaq;, portionem ad conum eandem basim cum portione, & axem eundem habētem, eam habere proportionem, quam g d ad d f. Esto itaq; cylindrus quidam, eandem basim, & axem cum

A Seu semi-diam-transv.

cum portione eundem habens: eius uero latera esto u a, c y. Esto item conus quis in quo z, & hic ad conum habentem eandem basim cum portione, & axem b d, eam habeat proportionem, quam habet g d ad d f. Dico tunc portionem conoidalis æqualem esse cono z. Quod si non fuerit ei æqualis, aut maiorem eo, aut minorem esse necesse est. Esto primum, ut sit ea maior si fieri potest: inscribatur autem in portione quædam figura solida, & altera circumscribatur ex cylindris æquam altitudinem habentibus composita, hoc pacto, ut figura circumscripta super inscriptam minus eo addat, quo conoidalis portio superat conum z. educantur iam plana omnium cylindrorum ad superficiem cylindri, qui habeat basim circulum circa diametrum a c constitutum, & axem b d: erit tunc hic cylindrus totus distributus in cylindros numero ęquales cylindris, qui in figura inscripta sunt extructi: magnitudine uero æquales maximo illorum. & quoniam circumscripta figura minus excedit inscriptam, quàm portio conum z, & figura circumscripta maior est portione, constat inscriptam quoque cono z esse maiorem. esto itaque b r pars tertia ipsius b d, erit ergo g d tripla ad h r. Et quoniam cylindrus qui basim habet circulum circa diametrum a c descriptum, axem uero b d, ad conum eandē basim & axem eundem habentem, habet eam proportionem quam g d ad h r: dictus autem conus habet ad z conum, eam quam f d ad g d: proportionibus non mensis similiter permutatis, habebit dictus cylindrus ad z conum eādem proportionem, quam f d ad h r. Sunto autem lineæ positæ, in quibus x numero æquales portionibus eis quæ sunt in b d linea recta, magnitudine uero unaquæque æqualis f b: & ad unamquamque ipsarum accedat spacium, superans alterum forma quadrata, & eorum maximum esto in quo f b d, minimum uero quod sub f r b continetur: latera autem excessuum sese æqualiter excedūt. nam illæ sunt istis æquales, quæ in b d linea recta sese pariter excedunt. Et esto maximi excessus latus, in quo m æquale b d, minoris uero æquale b i. Sunto item alia spacia in quibus 9 multitudine istis æqualia, magnitudine uero unumquodque æquale maximo quod cōtinetur sub f d b. at uero cylindrus qui basim habet circulum circa a c diametrum constitutum, axem autem d e, ad cylindrum qui basim habet circulum circa k l diametrū descriptum, axem aūt d e, eam habet proportionem, quam d a ad k e potestate. Hæc autem eadem est ei quam habet spaciū contentum sub f d, b d, ad cōtentum sub f e, b e. in omni enim coni obtusianguli sectione hoc contingit. nam dupla eius quæ adiecta est, hoc est eius quæ ex centro obliquū est formæ latus, & spacium x m, est æquale ei quod continetur sub f d, b d. ei uero quod sub f e, b e ęquale est spacium x n. est enim b d linea æqualis ipsi m. b e autem ipsi n æqualis. Cylindrus igitur qui basim habet circulum circa diametrum a c descriptū, axem autem d e, habet ad cylindrum qui basim habet circulum circa diametrum k l constitutum, axem uero d e, eam proportionē, quam spacium 9 ad x m. Similiter autem ostendetur & unusquisque aliorum cylindrorum qui in toto cylindro existūt, axem æqualem habens ipsi d e, habere ad cylindrum existentem in figura inscripta, habentem eundem axem, eam proportionem, quam habet spacium 9 ad sibi correspondens, eorum quæ ad ipsam n x accesserunt, cætera excedens quadrato. Sunt autem quędam magnitudines hi cylindri, qui in toto cylindro existūt, quorum unusquisque axem habet æqualem ipsi d e: & aliæ item magnitudines ea spacia, quæ sunt in quibus 9 numero, illis æquales quæ secundum binas & binas eandem habent proportionem, cum cylindri sint inter se æquales, & spacia similiter in quibus 9 inuicem æqualia. Referūtur autem cylindrorum quidam ad alios quosdam cylindros, qui in figura inscripta existunt: extremus autem nullo pacto refertur: & spacia in quibus 9 ad alia spacia, ea scilicet quæ ad m x accesserūt, excedentia forma quadrata, similia sunt in proportionibus: extremū autem nullo pacto refertur, manifestum est, quod omnis cylindri qui in toto cylindro exi-

ſtunt, ad omnis cylindros in figura inſcripta conſtitutos eam habebũt proportionem, quã ſpacia in quibus 9 ad omnia exceſſa, dempto maximo. Oſtenſum eſt autem, quod omnia ſpacia in quibus 9, ad omnia acceſſa dempto maximo maiorem habent proportionem, quàm m x ad eam quæ ſit æqualis utriſq; ſimul iſtis, dimidiæ x & tertiæ parti ipſius m. quare & totus cylindrus ad figuram inſcriptam maiorem habet proportionem, quàm f d ad h r, quam totus cylindrus oſtenſus eſt habere ad conum z. totus ergo cylindrus maiorẽ habet proportionem ad figuram inſcriptam, quàm ad conum z. quare ſequitur, conum z maiorem eſſe figura inſcripta: quod quidẽ eſſe nõ poteſt. nam ſuprà oſtenſum fuit, figuram inſcriptã cono z eſſe maiorem: non eſt igitur portio conoidalis maior cono z. Neq; utiq; minor. Eſto enim, ſi eſſe poteſt. rurſus inſcribatur portioni figura ſolida, & altera circumſcribatur ex cylindris altitudinem æqualem habentibus compoſita, hoc pacto, ut circumſcripta figura addat ſuper inſcriptam minus eo quo conus portionem excedit, & cętera præparentur ut prius. Quoniam igitur figura inſcripta portione minor exiſtit, & circumſcripta inſcriptam minus excedit quàm conus z portionem, manifeſtum eſt, circumſcriptam figuram cono z eſſe minorem. Rurſus primus cylindrus eorum qui in toto cylindro exiſtunt, qui habet axem d e, ad primum cylindrum in figura circumſcripta conſtitutum, habentem axem d e, eam habet proportionem quam ſpacium 9 ad m x. nam utrumq; eſt æquale: & cæterorum cylindrorum unuſquiſq;, eorum qui ſunt in toto cylindro, habens axem æqualem d e, ad cylindrum qui eſt in circumſcripta figura, in eandem partem exeũtem, & eundem axem habentem, eam habebit proportionem, quam ſpaciũ 9 ad ſpacium ſibi correſpondens, quod eſt adiectum ad m x ſimul cum exceſſu: propterea quod unumquodq; circumſcriptorum, dempto maximo, æquale eſt unicuiq; inſcriptorum ſimul cum maximo. Habebit igitur totus cylindrus ad figuram circumſcriptã eam proportionem, quã omnia ſpacia ad omnia adiecta, ſimul cũ exceſsibus. Oſtenſum eſt rurſus, omnia ſpacia 9 ad omnia alia minorem habere proportionẽ, quàm m x ad eam quæ ſit æqualis utriſq;, ſimul dimidiæ x & tertię parti m, quare & totus cylindrus ad circumſcriptam figuram minorem habebit proportionem, quàm f d ad h r. uerum ſicut f d ad h r, ſic totus cylindrus ad conum z. minorem igitur habebit proportionem ipſe cylindrus ad figuram circumſcriptam, quàm ad conum z. quare ſequitur, figuram circumſcriptam cono z eſse maiorem: quod quidem eſſe non poteſt. nam figura circumſcripta oſtenſa eſt eſſe minor cono z. non eſt igitur portio conoidalis cono z minor. Cum igitur neque maior, neq; minor eſſe poſſit, conſtat propoſitum eſſe demonſtratum.

28 SI portio conoidalis obtuſianguli abſcindatur plano etiam ſuper axem non erecto, eam proportionem habebit ad abſciſſorem coni, baſim eãdem & axem eundem cum portione habentem, quam habent utraq; ſimul, linea æqualis axi portionis, & tripla ad adiectã axi, ad eam quæ ſit æqualis utriſq; ſimul, axi, & eius quæ dupla ſit ad axi adiectã. Eſto portio conoidalis obtuſianguli abſciſa plano ſuper axem non erecto: ipſa uero figura alio plano abſciſa ſecũdum axem ducto, erecto ſuper planum abſcindens portionem figuræ quidem: eſto ſectio a b c coni obtuſianguli ſectio, plani autem abſcindentis portionem eſto linea recta c a: uertex autem coni complectentis conoidale eſto punctum h, & ducatur u y per b æquediſtans ipſi a c, & contingens coni ſectionem in puncto b, & ducatur a b h ad b coniungens, & educatur in longum: diuidet propter eadem f æqualia ipſam a c, diuidet uerſus eam partem a c, & erit uertex portionis b punctum, axis autem b d. adiecta uero axi b h: ipſi autem b h æqualis eſto h f & f g, ab ipſa uero u y exeat planum æquediſtans plano ſecundum a c educto. continget autem conoidale in puncto b, & erit planum ſecũdum a c eductum non ſuper axem erectum, & diuidet conoidale cuius ſectio erit coni acutianguli ſectio, diametros autem

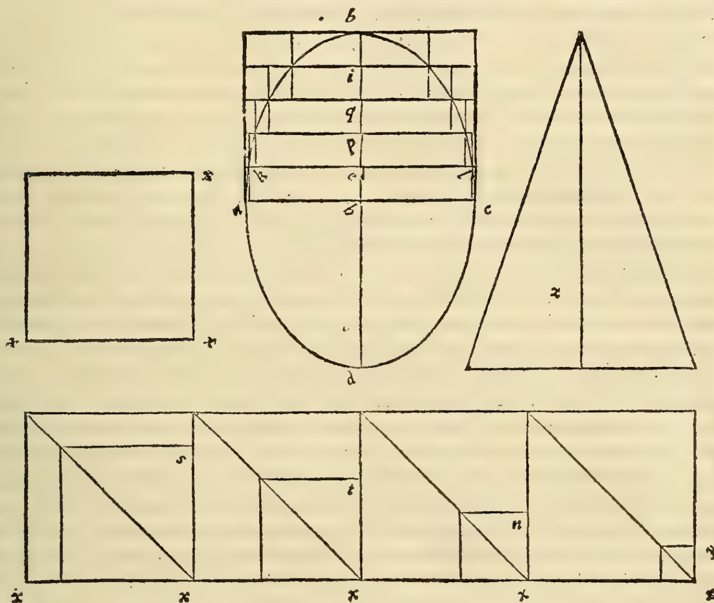
eius

eius maior ea, cum sit alia coni acutianguli sectio circa diametrum a c, & recta linea b d à centro erecta in plano quod est à diametro erectum, super planū in quo est coni acutianguli sectio. Potest igitur cylindrus effingi, qui axem habeat in linea recta b d, in cuius superficie sit coni acutianguli sectio circa diametrum a c cōstituta. hoc igitur effecto, erit quoddā cylindri frustū, eandem habēs cū portiōe basim, & axem eundem: altera uero eius basis erit planū, quod est secundum u y ductum. Item poterit etiam conus extrui, qui uerticem habeat pūctum b, in cuius superficie erit coni acutianguli sectio circa diametrum a c cōstructa, & axis idem. Hoc inuento, ostendendum est portionem conoidalis ad coni abscisorem dictum, eam habere proportionem, quam g d ad d f. sicut enim g d ad d f, ita sit conus z ad abscisorem coni. Dico portionem conoidalis esse æqualem cono z. Si igitur non est æqualis portio conoidalis cono z, si esse potest, sit maior. inscribatur autem figuræ conoidali figura solida, & altera circumscribatur ex frustis cylindri eandem altitudinem habentibus composita, hac ratione, ut circumscripta figura super inscriptam minus addat, quàm portio conoidalis super conum z. Cum igitur figura circumscripta sit maior portione, & minus excedat inscriptam figuram, quàm portio conum z: manifestum est sequi, inscriptam figuram cono z esse maiorem. educantur autem plana frustorum omnium, quæ in figura sunt inscripta, exibunt ad superficiem frusti basim habentis cum portione eandem, & axem eundem: & esto b r tertia pars ipsius b d, & cętera omnia similiter superioribus disponantur. Rursus itaq; primum frustum eorum quæ sunt in toto cylindri frusto, quod habet axem d e, ad primum frustum in figura inscripta constitutum, habens axem d e, eā proportionem habet, quam quadratum a d ad quadratum k e. nam frusta æqualem altitudinem habentia eam habent inter se proportionem, quam eorum bases habere contigerit: cum sint coni acutianguli sectiones similes, habebunt inuicem eam proportionem, quam earum diametri eiusdem rationis habuerint potestate: quam autem habet quadratum a d proportionem ad quadratum k e, eam habet id quod sub f d, d b continetur, ad id quod sub f e, e b: cum f d sit ducta per h, secundum eas quæ proxime concidunt & concurrunt: ipsæ uero a d, k e æquedistantes sunt eis, quæ secundum b contingunt. Est autem id quod sub f d, d b,

d b, continetur æquale ſpacio 9: quod autem ſub f e, e b, æquale x n. Habet igitur primum fruſtum in toto fruſto exiſtens, quod axem habet d e, ad primum fruſtũ in figura inſcripta conſtitutum, quod axem habet d e, eam proportionem, quam ſpacium 9 ad x n, & aliorum unumquodq; in fruſto toto exiſtentium, axem habẽtium æqualem ipſi d e, ad fruſtũ quod exiſtit in figura inſcripta, illi correſpondẽs, & axem habens æqualem ipſi d e, eam proportionem, quam 9 ſpacium ad ſibi correſpondens, eorum quæ acceſſerunt ad n x, quæ ſeſe excedunt forma quadrata. Similiter ſunt quædam magnitudines, quæ ſunt in toto fruſto: & aliæ rurſus magnitudines, ſpacia uidelicet, in quibus 9 numero quidem ęquales ipſis fruſtis, & binæ, eandem habent proportionem ipſis fruſtis. Dicuntur autem fruſta ad alia fruſta in figura inſcripta conſtituta, extremum autem fruſtum nullo pacto dicitur: ſpacia uero 9 ad alia ſpacia dicuntur, ad ea quæ ad m x acceſſerunt quadrata forma ſuperantia, ſimilia ſimilibus proportionibus. extremum aũt nullo pacto dicit̃. Conſtat igitur quod omnia fruſta ad omnia eandem habebunt proportionem, quã omnia ſpacia ad omnia adiecta, dẽpto maximo. Omnia uero ſpacia ad omnia adiecta, dempto maximo, maiorem habent proportionem, quàm n x ad eam quæ ſit utriſque ſimul æqualis, dimidiæ x & tertiæ parti m. quare & maiorẽ ea quam habet f d ad h r: maiorem ergo habet proportionem fruſtum totum ad figuram inſcriptam, quàm ad conum z. quod quidem eſſe non poteſt. Nam figura inſcripta fuit demonſtrata maior eſſe cono z. Non eſt igitur conoidalis portio cono z maior. Si autem ponatur conoidalis portio minor eſſe cono z, figura ſolida in portione deſcripta, & alia circumſcripta, ex cylindris altitudinem æqualem habentibus compoſita, ita ut circumſcripta inſcriptã eo minus excedat, quo conus z ponitur excedere portionem. Rurſus oſtendetur, ſimiliter circumſcriptã figuram cono z eſſe minorem, & fruſtũ cylindri quod baſim habeat cum portione eandem, & axem eundem, ad figuram circumſcriptam minorem habere proportionem, quàm ad conum z: quod eſſe non poteſt. Non eſt igitur portio conoidalis maior cono z, neq; minor eſſe poteſt. Neceſſe ergo eſt, æqualem eſſe. quare patet propoſitum.

29 CUiuslibet figuræ ſphæroidis plano per cẽtrum ducto, & erecto ſuper axem ſectæ, dimidium ſphæroidis duplum eſt coni qui baſim habet eandem cum portione, & axem eundem. Eſto ſphæroidis portio plano per centrum ducto, & erecto ſuper axem abſciſſa: ſecta uero ſphæroide alio plano ſecundum axem ducto, huius portionis ſectio ſit a b c d, coni acutianguli ſectio: eius autem diametros & axis ſphæroidis b d, centrum uero h. nihil autem intererit ſiue b d ſit maior diametros, ſiue minor ſectionis coni acutianguli: plani uero abſcindentis figuram ſectio ſit a c linea recta, & ipſa tranſibit per h, & rectos angulos faciet ad b d, cum planum ponatur per centrum duci, & ſuper axem eſſe erectum. Oſtendendum itaq;, dimidiam ſphæroidis portionem, quæ baſim habet circulum circa diametrum a c deſcriptum, uerticem uero punctum b, duplam eſſe coni eius qui baſim habeat cum portione eandem, & axem eũdem. Eſto igitur conus quis, in quo z duplus coni baſim habentis cum portione eãdem, & axem eundem, ſcilicet h b. Dico dimidium ſphæroidis cono z eſſe æquale. Si enim dimidium dictum dicatur cono dicto minime æquale eſſe, eſto primũ ſi fieri poteſt maius eo, & iam inſcribatur portioni dimidiæ ſphæroidis figura ſolida, & altera circumſcribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus compoſita, ita ut circumſcripta inſcriptam minus excedat eo quo dimidium ſphæroidis conum ſuperat. Cum igitur circumſcripta figura maior ſit dimidio ſphæroidis, & minus excedat figuram inſcriptam, quàm ſphæroidis dimidium excedat conum z, ſequitur figuram portioni inſcriptam cono z eſſe maiorem. Eſto iam cylindrus, qui baſim habeat circulũ circa diametrum a c conſtitutũ, axem uero b h. Quoniã igitur hic cylindrus triplus

plus habetur coni, qui basim habeat cum portione eandem, & axem eundem: conus uero z eiusdem coni duplus existit, constat cylindrum hunc cono z sesqui alterum haberi. Educantur itaq; plana omnia cylindrorum, ex quibus figura por



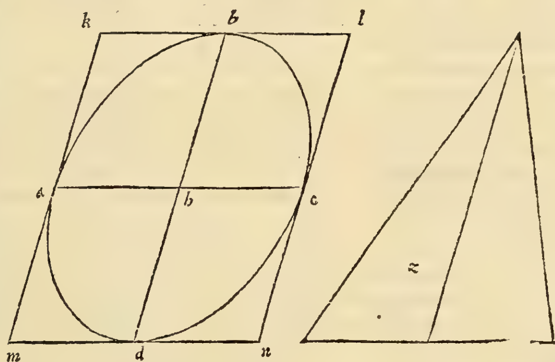
tioni inscripta conficitur, exibunt ad superficiem cylindri basim habentis cũ portione eandem, & axem eundem. erit iam totus cylindrus in cylindros distributus, qui multitudine sunt æquales in figura inscripta constitutis: magnitudine autem maximo illorum æquales. Sunto iam lineæ positæ, in quibus x multitudine æquales portionibus lineæ b h rectæ, magnitudine uero unaquæque æqualis b h: & ab unaquaq; quadratum constituatur, ab ultimo uero quadrato auferatur gnomon qui latitudinem habeat æqualem b i. erit autem hic æqualis ei quod continetur sub b i, i d: à quadrato autem ei proximo auferatur gnomon, latitudinem habens duplam ipsius b i: erit & hic ęqualis contento sub e q, q d. & perpetuò à quadrato sequente gnomon auferatur, latitudinem habens pręcedentis eum gnomonis, & ante eum ablati portionem maiorem: eritq; utiq; eorum unusquisq; æqualis ei quod sub portionibus b d continetur, quarum altera portio æqualis fuerit latitudini gnomonis. erit etiam à quadrato secundo reliquum quadratum, latus habens æquale h q. Cylindrus autem primus eorum qui in toto cylindro constant, axem habens h e, ad primum cylindrum eorum qui in figura inscripta continentur, eundem axem h e habentem, eam habet proportionem, quam quadratũ a h ad quadratum k e: quare & quam contentum sub b d, d h, ad contentum sub b e, e d: habet igitur cylindrus ad cylindrum eam proportionem, quam quadratum primum habet ad gnomonem, à quadrato secundo ablatum. Similiter autem & aliorum cylindrorum unusquisq;, qui axem habeat æqualem ipsi h e, ad cylindrum in figura inscripta cõstitutum, axem cum eo eundem habentem, eam pro-

m portio-

portionem habet, quam quadratum sibi similiter ordinatũ, ad gnomonem à quadrato sibi proxime subsequenti ablatum: erunt iam quædam magnitudines, uidelicet cylindri qui sunt in toto cylindro, & item aliæ, scilicet quadrata linearum x x æquales multitudine cylindris: & binæ & binæ eandem habent proportionem. Dicuntur autem cylindri ad alias magnitudines, ad cylindros uidelicet in figura inscripta constitutos: extremus nullo pacto dicitur. & quadrata quoq; ad alias magnitudines, ad gnomones à quadratis ablatos, similia similibus relata eisdem proportionibus: ultimũ autem quadratum nullo pacto dicitur. Omnis igitur cylindri in toto cylindro comprehensi, ad omnes cylindros alios eandem habebunt proportionem, quam quadrata omnia ad omnis gnomones ab eis ablatos. quare cylindrus qui basim habet eandem cum portione, & axem eũdem, ad figuram inscriptam eam habet proportionem, quam quadrata omnia ad gnomones omnis ab eis ablatos. quadrata uero omnibus gnomonibus, qui ab ipsis ablati fuerunt, sunt plusquam sesquialtera: sunt enim quædã lineæ positæ hæ x r, x s, x t, x y, x u, æquali sese excedentes, & minima earum æquatur excessui. Sunt autem & aliæ lineæ, in quibus x x multitudine quidẽ istis æquales, magnitudine uero unaquæq; æqualis earum maximæ. quadrata igitur quæ ab illis efficiuntur, quarum unaquæq; æqualis est maximæ, ad quadrata omnia quæ ab illis nascũtur, quæ sese æquali excessu superãt, minus quàm tripla esse probatum est: ad reliqua uero, dẽpto maximo, plusquam tripla existunt. hoc enim in his quæ circa elicas sunt exposita, demonstratum est. Quoniam autem omnia quadrata minus sunt quàm tripla, ad alia quadrata quæ ab ipsis ablata fuerunt, manifestum est quod residuorũ erunt plusquam sesquialtera: quare erunt omnium gnomonum plusquam sesquialtera. quare & cylindrus qui basim habet eandem cum portione, & axem eũdem, est plusquã sesquialter figuræ inscriptæ: quod quidem esse nõ potest. Nam coni z sesquialter existit. figura uero inscripta ostensa est maior esse cono z. non est igitur dimidium sphæroidis cono z maius: neq; profectò minus. Nam esto si fieri potest, minus. Rursus inscribatur dimidio sphæroidis figura solida, & altera circumscribatur ex cylindris æquam altitudinem habentibus composita, ita ut circumscripta super inscriptam minus addat quàm conus z super dimidium sphæroidis: & reliqua sint prioribus similiter disposita. Quoniam igitur figura inscripta portione minor existit, sequitur circumscriptam figuram cono z esse minorẽ. Rursus primus cylindrus eorum qui in toto cylindro existunt, qui habet axem h e, ad primum cylindrum eorum qui in figura circumscripta cõstructi sunt, qui habet axem e h, eam habet proportionem, quam quadratum primum ad ipsum met. Secundus autem cylindrus eorum qui in toto cylindro, habens axem e p, ad secundum cylindrum eorum qui in circumscripta figura existunt, habentem axem e p, eam habet proportionem, quam secundum quadratum ad gnomonẽ ab eo ablatum, & reliquorum cylindrorum, qui in toto cylindro continentur unusquisq; qui axem habeat æqualem h e, ad cylindrum sibi coniunctum, eorum qui sunt in figura inscripta, eandem habet proportionem, quam habet quadratum sibi correspondens ad gnomonem ab eo ablatum. Omnis igitur cylindri in toto cylindro constituti, ad omnis cylindros in figura circumscripta comprehẽsos, eam habebunt proportionem, quam quadrata omnia ad id quod primo quadrato æquale est, & ad omnes gnomones à reliquis quadratis ablatos: & quadrata omnia sunt minus quàm sesquialtera eius quod primo quadrato æquale existit, & gnomonum à reliquis ablatorũ: propterea quod quadratis quæ à lineis sese æqualiter excedentibus sunt producta, dempto quadrato à maxima earũ producto, plusquam tripla existunt. Cylindrus igitur qui basim cum portione habet eandem, & axem eũdem, est minor quàm sesquialter figura circumscripta: quod quidem esse non potest, nam cono z sesquialter habetur: circumscripta uero figura

ra oſtenſa eſt cono z minor eſſe: non erit igitur dimidium ſphæroidis cono z minus: uerum neq; maius. neceſſe eſt igitur eſſe æquale.

SI figura ſphæroidis plano ſecetur per centrum ducto, ſuper axem non erecto, dimidium ſphæroidis ſimiliter duplum exiſtet abſciſoris coni, qui quidem abſciſor baſim habeat cum portione eandem, & axem eundem. Secetur itaq; portio 30 ſphæroidis, ſecta ipſa ſpheroide alio plano ſecundũ axem ducto, & ſuper planum ſecans erecto, ipſius figuræ ſectio ſit a b c d, coni acutiãguli ſectio: cuius centrum ſit h: plani autẽ abſcindentis figurã eſto a c linea recta: erit ipſa per h ducta, cum planum poſitum ſit per centrum duci. erit igitur quædam coni acutianguli ſectio circa diametrum a c conſtituta. nam planum abſcindens poſitum eſt, non ſuper axem erectum eſſe. Ducantur iam quædam k l, m n, æquediſtantes ipſi a c, & contingentes ſectionem coni acutianguli in punctis b, d: & ab ipſis k l, m n plana prodeant æquediſtantia plano ſecundum a c ducto, quæ & ipſam ſectionem ſphæroidem contingent in punctis b, d: & quæ iungit b d linea tranſibit per h, & erunt portionum uertices puncta b, d: axes uero b h, h b. Poteſt itaq; cylindrus effingi, qui axem habeat b h, in cuius ſuperficie ſectio coni acutianguli continetur, quæ circa diametrum a c eſt conſtituta. eo autem effecto, erit quoddam cylindri fruſtum, quod eandem habeat cum dimidia ſphæroide baſim, & axem eundem. Rurſus & conus effici poteſt, qui uerticem habeat punctum b, in cuius ſuperficie ſectio coni acutianguli exiſtet à diametro a c. eo pacto erit abſciſor coni, qui eandem cum portione baſim, & eũdem axem habebit. Dico iam, quòd ſphæroidis dimidium huius coni duplum exiſtet.



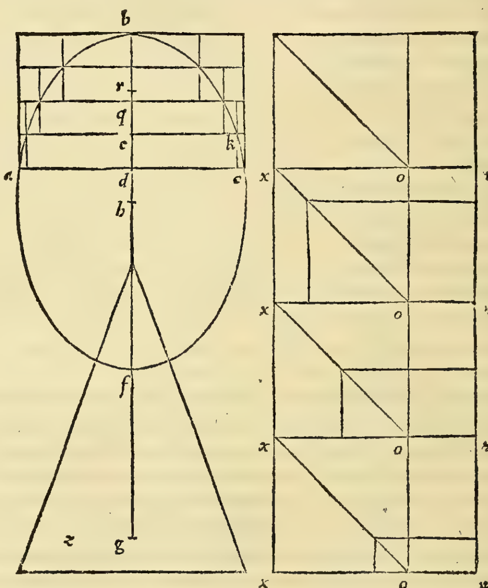
Eſto conus z duplus ad abſciſorem coni. ſi dimidium ſphæroidis dicatur cono z non eſſe æquale, eſto primum ſi fieri poteſt maius. inſcribatur autem in dimidia ſphæroide figura ſolida, & altera circũſcribatur ex cylindricis fruſtis altitudinem æqualem habentibus compoſita, hoc pacto ut figura circumſcripta excedat figuram inſcriptã, minus eo quo dimidia ſpheroidis excedit conum z. Iam ſimili ratione qua ſuperius factum eſt, oſtendetur figuram inſcriptam cono z maiorem exiſtere, & fruſtum quod baſim habeat cum portione eandem, & axem eundem cono z ſeſquialterum exiſtens, figura inſcripta dimidiæ ſphæroidi maius quàm ſeſquialterum eſſe, quod eſſe non poteſt. non erit ergo dimidia ſphæroidis cono z maior. Si uero minor illo ponatur eſſe, inſcribatur dimidiæ ſphæroidi figura ſolida, & altera circumſcribatur ex fruſtis cylindri æqualem altitudinem habentibus compoſita, ita ut circumſcripta excedat inſcriptam minus eo quo conus z excedit dimidiam ſphæroidem. Rurſus ſimiliter ſuperioribus demonſtrabitur, figuram circumſcriptam minorem eſſe cono z, & fruſtum cylindri quod baſim habeat cũ portione eandem, & axem eundem, cono z ſeſquialterum eſſe: circumſcriptæ uero figuræ minus quàm ſeſquialterum haberi, quod eſſe non poteſt. Conus itaq;

m z z, neq;

z, neque minor dimidia sphæroide poterit, neque maior haberi. æqualis igitur esse illi necessario reliquitur, quod demonstrare uolebamus.

31 CVIuscunque figuræ sphęroidis plano sectæ non per centrum ducto, sed super axem erecto, minor portio ad conum qui eandem habeat cum portione basim, & axem eundem, eam proportionem habere probatur, quam utraque simul dimidia axis sphæroidis, & axis maioris portionis, ad axem maioris portionis.

Esto itaque portio sphæroidis abscissa, plano non per centrū ducto, sed super axem erecto: ipsa uero sphæroides, secta plano alio secundum axem ducto, ipsius figurę sit sectio a b c, coni acutiāguli sectio: diametros autē sectionis, & axis sphæroidis sit b f, centrum autem h: plani autem abscindentis portionem esto sectio a c linea recta. faciet autem cum ipsa rectos angulos ad b f, cū planum sit super axem erectum, ut ponitur. esto autem portio abscissa, cuius uertex sit punctum b minor dimidia sphæroide figura, & ipsi b h æqualis esto f g. Ostendendū est, quod portio cuius uertex est



punctum b, ad conum qui basim habet cum portione eandem, & axem eundem, habet eam proportionem, quam d g ad d f. Esto itaque cylindrus qui eandem habeat basim cum portione minori, & axem eundem: esto item conus, in quo z ad conum basim eandem habentem, eam habeat proportionem, quam d g ad d f. Dico iam conum z portioni esse æqualem illi, quæ uerticem habeat punctum b. nā si non est æqualis, esto primò si fieri potest, minor. Inscribatur iam portioni figura solida, & alia circumscribatur, ex cylindris altitudinem æqualem habentibus composita, hoc pacto, ut circumscripta inscriptam minus excedat, quàm sphæroidis portio conum z. Cum igitur circumscripta figura portione maior existat, & inscriptam minus excedat, quàm portio conum z, sequitur figuram inscriptam cono z maiorem haberi. Esto deinde b r tertia pars ipsius b d: cum igitur ipsius b h sit tripla b g, & d g ipsius h r tripla erit. cylindrus itaque qui basim habeat cum portione eandem, & axem b d, ad conum habentem eandem basim, & axem eūdem, habebit eam proportionem, quam habet d g ad h r. Dictus autem conus ad conū z eandem habet proportionem, quam d g ad d f. Habebit igitur cylindrus, qui basim habeat cum portione eandem, & axem eundem, proportionibus dissimiliter ordinatis, eam proportionem ad conum z, quam d f ad h r. Sunto itaque lineæ positæ, in quibus x n multitudine quidem æquales portionibus ipsius b d, magnitudine uero unaquæque ipsi d f. sit autem & unaquæque x o ęqualis ipsi b d: erit igitur unaquæque

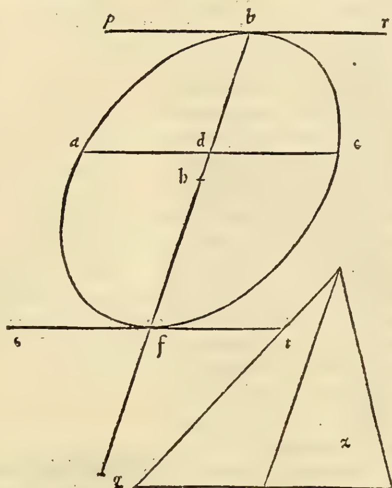
naquæque n o dupla ipsius h d. Accedat igitur ad unamquanque earum spacium quoddam, cuius latitudo sit æqualis ipsi b d, ita ut sint diametri quadratorum diametros habentium. auferatur autem à primo gnomon, qui latitudinem habeat æqualem ipsi b e: à secundo uero gnomon, latitudinem habens æquam ipsi b q: & ab unoquoque eodem modo sequente spacio gnomon auferatur, latitudinem habens una parte minorem latitudine præcedentis eum gnomonis ablati. Gnomon itaque à primo spacio ablatus, æqualis erit ei quod sub b e, e f continetur: & reliquum spacium accedens ad ipsam n o, superat forma quadrata latus excessus habens æquale ipsi d e: gnomon uero à secundo spacio ablatus, æquatur ei quod cõtinetur sub f q, q b: & reliquum spacium quod adiacet ipsi n o, excedens forma quadrata, & reliqua istis similiter. His sic se habentibus, plana omnium cylindrorum ex quibus inscripta figura componitur, ad superficiem cylindri basim habentis cum portione eandem, & axem eundem educantur. Iam totus cylindrus in cylindros distributus erit, multitudine æquales illis qui sunt in figura circumscripta constituti, magnitudine uero maximo illorũ æquales. Primus itaque cylindrus eorum qui sunt in toto cylindro, qui habet axem d e, ad primum cylindrum in figura inscripta constitutum, qui habeat d e axem, eam habet proportionem, quã quadratum d c, ad quadratum k e. Hæc autem est eadem ei quam habet contentum sub b d, d f, ad contentum sub b e, e f. Cylindrus igitur ad cylindrum habet eam proportionem, quam primum quadratum ad primum gnomonem, ablatũ ab eo. Similiter autem & aliotum cylindrorum, qui sunt in toto cylindro, unusquisque axem habens æqualem ipsi d e, ad cylindrum sibi coniunctum in figura inscripta constitutum, axem habentem eundem, habebit eam proportionem, quã spacium sibi correspondens, ad gnomonem ablatum ab eo. Erunt quædam magnitudines cylindri, qui sunt in toto cylindro: & aliæ item magnitudines, spacia ad n x adiecta, latitudinem habentia æqualem ipsi b d, multitudine cylindris æqualia, & bina & bina habent eandem proportionem. dicuntur autem cylindri ad alios cylindros in figura inscripta constitutos, ultimus autem nullo pacto dicitur: & spacia dicuntur ad alia spacia, ad gnomones ablatos ab eis quæque duo similis rationis in eadem proportione: ultimum uero spacium nullo pacto dicitur. Constat igitur, cylindros omnes ad alios omnes eam habere proportionem, quã omnia spacia ad omnis gnomones. Cylindrus igitur, qui basim habeat cum portione eandem, & axem eundem, ad figuram portioni inscriptã, eam habebit proportionem, quã spacia omnia ad omnes gnomones. Et quoniam erant lineæ quędam positæ æquales, in quibus n o, & ad unamquanque accessit spacium superãs forma quadrata, latera uero excessuum inter se æqualiter sese excedentia, & erãt excessus eorum æquales illarum minimæ: & alia item erant spacia ad ipsam n x adiacentia, latitudinem ipsi b d æqualem habentia, multitudine æqualia spacijs prius dictis, magnitudine uero unumquodque maximo illorum æquale, manifestum est quod omnia simul spacia quorum unumquodque æquale est maximo, ad omnia alia spacia minorem habent proportionem, quàm n x ad lineam æqualem utrisque simul, dimidiæ n o, & tertiæ parti x o. Constat igitur, eadem spacia ad omnis gnomones maiorem habere proportionem, quàm n x ad lineam æqualem utrisque simul, dimidiæ n o, & duabus tertijs ipsius x o. Cylindrus ergo qui basim habet cum portione eandem, & axem eundem, ad figuram portioni inscriptam, maiorem habet proportionem, quàm n x ad lineam æqualem utrisque simul, dimidiæ n o, & duabus tertijs x o. Est autem n x æqualis d f, dimidia uero n o æqualis ipsi d h: ipsis autem tertijs ipsius x o, æqualis est ipsa d r. totus ergo cylindrus ad figuram portioni inscriptã, maiorem habet proportionem, quàm d f ad h r: quàm uero proportionem d f habet ad h r, eandem ostensũm est habere cylindrum ad conum z: maiorem ergo proportionem habebit cylindrus ad figuram portioni

 inscriptam,

inſcriptam, quàm ad conum z, quod eſſe non poteſt: nam oſtenſum eſt, figuram inſcriptam cono z eſſe maiorem. Non eſt ergo portio ſphæroidis cono maior. Verum ſi fieri poteſt, eſto minor eodem. Rurſus autem inſcribatur portioni figura ſolida, & altera circumſcribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus compoſita hoc pacto, ut circumſcripta excedat inſcriptam minus eo quo conus z excedit portionem, & cætera ſuperioribus eadem diſponantur. Cum itaque inſcripta figura ſit portione minor, & circũſcripta minus excedit inſcriptam, quàm conus z portionem: ſequetur ex hoc, figuram circumſcriptam cono z minorem eſſe. Item primus cylindrus eorum qui ſunt in toto cylindro, axem habens d e, ad primum cylindrum in figura circumſcripta conſtitutum, & axem eandem habẽtem, eam habet proportionem, quam ultimum ſpacium eorum quæ ad x n adiacent, latitudinem habentiũ æqualem ipſi b d ad ſe ipſum. utraq; enim ſunt æqualia. & ſecundus cylindrus eorum qui ſunt in cylindro toto, axem habens æqualem ipſi d e, ad cylindrum ſibi coniunctum in figura circumſcripta conſtitutum, eam habet proportionem, quam ſecundum ſpacium eorum quæ ipſi n x adiacẽt, latitudinem ipſi b d æqualem habentium, habet ad gnomonem ablatum ab eo, & aliorum cylindrorum in toto cylindro conſtantium, qui axem habent ipſi d e æqualem: unuſquiſq; ad cylindrum ſibi coniunctum in figura circumſcripta conſtitutum, eam habet proportionem, quam ſpacium ſibi correſpondens eorũ quæ ad n x adiacent, ad gnomonem ablatum ab eo ante ultimum dictum. Omnes igitur cylindri, qui in toto cylindro conſiſtunt, ad omnis cylindros in figura circumſcripta conſtitutos eam habebunt proportionem, quam omnia ſpacia ad n x adiacentia, ad ſpacium æquale ſpacio ultimo poſito, & gnomonibus ablatis ab alijs eadem ratione, ut ſuprà factum eſt. Cum igitur oſtenſum ſit, ſpacia omnia ad n o adiacentia, ad ſpacia omnia excedentia forma quadrata, dẽpto maximo, maiorem habere proportionem, quàm x n ad lineam æqualem utriſq; ſimul, dimidiæ n o, & tertiæ parti x o, conſtat eadem ſpacia ad reliqua quæ ſunt æqualia ultimo ſpacio poſito, & gnominibus qui à reliquis ſunt ablati, minorem proportionem habere, quam n x ad lineam æqualem utriſq; ſimul, dimidię n o, & duabus tertijs ipſius x o. Vnde ſequitur, cylindrũ quoq; qui baſim habeat cum portione eandẽ, & axem eundem, ad figuram circumſcriptam minorem habere proportionem, quàm f d ad h r. quam autem proportionem habet f d ad h r, eam habet dictus cylindrus ad conum z. minorem igitur habebit dictus cylindrus ad circumſcriptam figuram, quàm ad conum z: quod quidem eſſe non poteſt. nam oſtenſum eſt, figuram circumſcriptam cono z eſſe minorem. Non eſt igitur portio ſphæroidis minor cono z: neque, ut prius oſtendimus, maior: neceſſe eſt igitur, eidem eſſe æqualem.

32 SI figura ſphęroidis plano ſecetur non ſuper axem erecto, neq; per centrum ducto, eius portio minor ad abſciſorem coni, qui baſim habeat cum portione eandem, & axem eundem, eam habebit proportionem, quam utraq; ſimul linea dimidia eius quæ iunget uertices portionum effectarum, & axis maioris portionis ad axem portionis maioris. Diuidatur itaq; aliqua figura ſphæroides, ut dictũ eſt: & diuiſa ipſa alio plano per axem ducto, erecto ſuper planũ ſecans, eſto figuræ ſectio a b c d coni acutianguli ſectio: plani autem ſecantis figuram ſit a c linea recta. & ducantur p r, s t ęquediſtantes ipſi a c, & contingentes ſectionem coni in punctis b, f: & ab eis exeant plana æquediſtantia plano ſecundum a c ducto. contingent quoq; ipſam ſphæroidem in punctis e, f: & erunt uertices portionum cõiuncti, ducta b f linea. ipſa uero tranſibit per centrum: & eſto centrum ſphęroidis & ſectionis coni acutianguli h. Quoniam igitur poſitum eſt, figuram ſecari plano ſuper axem non erecto, ſectio erit coni acutianguli ſectio, & eius diametros c d. Sumatur cylindrus axem habens in directum b d, in cuius ſuperficie erit coni acutian-

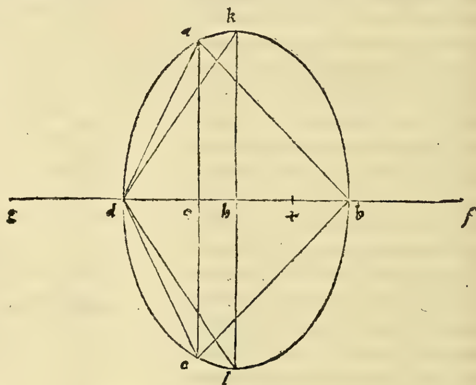
cutianguli sectio circa diametrum a c constituta: & conus qui habeat uerticē punctum b, in cuius superficie erit coni acutianguli sectio circa diametrum a c constituta: erit iam quoddam cylindri frustum, quod basim habet cum portione eandem, & axem eundem: & abscissor coni qui habeat eādem cum portione basim, & axē eundē. Ostendendum est igitur, quod portio sphæroidis, cuius uertex est punctum b, ad abscissorem coni, qui basim habeat cū portione eandem, & axem eūdem, eam habebit proportionem, quam d g ad d f. Esto autem f g æqualis h f. Sumatur itaque conus quidam, in quo z, qui habeat ad abscissorem coni basim habentis cum portione eandē, & axem eundem, eam proportionem, quam d g ad d f. Si dicatur, portionem sphæroidis non esse æqualem cono z, esto primum, si fieri potest, maior eo: & inscribatur portioni figura solida, & altera circumscribatur, ex cylindrorum frustis altitudinē æqualem habentibus composita, ita ut circumscripta excedat inscriptam minus eo quo portio sphæroidis excedit conum z. Similiter iam præcedenti ostendetur, inscriptam figuram cono z esse maiorem, & frustum cylindri quod basim habet cum portione eandem, & axem eundem, ad figuram inscriptam maiorem habere proportionem, quàm ad conum z: quod esse non potest. Non erit ergo portio sphæroidis cono z maior. Sed esto item, si esse potest, minor: & rursus inscripta sit portioni solida figura, & altera circumscripta ex cylindricis frustis æqualem altitudinem habentibus composita, ita ut circumscripta figura excedat inscriptam minus eo, quo conus z excedit portionem. Rursus eadem ratione ostendetur, circumscriptam figuram cono z esse minorem, & frustum cylindri quod basim habeat eandem cum portione, & axem eundem, ad circumscriptam figuram habere minorem proportionem, quàm ad conum z: quod esse non potest. neq; igitur sphæroidis portio minor esse potest cono z. quare constat, id quod susceperamus demōstrandum.



CVius libet sphęroidis figuræ plano sectæ super axem erecto, nō aūt per centrū ducto, maior portio ad conum qui basim habeat cum portione eandem, & axem eundem, eam habet proportionem, quam habet linea æqualis utrisq; simul, dimidio axi sphęroidis, & axi minoris portionis ad axem minoris portionis. 33

Secetur itaq; sphæroides, ut dictum est: secta uero ipsa figura plano alio secundum axem ducto, super planum secans erecto, figuræ quidem esto a b c coni acutianguli sectio. eius autem diametros, & axis figurę b d: plani uero secantis sectio sit c a linea recta. erit autem ipsa angulis rectis super b d. Esto autem maior portionum, cuius uertex sit b punctum, & centrum sphæroidis sit h. addatur autem d g ad e d, ipsi d h æqualis, & b f eidem sit æqualis. Demonstrandum est, portionem sphæroidis cuius uertex b punctum, ad conum qui habeat basim eandem cum portione, & axem eundem, eam habere proportionem, quam e g habet ad e d. Secetur

cetur iam ſphæroides plano per centrum ducto, & ſuper axem erecto: & à circulo inde facto conus exurgat, qui uerticem habeat punctum d. Eſt iam tota ſphæroides dupla portionis habentis baſim circulum circa diametrum k l conſtitutum, uerticem autem punctum d. Dicta uero portio dupla eſt coni, qui habeat baſim cum portione eandem, & axem eundem. hæc enim oſtenſa ſunt. Tota igitur ſphæroides, dicti coni quadrupla exiſtit. conus autem iſte, ad conum habentem baſim circulum circa diametrum a c deſcriptum, uerticem uero punctum d, habet proportionem compoſitam ex ea quam habet h d ad e d, & ex ea quam habet quadratum k h ad quadratum e a: quæ eſt eadem ei quam habet cõtentum ſub b h, h d, ad id quod ſub b e, e d continetur. quam uero proportionem habet h d ad e d, hanc habeat x d ad h d. Habebit igitur contentum ſub x d, b h, ad contentũ ſub b h, h d, eam quam d h ad d e. Proportio autem compoſita ex ea quam habet contentum ſub x d, h b, ad contentũ ſub b h, h d: & ex ea quam habet contentum ſub b h, h d, ad contentum ſub b e, e d: eadem eſt ei quam habet contentum ſub x d, b h, ad contentum ſub b e, e d. Conus igitur qui baſim habet circulum circa diametrum k l conſtitutum, uerticem uero punctum d, ad conum qui baſim habeat circulum circa diametrum a c deſcriptum, uerticem uero punctum d, eam habet proportionem, quam contentum ſub x d, b h, ad contentum ſub b e, e d. Conus autem qui baſim habet circulum circa diametrum a c, uerticem uero punctum d, ad portionem ſphæroidis, quæ baſim habeat eandem eidem, & axẽ eundem, eam habet proportionem, quam contentum ſub b e, e d, ad contentum ſub f e, d e: hoc eſt, b e ad e f. nam minus quàm dimidium ipſius ſphæroidis, ad conum qui baſim habeat cum portione eandem, & axem eundem, oſtenſum eſt, quod eam habet proportionem, quam linea quæ ſit æqualis utriſq; ſimul, dimidio axi ſphæroidis, & axi maioris portionis, ad axem maioris portionis. ea uero eſt illa quam habet f e ad b e. Conus igitur qui eſt in dimidia ſphæroide, ad portionem ſphæroidis dimidio illius minorem, eam habet proportionem, quam cõtentum ſub x d, b h, ad contentum ſub f e, d e. quoniã autem tota ſphæroides, ad conum in eius dimidio conſtitutum, eam habet proportionem, quam compræhenſum ſub f g, x d, ad compræhenſum ſub b h, x d. nam utraq; quadrupla eſt: Conus autem in dimidio ſphæroidis conſtitutus, ad portionem eo dimidio minorem, eam habet proportionem, quam cõtentum ſub x d, b h, ad contentũ ſub f e, e d: ſphæroides quoq; totum ad portionem eius minorem, eam habet proportionem, quam contentum ſub f g, x d, ad contentum ſub f e, e d. quare & maior ſphæroidis portio, ad minorem, eam habet proportionem, quam exceſſus quo cõtentum ſub f g, x d excedit contentum ſub f e, e d. Contentum autem ſub f g, x d, excedit contentum ſub f e, d e, eo quod continetur ſub x d, e g, & eo quod continetur ſub f e, x e. Habet igitur maior portio ad minorem, eam proportionem, quam id quod eſt æquale utriſq; ſimul, contento ſub x d, e g, & contento ſub f e,

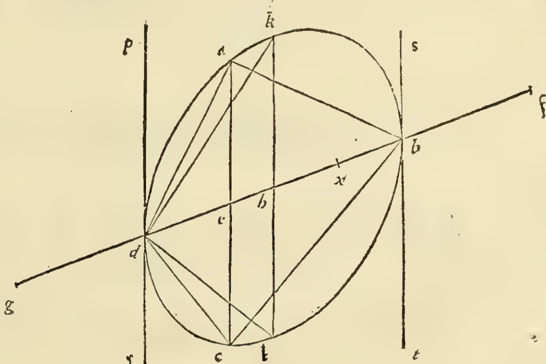


x e,

x e ad contentum ſub f e,e d: portio uero ſphæroidis minor, ad conum baſim habentem cum portione eandem, & axem eũdem, eam habet proportionem, quam contentum ſub f e,e d ad contentum ſub b e,e d: habet enim eam proportionem, quam f h ad b e. Conus autem in minori portione conſtitutus, ad conum qui eſt in portione maiori, eam habet proportionem, quam cõtentum ſub b e,e d ad quadratum b e. nam cum coni habeant baſes æquales, altitudinum proportionem ſequentur: habet itaq; & maior portio ſphæroidis ad conum in ea inſcriptum eam proportionem, quam habet id quod eſt ęquale utriſq; ſimul, contento ſub x d, e g, & contento ſub f e, x e, ad quadratum b e. Ea uero eadem eſt ei quam habet e g ad e d. nam contentum ſub x d, e g, ad contentum ſub x d, e d, eam habet proportionem, quam e g ad e d: & contentum ſub f e, x e, ad contentum ſub f e, h e eam habet proportionem, quã e g ad e d. Propterea quod linea x d, h d, d e, ſunt inter ſe proportionales, & h d æqualis g d: igitur id quod æquatur utriſq; ſimul contento ſub x d, e g, & contento ſub f e, x e, ad id quod æquatur utriſq; ſimul, contento ſub x d, e d, & contento ſub f e, h e, eam habet proportionem, quam e g ad e d: quadratum uero ipſius b e, æquatur utriſq; ſimul, contento ſub x d, e d, & contento ſub f e, h e. nam quadratum ipſius b h, æquatur contento ſub x d, e d. Exceſſus autem quo quadratum b e excedit quadratum b h, æquatur cõtento ſub f e, h e. cum b h & b f ſint æquales. Conſtat igitur, quod maior ſphæroidis portio ad conum, qui baſim habeat cũ portione eandem, & axem eundem, eam habeat proportionem, quam e g habet ad e d.

SI figura ſphæroidis plano ſecetur, neq; ſuper axem erecto, neq; per cẽtrum ducto: maior eius portio ad eum coni abſciſorem qui baſim habeat cum portione eandem, & axem eundem, habebit eam proportionẽ, quam linea quæ ſit æqualis utriſq; ſimul, dimidiæ illius quæ portionum inde effectarum uertices iunxerit, & axi minoris portionis ad axem minoris portionis habuerit. 34

Secetur itaque ſphæroides, ut dictum eſt. ipſo autẽ ſecto, per aliud planum ſecundum axem ductum, et erectum ſuper planũ ſecans, figuræ quidem ſectio eſto a b c d coni acutianguli ſectio: plani autẽ figuram ſecantis ſit a c linea recta: ducãtur autem p r, ſ t æquediſtantes ipſi a c, & contingentes in punctis b d coni acutianguli ſectionem: & exeant ab eis plana æquediſtantia plano ſecundum a c ducto. contingẽt quoq; ipſa ſphæroidem in punctis b d, & erunt uertices portionum puncta b, d: ducatur iam b d linea recta coniungens uertices portionum effectarum: trãſibit autem ipſa per centrum, & eſto h cẽtrum maior portio dimidio ſphæroidis. ſit illa cuius uertex eſt b: adijciatur ipſi d h æqualis d g, & b f eidem. Oſtendendum eſt, maiorem ſphæroidis portionem ad abſciſorem coni, qui habeat baſim cum portione eandem, & axem eundem, eam habere proportionem, quam e g ad e d. ſecetur enim ipſum ſphæroides plano per centrum ducto, & æquediſtanti ipſi plano



quod ſecundum a c ductum eſt: & inſcribatur dimidiæ portioni ſphæroidis abſciſſor coni, qui uerticem habeat punctum d. & quam proportionem habet d h ad e d, eam habeto x d ad h d: ſimiliter iam ſuperioribus oſtendetur, abſciſſorem coni dimidio ſphærodi inſcriptum, ad abſciſſorem coni in minori inſcripto eam habere proportionem, quam contentum ſub x d, b h habet ad contentum ſub b e, e d: & abſciſſor coni in minori portione cõſtitutus ad portionem cui eſt inſcriptus, eam habet proportionem, quam contentum ſub b e, e d ad contentum ſub f e, e d. habebit ergo abſciſſor coni in dimidia ſphæroide inſcriptus, ad portionem minorem ſphæroidis eam proportionem, quam contentum ſub x d, b h ad contentum ſub f e, e d. Quare tota ſphæroides habebit ad abſciſſorem coni in dimidia ſphæroide inſcripti eam proportionem, quam contentum ſub f g, x d ad contentum ſub b h, x d. nam utrumque eſt quadruplum utriuſq;. Abſciſſor autẽ coni dictus ad minorem ſphæroidis portionem eam habet proportionem, quam contentum ſub x d, b h, ad contentum ſub f e, e d: habebit ergo tota ſphæroides ad eius minorem portionem eam proportionem, quam habet contentum ſub f g, x d ad contentum ſub f e, e d. ipſa uero maior portio ad minorem eam habet proportionẽ, quam habet exceſſus, quo contentum ſub f g, x d excedit cõtentum ſub f e, e d, ad contentum ſub f e, e d: minor autem portio ad abſciſſorem coni in ea deſcripti, eã habet proportionem, quam contentum ſub f e, e d, ad contentum ſub b e, e d. nã oſtenſum eſt eam habere proportionem, quã f e ad b e. Abſciſſor uero coni in maiori portione deſcriptus, eam habet proportionem ad abſciſſorem coni deſcriptũ in minore, quam contentum ſub b e, e d ad quadratum b e. Abſciſſores enim conorum dicti habent inter ſe proportionem ſuarum altitudinum: eorum uero altitudines eam habent inter ſe proportionem, quam d e ad e b: habet autem maior ſphæroidis portio ad abſciſſorem coni in ea deſcriptũ eam proportionem, quã exceſſus quo contentum ſub f g, x d excedit contentum ſub f e, e d ad quadratum b e habet. Hæc autem eadem proportio, eadem ratione, ut ſuprà factum eſt, demonſtratur eſſe eadem, quam habet e g ad e d.

FINIUNT ARCHIMEDIS INVENTA DE CONOIDALIBUS & ſphæroidibus figuris.

ARCHIMEDIS DE LINEIS SPIRALIBUS.

ARCHIMEDES DOSITHEO Salutem.

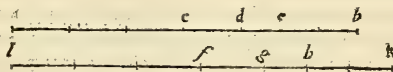

ORUM quæ ad Cononem miſſa fuerant theorematum, quorum aſſiduè à me flagitas ut demonſtrationes conſcribam, complurium quidem confectas habes in illis quæ ab Hercule allata ſunt, quaſdam uero in hoc libro collegi, quas ad te mitto. Verũ ne mirere, ſi in huiuſmodi demonſtrationũ expoſitionem plurimum temporis conſumpſimus. Hoc enim nobis accidit, propter id quod antequam de his ſcriberemus, eos percontari & perquirere ſtatueramus, qui circa doctrinas uerſati ſunt, quiq; ſibi iſthæc inueſtiganda propoſuerant. Nam certa quædam ſunt in Geometria theoremata, quæ non breuiter tradi poſſe

posse principio uideantur, eorum inuestigationem tempore intercipiēte. Conon quidem non temporis satis ad hęc excogitanda sortitus, uitam permutauit, & ipsa reliquit inexplicata, cum illa inuenisset, & alia quàm plurima perquisisset, ac multum adeò geometricas facultates ampliasset. Nouimus enim quantum ingenij, quàm admirabile in eo uiro iudicium uigebat, quàm non uulgaris circa doctrinas & assidua opera, quàm excellens studium. Multis autem annis post Cononis mortem neminem accepimus inuentum fuisse, qui ne unum quidem problema tractare tentarit. Equidem statuo eorum unumquodq; perlustrare. nam duo quædam ex his quæ habentur in Conone, sunt quæ minime depræhensa fuere. Tandem uero accedemus, ut hi qui cuncta se gloriantur inuenisse, nullam autem proferunt eorum quæ profantur demonstrationem, reprehendantur. nam ex his quæ à se inuenta uolunt, falsa quædam, & à naturæ sunt potestate penitus aliena. Quorundam uero iam tenes demonstrationes ad te missas, quorundam in hoc libro contulimus, dignum existimantes esse ut ea tibi explicaremus. Primum itaq; problematum erat, Sphæra data spacium inuenire quod superficiei illius esset æquale. quod quidem quamprimū fuit declaratū ex libro quem de Sphæra confecimus. Nam cum ibi demōstratum esset, superficiem sphæræ maximo in ea circulo quadruplam haberi, illico patuit spaciū inueniri posse superficiei sphęræ æquale. Secūdum autem, Cono seu cylindro datò sphæram ipsi cono uel cylindro æqualem inueniri. Tertiū, Datam sphæram sic secare, ut eius portiones inter se propositam proportionem retineant. Quartū, Datam sphæram sic secare plano, ut portiones superficiei sphæræ seruent inter se datam proportionem. Quintum, Datā sphæræ portionem alteri sphæræ portioni datæ similem reddere. Sextum, Duabus portionibus siue eiusdem siue nō eiusdem sphęræ datis, tertiam sphęræ portionem inuenire, quæ alteri portionū datarum sit similis, superficiem uero superficiei alterius portionis habeat æqualem. Septimum, A data sphæra portionem ea ratione abscindere, ut abscisa inde portio ad conum qui eadem base & eadem constat altitudine, cum portione quamcunq; datam proportionem habeat, quæ quidem proportio ea quam tria ad duo habent, proportione minime maior existat. Horum igitur inuentorum omnium Hercules attulit demonstrationes. Id autem quod post hæc erat separatum, falsum existit. Est autem huiusmodi: Si sphęra plano secetur in partes inæquales, maior portio habebit ad minorem eam proportionem duplicatam, quam maioris portionis superficies ad minoris habet superficiem. Cōstat autem ex his quæ ad te missa sunt, hoc falsum esse. Erat & itē hoc separatum in illis. Si sphęra in partes inæquales secetur, plano erecto super una quacunq; ex his quæ sunt in sphæra diametro, maior portio ad minorem eam proportionem habebit, quam maior diametri portio ad minorem. Nam maior sphæræ portio ad minorem habet proportionem minorem, quàm sit ea quæ est superficiei maioris ad superficiem minoris duplicata proportio: maiorem uero, quā sesquialtera illius. Erat autem & ultimum problema separatum, falsum: Quod si sphæra alicuius diametro in partes inæquales scindatur, ita ut quadratum maioris partis quadrato minoris existat triplum, & per punctum huius diuisionis agatur planum erectum super diametrum ipsam, figura tali specie constans qualis est uidelicet sphæræ portio, maxima est aliarū portionum omnium quæ habeant superficiem sibi æqualem. Quod autem hoc falsum sit, ex his theorematibus manifestum est, quæ ad te prius missa sunt. Nam demonstratum est, dimidiam sphæram esse omnium sphæræ portionum maximam, quæ æquali inter se superficie sphærica contineantur. Post hæc circa conum quoq; hæc problemata habentur: Si coni rectanguli sectio diametro quiescente circumferatur, ita ut diametros sit axis, figura quæ à coni rectanguli sectione complectitur, conoidale uocetur. Quod si figuram conoidalem planum contigerit, & alterum planum ducatur plano cōtin-

genti æquediſtans, quod aliquam conoidalem portionem abſcindat, huius portionis abſciſæ baſis appelletur planum abſcindens, uertex uero punctum illud in quo alterum planũ conoidale cõtingit. Quod ſi dicta figura plano ſecetur erecto ſuper axem, eius ſectionem conſtat circulũ fore. Quod aũt portio abſciſa ſeſquialtera erit coni baſim habentis cum portione eandem, & axem eundem, hoc nos demonſtrare oportet. Item ſi conoidalis duæ portiones abſcindãtur planis utcunq; ductis, quod ſectiones inde prouenientes ſint coni acutianguli ſectiones cõſtat, ſi plana abſcindentia ſuper axem non fuerit erecta. Quod autem portiones habeãt inter ſe proportionẽ eam quam habent inter ſe poteſtate lineæ ductę à uerticibus earum æquediſtantes axi uſque ad plana abſcindentia, hoc reſtat demõſtrare. Horum enim ad te nondum ſunt miſſæ demonſtrationes. Poſt hæc uero circa ſpirales lineas hæc fuerãt propoſita. Eſt autem hoc ueluti aliud problematum genus, nihil cum prædictis communicans, de quibus tibi in hoc libro conſcripſimus demonſtrationes. Sunt autem huiuſmodi. Si recta linea in plano altero eius termino quieſcẽte circumferatur, donec ad locum redierit unde primo cœpit moueri, & ſimul cum hac circumducta linea punctum feratur, & ipſum ſibi ipſi æquali ſemper uelocitate moueatur ſecundum ipſam lineam motam, incipiatq; à termino lineæ quieſcente uerſus alterum ferri pũctum huiuſmodi ſpiralem lineam in plano deſcribet. Dico itaq; ſpacium à linea ſpirali, & à linea recta quæ circumducta fuit comprenſum, tertiam partem eſſe circuli eius qui centrum habeat punctum quieſcens, interuallum uero ſecundum eam lineæ motæ partem, quæ à puncto moto fuerit in una circumuolutione permeata. Et ſi lineam ſpiralem linea recta contigerit in puncto quod fuit in ſpirali ultimo productum, alia item linea recta à puncto circumductæ quieſcente ducatur ad ipſam circumductam, & in locum unde moueri ceperat regreſſa ſecundum angulos rectos quouſq; cum contingente concurrat: dico hanc lineam productam circumferentiæ circuli in prima circumuolutione producti eſſe æqualem. Item ſi linea circumducta, & punctum latum ſecundum illam pluribus circumuolutionibus circumferantur, & in locum unde moueri ceperãt multotiens reſtituantur: dico ſpacij illius quod in ſecunda circumuolutione fuerit à ſpirali linea comprẹhenſum, duplum illud exiſtet quod in tertia compræhendetur. Quod uero in quarta triplum, quod in quinta quadruplum, & ſic deinceps ſemper ſpacia in poſterioribus circumuolutionibus concluſa, ſecundum conſequens augmentum numerorum multiplicia erunt ad ſpacium in ſecunda reuolutione concluſum. Spacium uero in prima reuolutione contentum, ſexta pars exiſtet ſpacij in ſecunda reuolutione comprenſi. Item ſi in ſpirali linea duo puncta notentur, & ab eis iungantur lineæ rectæ ad terminum lineæ circumductæ quieſcentem, & duo circuli circumſcribantur centro quod ſit punctum quieſcens ſecundum interualla duarum linearum rectarum, quæ ad quieſcentem lineæ ſpiralis terminum ductæ fuerunt, & earum linearum minor extrà ducatur: dico ſpacium comprenſum à circumferentiæ maioris circuli parte illa quæ in eandem partem cum linea ſpirali fertur, mediaq; inter lineam ſpiralem & rectam lineam habeatur, & à linea recta extrà ducta, & à linea ſpirali ad ſpacium compræhenſum ſub minoris circuli ea circumferentiæ parte quæ inter eandem lineam ſpiralem & lineam rectam media exiſtit, & ſub linea quæ earũ terminos iungit, & ſub eadem linea ſpirali eam proportionem habet, quam linea ſemidiametros maioris circuli cum duabus tertijs illius exceſſus, quo ſemidiametrum minoris excedit, habet ad eam ſemidiametrum maioris cum una dicti exceſſus tertia parte. Iſtorum itaq; & aliorum circa ſpirales lineas ſunt à me in hoc demonſtrationes collatæ. Præmittuntur uerò ueluti in cæteris quæ geometrica diſciplina ſunt tractata, quædam, quæ ad illorum demonſtrationem ſunt perneceſſaria. Sumo autem in his quoq; ea quæ in alijs quos prius edidi libris ſumpta fuerunt,

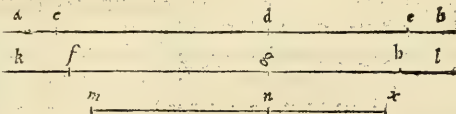
runt, uidelicet linearum inæqualium & spaciorum inæqualium excessus, quo maius excedit minus, illi adiectus fieri potest ut uincat omnem propositam quorumcunque inter se relatorum proportionem.

SI secundum quampiam lineam punctum feratur, ipsum sibi ipsi æque uelociter, & in latione illa duas lineas permeet, lineæ illæ eandē inter se proportionē habebunt, quam tempora habent quibus punctum lineas permeauit. Feratur itaque quoddā pūctum secundū lineam a b, æqueuelociter sibiipsi. Et sumant in ea duæ lineæ c d, d e. Esto autem tēpus, in quo punctū permeauit lineā c d, esto f g. in quo uero permeauit d e, esto g h.



Ostendendum est igitur, quod c d linea ad lineam d e eam habet proportionem, quam tempus f g ad tempus g h. Ex lineis itaque c d, d e componātur lineæ a d, d b, secundum quamcunque compositionem, ita ut a d excedat d b. & quotiēs c d linea sumitur in a d, totiens tempus f g sumatur in tempore l g: quotiens autem d e linea sumitur in d b, totiens tempus g h sumatur in g k. Quoniam itaque supponitur pūctum æqueuelociter latum esse per lineam a b, manifestum est in quo tempore lineam c d permeauerit, in tanto quamcunque ipsi c d æqualem permeaturum esse. quare palàm est, quod lineam a d compositam in tanto tempore permeabit, quantum est totum l g tempus, cum totiens sumatur c d linea in linea a d, quotiens tempus f g in tempore l g, & eadem ratione in tanto tempore punctum permeabit lineam d b, quātum est g k tempus. Cum igitur a d linea sit maior b d, manifestum est, quod in maiori tempore punctum permeabit lineam a d, quàm lineam b d. quare colligitur, tempus l g maius esse tempore g k. Similiter autem ostendetur, si ex temporib. f g, g h componantur tempora, secūdum quamcūque cōpositionem, eo pacto ut alterum excedat reliquum, quod compositæ ex c d, & d e lineæ secundum eandem compositionem altera alteram superabit, eodem ordine sumptæ cū temporibus. Constat igitur c d eādem ad d e habere proportionem, quam habet tempus f g ad ipsum tempus g h.

SI duo puncta in duabus lineis ferantur, unumquodque sibiipsi æqueuelociter, sumantur que in utraque linea duæ lineæ, primæ duæ in temporibus æqualibus à punctis permeatæ, & secundæ duæ in altera linea, sumptæ lineæ eandem inter se proportionem habebunt. Esto per lineam a b punctum feratur, ipsum sibiipsi æqueuelociter: & alterum item punctum per lineam k l. Sumantur aūt in a b duæ lineæ c d, d e et in linea k l sumant f g, g h. in quo autem tempore punctum per a b latum lineam c d permeauerit, in tanto alterū pūctum per k l latum permeet f g.



Similiter in tanto tempore punctum permeet lineam d e, in quanto alterum g h. Ostendendum est, c d eādem habere ad d e proportionem, quam f g ad g h. Esto itaque tempus, in quo punctum lineam c d permeauit, m n. in hoc itaque eodem tempore alterum punctum permeauit f g. Et item esto tempus n x, in quo punctum permeauit lineam d e, & in hoc eodem alterum punctum permeauit lineam g h. Eandem itaque proportionem habebit c d ad d e, quam tempus m n ad n x: & f g ad g h eam habet, quam tempus m n ad n x. Constat igitur, c d eādem habere ad d e proportionem, quam habet f g ad g h.

3 CIrculis quacunque multitudine datis inueniri quædam linea recta potest, quæ omnibus simul datorum circumferentijs maior existat. Si enim unicuique circulorum figura multorum angulorum circumscribatur, manifestum est, quod linea recta ex omnibus earum lateribus composita, omnibus simul circulorum circumferentijs maior existat.

4 DVabus lineis inæqualibus datis, altera recta, altera circulari potest inueniri quædam recta linea, quæ maiore datarum linearum minor, & minore maior habeat. Si enim excessus quo recta superat circularē, totiens sibiipsi coaceruetur, donec maiorē rectā recta data cōficiat, deinde recta data in tot partes æquales diuidatur, quotiens excessus sibiipsi fuerit coaceruatus, una ex partib. illis ipso excessu minor existet. Quod si circularis sit maior recta, si ipsi rectæ una pars quàm minima adijciatur, constat hanc rectam sic confectam, maiore linearū minorem, & minore maiorem haberi. nam quæ utrinque adijcitur pars, aut detrahitur, excessu minor existit.

5 CIrculo dato, & linea recta ipsum contingente, potest à cētro circuli linea quædam recta ad rectam contingentem hoc pacto duci, ut ea ipsius ductæ pars quæ inter cōtingentem & circuli circumferentiam intercipitur, ad semidiametrū circuli habeat minorem proportionem, quàm ea circumferentiæ pars quæ inter contactum & lineam ductam media existit ad quamcunque datam circumferentiæ partem. Esto circulus datus a b c, cuius centrum sit k, & recta linea d f cōtingat circulum in puncto b. detur etiā pars circumferentiæ, quæcunque fuerit. Potest autem ea circumferentiæ parte data sumi linea recta maior, sitque ea sumpta e. Ducatur autem à centro k h linea a g æquedistans ipsi d f, & ponatur h g æqualis ipsi e, & tendens ad b à centro k ducta ad h educatur, donec concurrat cum contingente in puncto f. Eandem igitur habet proportionē h f ad h k, quàm b h ad h g. igitur f h ad h k minorem habet proportionem, quàm b h circumferentiæ pars ad datam circumferentiæ partem, quoniam b h linea recta est minor arcu b h, & linea h g maior est data circumferentiæ parte.

6 CIrculo dato, linea recta in eo deinde collocata, quæ quidem diametro minor existat, potest à circuli centro linea recta ad circumferentiam duci, quę à linea in circulo collocata eo pacto secet, ut pars ipsius lineę ductæ, quę inter circumferentiam et lineā collocatā media depręhendit, ad lineā quæ iungit lineæ collocatæ & ductæ terminos in circumferentia cōstitutos, habeat quamcunque proportionē datam, dum tamē proportio illa minor existat proportione, quam habet dimidia lineæ in circulo collocatæ, ad lineam quæ à centro sit ad collocal-

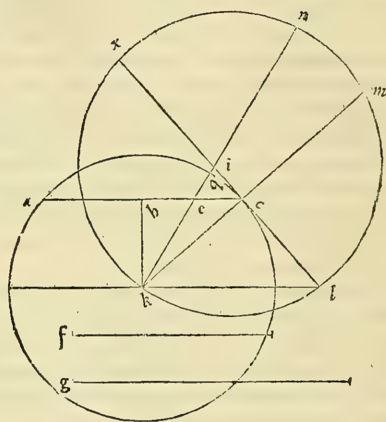
locatam perpendiculariter educta. Esto datus circulus a b c, cuius centrum k, & in ipso linea collocata recta a c minor diametro, & habeat f ad g minorem proportionem, quàm c h ad h k, quæ sit à cētro k ad lineam a c perpendiculariter educta. Ducatur autem à centro linea æquedistans ipsi a c, quę sit k n: & educatur à puncto c secundū angulos rectos linea c l usque ad lineam k n. trianguli itaq; c h k, & c k l sunt similes. quare erit sicut c h ad h k, ita c k ad c l. Igitur f ad g minorē proportionem habet, quàm c k ad c l. Quam itaq; proportionē habet f ad g, eam habeat c k ad maiorem ipsa c l, quæ sit b n. Ponatur autem b n inter circumferentiam, & lineam collocatam per punctum c. Hoc enim sic potest diuidi, ut pars intra circulum collocetur, pars extra per punctum c adhæreat ipsi k n in puncto n, cum ipsa sit maior c l. Esto itaq; sic diuisa & collocata. demum ducatur k b linea secans lineam a c, primo collocatam in puncto e. Quoniam igitur k c ad b n eam proportionem habet, quam f ad g, habebit quoque e b ad b c, sicut k c ad b n. igitur & sicut f ad g. quare constat propositum.

EIsdem quæ in præmissa sunt posita retentis, & linea quæ in circulo fuerit collocata, extra circulum educta, potest à centro ad eductam linea recta sic extra circulum educi, ut pars eius quæ à circumferentia & ab educta extra circulum cōpræhendatur, ad lineam iungentem lineæ principio eductæ, & à centro extra circulum ductæ terminos in circumferentia notatos habeat quamcunque proportionem proposit am, dum tamen dicta proportio sit ea proportione maior quam habet dimidia linea in circulo collocata, ad lineam quæ à centro ad ipsam collocatam sit perpendiculariter educta. Retineantur itaque ea quæ in præmissa posita sunt, & linea in circulo collocata extra ducatur, & sit proportio data, quam habet f ad g maior proportione, quam habet c h ad h k: erit quoq; maior ea quam habet k c, ad c l. Quam itaq; proportionem habet f ad g, eam habet k c ad minorem c l, quæ sit i n tendēs in c. Potest autem sic diuidi, & c a det intra lineam c l, cū sit minor ipsa c l. Cū igitur eandem habeat proportionem k c ad i n, quam f ad g, & ipsa e i ad i c eādem habebit proportionē, quam f ad g. 7

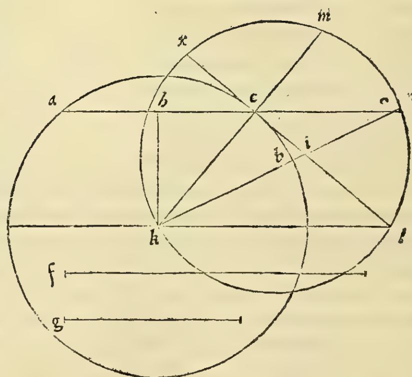
CIrculo dato, et in circulo linea quæ diametro minor sit, altera item linea quæ circulum contingat in termino lineæ in circulo datæ: potest à centro circuli linea recta ad lineā rectam educi, & ita in directum per lineæ in circulo datę sectionem ad circumferentiam protrahi, ita ut pars ipsius inter lineam rectam & circūferentiam deprehensa, ad partem illam lineæ contingentis quæ intra lineam ipsam à centro ductam, & punctū contactus concludetur, habeat quamcunq; proportionem datam, dū tamen dicta proportio minor fuerit ea proportione, quam dimidia lineæ in circulo datæ habet ad lineam quæ à centro sit ad ipsam in circulo datam perpendiculariter educta. Esto circulus datus a b c d, eius centrum k, & linea recta sit in circulo data a c minor diametro, & x l contingat circulum in puncto c. & proportio quam habet f ad g, sit minor ea quam habet c h ad h k. Erit quoq; minor ea quam habet c k ad c l, si k l sit æquedistanter ducta ipsi h c. habeat itaq; k c ad c x, eam quam habet f ad g proportionem. quare c x erit maior c l. Describatur circulus circa puncta k x l. Quoniam igitur x c maior est ipsa c l, & sunt ambæ ad angulos rectos lineæ k c m, potest duci linea i n æqualis lineę c m, 3

quæ

quæ tendat ad k. Igitur id quod continetur sub x i, i l ad contentum sub k e, i l, eā habet proportionem, quam x i ad k e. & contentum sub k i, i n ad contentum sub k i, c l, sicut i n ad c l, & sicut x i ad k e, & sicut c m ad c l, & x c ad k c, & ad k b. Et sicut x i ad k e, et sicut residua i c ad residuam b e eandem habebit proportionē, quā x c ad k c, & quam g ad f. Incidit autem k n in contingētem, & pars eius quæ inter circumferentiam & rectam a c capitur, uidelicet b e, ad partem cōtingentis inter k n, & cōtactum, deprensam eam habet proportionem, quam f ad g.

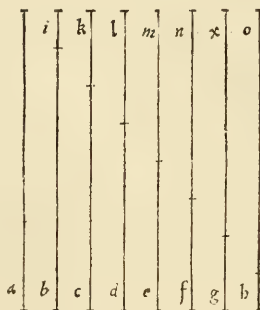


9 Eisdē quæ supra posita sunt retentis, & linea quæ in circulo datur extra circulum ducta, potest à cētro circuli ad ipsam extra ductā linea quædā recta sic duci, ut pars ipsius quæ inter circumferentiam & lineam extra ductam compræhenditur, ad partem lineæ contingentis quæ inter contactum & ipsam à centro ductam intercipitur, habeat quācunque datam proportionem: dum tamen proportio sit ea proportione maior, quā habet dimidia lineæ in circulo datæ, ad lineam quæ à centro sit ad ipsam perpendiculariter ducta. Esto datus circulus a b c d, & recta in circulo data minor diametro sit a c, quæ extra circulum ducatur per punctum c. & altera linea x c contingat circulum in puncto c: & proportio f ad g sit maior proportione c h ad h k. erit quoque maior proportione k c ad c l. Habeat igitur k c ad c x eā quam habet f ad g: ergo c x minor est ipsa c l. Rursus describatur circulus trāsiens per puncta x k l. cum igitur x c sit minor ipsa c l, & ambæ altera alteri ad angulos rectos insistūt, x c, & k m: potest i n poni æqualis ipsi c m, quæ tendat in punctum k. Cum itaque cōtentum sub x i, i l æquale est contento sub k i, i n: contentum uero sub l i, k e, est æquale contento sub k i, c l. propterea quod est sicut k e ad i k, ita l c ad l i. Sicut ergo x i ad k e, sic contentū sub k i, i n, ad contentū sub k i, c l. hoc est sicut n i ad c l, hoc idē est sicut c m ad c l. Est aūt sicut c m ad c l, ita x c ad k c, hoc est ad k b. Est igit̄ sicut x i ad k e, ita x c ad k b, & residua i c ad residuā b e, sicut x c ad k c. Quam aūt proportionem habet x c ad k c, eam habet g ad f. incidit igitur k e in lineam extra circulū ductā, & b e inter extra ductam & circūferentiā cōprensa ad c i, inter cōtactū & ipsam k e interceptā eam habet, quā f ad g proportionem.



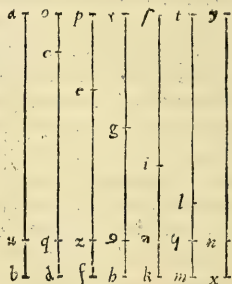
Si

SI lineæ quotcunq; numero consequenter disponantur, quæ sese æqualiter excedant, sitq; excessus breuissimæ illarum equalis: item aliæ sumantur lineæ numero prædictis æquales, magnitudine uero unaquæq; æqualis longissimæ: illarũ quadrata omnium quæ sunt æquales lõgissimæ, & quadratum longissimæ, & cõtentum sub breuissima & linea æquali, omnibus simul æqualiter sese excedentibus: hec omnia simul sumpta tripla erunt, ad quadrata linearum sese æqualiter excedentium simul sumpta. Sunto itaq; quotusq; lineæ continenter positæ, quæ sese æqualiter excedant, a b c d e f g h. Sit aũt h æqualis excessui: adijciatur uero ipsi b, linea i, æqualis ipsi h. ipsi quoq; c addatur k, æqualis ipsi g. ipsi d addatur l, æqualis f. ipsi e apponatur m, æqualis ipsi e. ipsi f addatur n, æqualis d. ipsi g addatur x, æqualis c. ipsi demum h addatur o, æqualis b. Hæ igitur quæ confectæ sunt, erunt inter se æquales, & longissimæ prædictarum. Est igitur ostendẽdum, quod quadrata istarum omnium simul cum quadrato ipsius a, & eo quod continetur sub h, & sub æquali omnibus simul a b c d e f g h, tripla sunt ad quadrata simul omnium a b c d e f g h. Est itaq; quadratum b i æquale duobus quadratis b, & i, & duobus his quæ fiunt ex b in i. Quadratum uero k c est equale quadratis k & c, & duobus his quæ continentur sub c k. Similiter quadrata reliquarum quæ sunt æquales ipsi a, erũt æqualia quadratis partium suarum, & duobus his quæ sub earum partibus continentur. Quadrata igitur a b c d e f g h, & quadrata i k l m n x o, simul cũ quadrato a, dupla sunt ad quadrata a b c d e f g h. Reliquum ostendemus, quod dupla eorum quæ sub partibus uniuscuiusq; linee æqualis a continentur, simul sumpta cum contento sub h, & linea æquali omnib. simul a b c d e f g h, sunt æqualia quadratis a b c d e f g h. Quoniam itaq; duo quæ sub i & b continentur, æquantur duobus cõtentis sub h & b: duo autem quæ sub k & c, æquantur contento sub h, et quadrupla c, quia k est dupla ipsius h. Duo uero contenta sub l d, æquantur contento sub h, & sexcuplo ipsius d, quia l est tripla ipsius h. Similiter & alia dupla eorum, quæ sub partibus continentur, æquantur contento sub h & multiplici cuiuscunq; secundum numeros pares continenter lineæ sequenti multiplices. Omnia igitur simul sumpta cum eo quod continetur sub h, & sub æquali omnibus a b c d e f g h, equabuntur cõtento sub h, & sub æquali omnibus: ipsi a, & triplo ipsius b, quincuplo c, & semper impari secũdum numeros impares continenter multiplices lineæ sequentis. Quadrata quoq; ipsarum a b c d e f g h, æqualia sunt ei quod continetur sub eisdem lineis. nam quadratum ipsius a est æquale contento sub h, & sub æquali reliquis illis quarũ unaquæque æquatur ipsi a. æquè multipliciter enim h mensurat ipsam a, sicut a mensurat omnis sibi æquales simul sumptas. quare quadratum ipsius a, est æquale contento sub h, & omnibus simul æqualib. ipsi a, & duplo ipsarum b c d f g h. nam illæ quæ sunt equales ipsi a, omnes excepta a, duplæ sunt ad b c d e f g h. Similiter quadratum b æquat̃ cõtento sub h, & sub linea æquali ipsi b, & dupla ipsis c d e f g h. Et item quadratum c æquatur contento sub h, & sub æquali ipsi c, & dupla ipsarũ d e f g h. Similiter aliarum quadrata æquabuntur contentis sub h, & sub æquali unicuique, & dupla reliquarum. quare constat quadrata omnium æqualia esse ei quod continetur sub h, & sub æquali omnibus, & ipsi a, & tripla b, & quincupla c, & secundum numeros continenter impares multiplici sequentis lineæ. Ex hoc



igitur manifestum est, quadrata simul omnia linearum equalium, longissime, quadratis simul omnibus linearum sese æqualiter excedentium minus quàm tripla esse, cum assumptis quibusdam tripla efficiantur illis. Reliquis uero, dempto longissimæ quadrato, plus quàm tripla inueniũtur, cum assumpta sint minus quàm tripla ad quadratum longissimæ. Et si simili forma describãtur ab omnibus, & ab his quæ sese æqualiter excedunt, & ab his quæ sunt æquales longissime earũ quidem quæ sunt ab his quæ sese æqualiter excedunt formarum, minus quàm tripla existent. Reliquarum uero, dempta ea quæ à longissima fiet, plus quam tripla. nã similia specie eandem habebunt inter se proportionem, quàm quadrata habent.

11 SI lineæ quotcunq; numero consequenter disponãtur, quæ sese æqualiter excedant, & aliæ item lineæ sumãtur, quæ quidem dictis lineis sint multitudine una linea pauciores, magnitudine uero unaquæq; æqualis lõgissimæ: harũ æqualium quadrata simul omnia, ad quadrata linearũ sese æqualiter excedentiũ, dempta illarum breuissima, maiorem habẽt proportionem quàm quadratum longissimæ ad id quod est æquale utrisq; simul, ei quod sub longissima breuissimaq; cõtinetur, & tertiæ parti quadrati lineæ illius qua longissima excedit breuissimã. ad quadrata uero linearũ sese æqualiter excedentiũ, dempto lõgissimæ quadrato, habent maiorẽ proportionẽ, q̃ sit superius dicta proportio. Esto itaq; quotcunq; numero lineæ sese æqualiter excedẽtes deinceps positæ a b, excedẽs c d, & c d, e f, & e f, g h, & g h, i k, et i k, l m, & l m, n x. Addatũ uero ipsi c d quedã c o equalis uni excessui, & ipsi e f æqualis duob. e p, ipsi uero g h æqualis tribus g r, & alijs eodem modo erũt. itaq; quæ inde sunt effectæ inter se æquales, & etiam ipsi lõgissimæ unaqueq; equalis. Ostendendũ itaq; est, quadrata simul harum omnia, ad quadrata simul omnia earũ quæ sese equaliter excedunt, dempto quadrato n x, minorem habẽt proportionem, q̃ quadratum a b ad id quod equatur utrisq; simul, ei quod continetur sub a b, n x, & tertiæ parti quadrati n y. ad quadrata uero earũdem dempto quadrato ipsius a b, maiorẽ proportione dicta habent proportionem. Adimatur unicuiq; earum, quæ sese æqualiter excedunt, æqualis excessus. quam itaq; proportionem habet quadratum a b ad utraq; simul, ad cõtentũ sub a b, u b, & ad tertiã partem quadrati a u, hanc habet quadratum o d ad contentum sub o d, d q, & tertiam partem quadrati o q. & quadratum p f ad contentum sub p f, z f, & tertiam partem quadrati p z, & quadrata reliquarum ad spacia similiter sumpta. Et omnia harum omnium o d, p f, r h, s k, t m, y x: ad omnia contenta sub n x, & æquali omnibus simul dictis lineis, & tertias partes quadratorum o q, p z, r ϑ, s π, t ς, y n. eandem habebunt proportionem, quam quadratum a b ad utraq; simul, ad contentum sub a b, u b, & tertiam partem quadrati a u. Si igitur ostendatur contentum sub n x, & sub æquali omnibus simul his o d, p f, r h, s k, t m, y x, et tertias partes quadratorum o q, p z, r ϑ, s π, t ς, y n, quadratis a b, c d, e f, g h, i k, l m esse minora: quadratis uero c d, e f, g h, i k, l m, n x maiora esse: propositum ostensum erit. Illud igitur quod sub n x, et sub equali omnibus simul o d, p f, r h, s k, t m, y x, & tertiæ partes quadratorum o q, p z, r ϑ, s π, t ς, y n æquantur quadratis harũ q d, z f, ϑ h, π k, ς m, n x, & contento sub n x, & sub equali omnibus simul o q, p z, r ϑ, s π, t ς, y n, & tertijs partibus quadratorum prædictorum. Quadrata uero a b, c d, e f, g h, i k, l m, æquantur quadratis harum b u, q d, z f, ϑ h, π k, ς m, & contento sub b u; & dupla istarum simul a u, c q, e z, g ϑ, i π, l ς, cum quadratis prædictarum li-



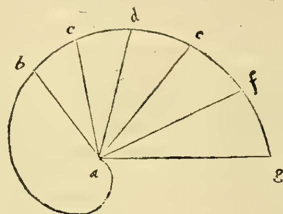
linearum. Communia itaq; sunt utrinq; quadrata lineæ æqualis ipsi n x. Contentum autem sub n x, & sub æquali simul istis o q, p z, r 9, f π, t s, y n minus est contento sub b u, & dupla istarum simul a u, c q, e z, g 9, i π, l s. quia lineæ nuper dictę sunt æquales istis c o, e p, g r, i f, l t, n y. residuis uero sunt maiores. Et quadrata istarum a u, c q, e z, g 9, i π, l s, maiora sunt tertia parte quadratorum linearũ o q, p z, r 9, f π, t s, y n. hoc enim ostensum fuit suprà. Spacia igitur prædicta minora erunt quadratis istarum a b, c d, e f, g, i k, l m. Reliquum igitur ostendemus, quod sunt maiora quadratis c d, e f, g h, i k, l m, n y. Rursus itaque quadrata istarum c d, e f, g h, i k, l m, n x, æquantur quadratis q c, e z, g 9, i π, l s, & quadratis d q, f z, h 9, k π, m s, n x, & contento sub n x, & sub dupla harum simul omnium c q, e z, g 9, i π, l s, & sunt cōmunia quadrata q d, z f, 9 h, π k, s m, n x. Maius aũt est contentũ sub n x, & sub æquali omnibus simul istis o q, p z, r 9, f π, t s, y n, contento sub n x, & sub dupla istarum simul omnium c q, e z, g 9, i π, l s. Sunt autem quadrata q o, z p, 9 r, π f, t s, y n, quadratis c q, e z, g 9, i π, l s, plus quàm tripla. Ostensum enim est istud. Sunt igitur dicta spacia maiora quadratis c d, e f, g h, i k, l m, n x. Quare constat propositum.

Si spacia quoque forma similia describantur ab omnibus, & ab his quæ sese æqualiter excedunt, & ab his quæ sunt æquales longissimæ: illarum formæ omnium, quæ ab his quæ sunt æquales longissimæ producentur, minorem proportionem habebunt ad formas simul omnis, quæ producentur à lineis sese æqualiter excedentibus, dempta breuissimæ forma, quàm quadratum lõgissimæ ad utraque simul, & contentum sub longissima & breuissima, & ad tertiam partem quadrati lineæ illius qua longissima breuissimã excedit. ad formas autem easdem, dẽpta longissimæ forma, proportionem habebunt dicta proportione maiorem. Similes enim spaciorum formæ eandem habebunt, quam quadrata habuerunt, proportionem. *Corollariũ præmissæ.*

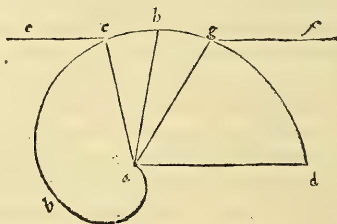
Si linea recta in plano sit ducta, & quiescente altero eius termino æquali uelocitate circumferatur, donec restituatur in eum locum unde moueri cœperat: & simul cum linea circumlata pũctum feratur æquali uelocitate ipsum sibijpsi, & per se secundum dictam lineam latum incipiens à termino quiescente: punctum hoc describit in plano lineã spiralem. Terminus itaq; lineæ sic motę quiescẽs, uocetur initiũ lineæ spiralis. Positio autem lineæ, à qua linea recta incipit circumferri, initium circulationis. Linea uero recta quam punctum latum in prima reuolutione permeauerit, prima uocetur: & ea quam dictum punctum in secunda reuolutione permeauerit, secunda: & reliquæ similiter pari ordine cum reuolutionibus nominentur. Spacium autem comprælensum à linea spirali in prima reuolutione descripta, & à linea recta quæ prima existit, primum uocetur. Comprælensum uero à linea spirali in secunda reuolutione descripta, & à linea secũda, uocetur secundum: & reliqua deinceps hoc ordine nominentur. Item si à puncto quod est initium lineæ spiralis ducatur linea recta, huius lineæ ea pars quæ existit, ubi circumuolutio producitur, precedens uocetur. quæ uero in alterã partem, sequens. Circulus quoq; descriptus circa punctũ, quod est initium lineæ spiralis secũdum interuallum lineæ quæ prima uocatur, primus & ipse dicatur. Descriptus uero circa idem centrum, secundum interuallum lineæ duplæ priori, secundus dicatur: & reliqui deinceps eodem modo. *Diffinitiones.* *Non dicit propter cõstitutionem, sed differentiam positionis.*

SI ad spiralem lineam in una circumuolutione descriptam, quæcunq; fuerit illa circũuolutio, ab initio spiralis lineæ ducantur quotcunq; lineæ rectæ, quæ inter se angulos æquales efficiãt, ipsæ sese æqualiter excedent. Esto spiralis linea, ad quam a b, a c, a d, a e, a f lineæ rectæ sint ductæ, quæ angulos inter se æquales faciant. Ostendendum est, quod a b æqualiter exceditur ab a c, & a c ab a d, & reliquæ similiter. In quo enim tempore linea circumuoluta ex a b processit ad a c, in 12

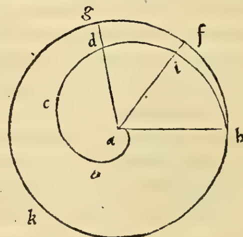
eodem punctum secundũ lineam rectam latum excessum permeauit, quo c a excedit a b. in quo uero ex a c in a d, in eadem permeauit excessum quo a d superat ipsam a c. in tempore uero æquali linea circumuoluta ex a b in a c procedit, & ex a c in a d, cũ anguli sint æquales. In tempore igitur æquali punctum secundũ lineam rectam latum permeat excessum, quo a c excedit a b, & excessũ quo a d excedit a c. æquali ergo excessu a c superat ipsam a b, & a d ipsam a c. & reliquæ similiter istis ostendentur.



13 SI linea recta contingat lineam spiralem, in uno solum puncto eam continget. Esto spiralis linea, in qua a b c d: esto eius initium a punctum: initium uero circumductionis, sit a d linea recta. Et cõtingat lineam spiralem linea e f. Dico quod in uno solo pũcto eam contingit. quod si fieri potest, contingat eam in duobus punctis g c, & iungantur a c, a g, & angulus contentus sub c a, a g in duo ęqua diuidatur. punctum autem in quo linea diuidens dictum angulum incidit in lineam spiralem, sit h. Aequaliter itaque a g excedit a h, & a h ipsam a c, cum æquales angulos inter se cõtineãt. quare a g, a c sunt simul ad a h duplæ. Sed eius lineæ quæ diuidit angulum c a g, in duo æqua, sunt lineæ a c, a g plus quàm duplæ. Manifestum igitur, quod punctum in quo a h incidit in lineam c g, est inter punctum a, & pũctum h in linea a h. Igitur e f secabit lineam spiralem, cũ aliquod punctum in c g linea collocatum sit intra lineam spiralem. Suppositum uero fuerat, quod eam contingeret. In uno igitur puncto e f continget lineam spiralem.



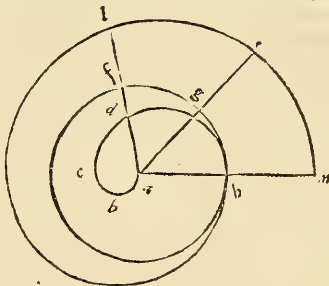
14 SI ad lineam spiralem in prima reuolutione descriptam incidant duæ lineæ rectæ, à puncto quod est lineę spiralis initium actæ: deinde extra producantur, usque ad circuli primi circumferentiam, eandem habebunt proportionem inter se illæ quæ in lineam spiralem inciderunt, quam partes circumferẽtiæ circuli, quæ inter terminum lineæ spiralis, & extrema linearum quæ ad circumferentiam productæ fuerunt, sumendo partes circumferentiæ ab termino lineæ spiralis secundum circumuolutionem. Esto linea spiralis a b c d e h in prima reuolutione descripta, initium eius esto punctum a: et initium reuolutionis esto linea a h recta. & circulus h k g, esto primus. incidant itaq; à puncto a duæ rectæ a e, a d lineæ, ad lineam spiralem: & producantur ad circumferentiam circuli, quam attingant in punctis f g. Ostendendum est, quod a e habet ad ipsam a d eam proportionem, quam h k f circumferentiæ pars, ad h k g partem. In circumductu enim lineæ a h manifestum est, pũctum h permeasse circumferentiã h k g æqua uelocitate, qua punctũ a per lineam rectam latũ permeauit lineã a d: & item punctum h per circumferentiam latum æquo tempore permeauit h k f cir-



circumferentiam, quo punctum a lineam a c rectam. Manifestum est igitur, quod a e eandem ad ipsam a d habebit proportionem, quam h k f circũferentia ad h k g circumferentiã. Hoc aũt superius est ostensum. Similiter uero demonstrabitur, si altera incidentiũ linearũ in terminũ lineæ spiralis inciderit. nam idem continget.

SI in lineã spiralem in secũda reuolutione descriptã, incidãt rectæ ab initio spiralis lineæ eductæ, eandem habebunt inter se lineæ rectę proportionẽ, quã dictæ circumferentiæ simul cũ tota circũferentia circuli sumptæ. Esto linea spiralis, 15

in qua a b c d h, quę sit in prima reuolutione descripta. itẽ h l m, in secũda. & incidant in eam duæ rectæ a e, a l. Ostendendũ est quod eandem habet a l ad a e proportionẽ, quã h k f circũferẽtia simul cũ tota circuli circũferentia ad h k g, cũ tota circuli circumferẽtia. In quãto enim tẽpore pũctum a per lineã rectã latũ permeat a l lineã, et h punctũ in eodẽ per circũferẽtiam latũ totã circuli circũferẽtiam permeat, et insuper h k f. Et item dum a punctũ permeat a e, et h punctũ permeat

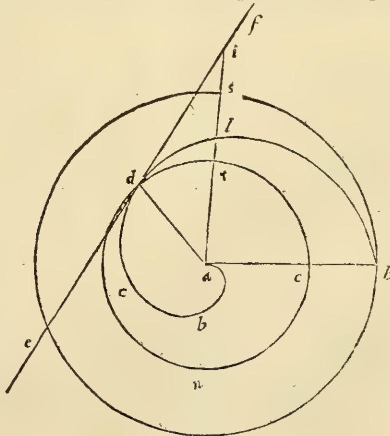


totã circũferẽtiam, & insuper h k g, cũ utrũq; punctũ æque uelociter sibi ipsi ferat. Manifestũ est igitur, quod eãdem habebit a l ad a e proportionẽ, quã h k f cũ tota circuli circũferentia, ad h k g circũferẽtiam, cũ tota eadẽ circuli circũferentia. Eodẽ aũt modo ostendet, & si in lineã spiralem in tertia reuolutione descriptã lineæ rectæ inciderint, eãdem habebũt inter se proportionem, quã dictæ circũferentiæ cũ tota circuli circũferentia bis sumpta utrisq;. Similiter aũt & quæ in alias lineas spirales inciderint, ostendent quod eandẽ habeant proportionẽ, quã dictæ circũferentiæ cum tota circumferẽtia circuli, secundũ numerũ uno minorẽ, q̃ sint reuolutiones. et utraq; linea incidẽs in terminos ipsius lineę spiralis inciderit, idẽ eueniet.

SI lineam spiralem in prima reuolutione descriptam recta linea contingat, & à puncto contactus ducatur linea recta ad punctum quod est principium lineę spiralis: anguli, quos contingens cum ducta facit, erũt inæquales: & ille quidem 16

qui fuerit in præcedentiũ parte, obtusus existet: qui uero in parte sequentium, erit acutus.

Esto linea spiralis, in qua a b c d h in prima reuolutione descripta. & esto a punctum, principium lineæ spiralis. Linea uero recta a h sit initiũ reuolutionis. Sit primus circulus h g k. Contingat autem aliqua recta linea spiralem lineam, quæ sit e d f, in puncto d, & ab ipso d ducatur ad a linea d a. Ostendẽdum est, quod d f cum d a obtusum angulum facit. Describatur d t n circulus, posito a cẽtro secundum interuallum ipsius d a. Necesse est itaq; eam huius



circuli circumferentiam, quæ est in parte præcedentium, infra lineam spiralem cadere.

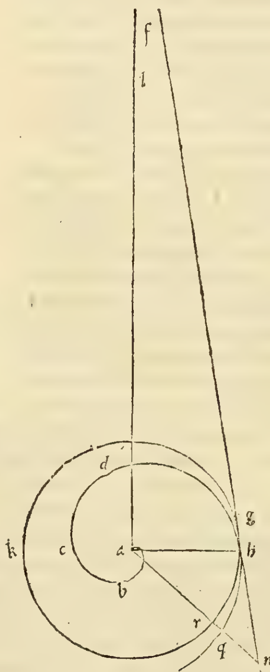
dere. quæ uero in parte, ſequentium extra. Quia linea recta ab a ad lineam ſpiralem in parte præcedentium ducta, eſt maior a d linea. quæ uero ab ipſo a in parte ſequentium ducta fuerit, ipſa a d minor exiſtet. Quod autem angulus contentus ſub a d f, non ſit acutus, patet, cum ſit maior angulo ſemicirculi. Quod autẽ non ſit rectus, eſt ſic oſtendẽdum. Eſto ſi fieri poteſt, ſit rectus. Igitur e d f contingit circulum d t n. Iam poteſt ab a puncto duci linea recta ad cõtingentem, ut eius pars quæ inter circumferentiam & contingentem deprehenditur, ad ſemidiametrum minorem habeat proportionem, quàm habeat circumferentia inter contactum & lineam ductam deprehenſa, ad circumferẽtiam datam. Ducatur itaque, ut dictũ eſt, a t. Secat autem ipſa lineam ſpiralem, eſto in puncto l, & circumferentia circuli d t n in puncto r. & linea a r i recta, ad lineam a r minorem habeat proportionẽ, quàm d r ad d t n circumferentiam. Tota igitur a i ad a r minorem habet proportionem, quàm r d n t circumferentia, ad d n t circumferentiam: hoc eſt quàm habet f g k h circumferentia ad g k h circumferentiam. Quam uero habet f g k h circumferentia, ad ipſam g k h circumferentiam, hãc habet a l recta ad a d rectã. hoc etiam iam oſtenſum fuit. Minorem igitur proportionem habet a i ad a r, quàm l a ad ipſam a d. Quod quidem eſſe non poteſt. nam r a eſt æqualis ipſi a d. Non eſt igitur angulus a d f rectus. Et oſtenſum eſt, eum non eſſe acutum. Quare obtuſus exiſtet. reliquus igitur eſt acutus. Similiter oſtendetur, ſi contingens contigerit in termino lineæ ſpiralis. nam idem eueniet.

17 SI lineam ſpiralem in ſecunda reuolutione deſcriptam, linea recta continget, illud idem eueniet. Contingat itaque linea recta e f, lineã ſpiralem in ſecũda reuolutione deſcriptam, in puncto d: et cetera ſimiliter ſuperiorib. diſponãtur. Similiter circumferentiæ r n d circuli pars illa, quæ erit in parte præcedentium, cadet intra lineam ſpiralem: quæ uero in parte ſequentium, cadet extrà. Angulus igitur a d f non eſt acutus, neque rectus, ſed obtuſus: quod ſic demonſtratur. Eſto enim ſi fieri poteſt, ſit rectus. linea igitur e f continget circulum r n d. Eſto in puncto d. Ducatur item a i ad contingentem, & ſecet lineam quidem ſpiralem in puncto q, circumferentiam uero circuli r n d in puncto r. Habeat autem r i ad a r minorem proportionem, quàm d r circumferentia ad totã circuli r n d circumferentiam, et ad d n t circumferentiam. Oſtenſum enim eſt, hoc eſſe poſſe. & iam tota i a ad a r minorem habet proportionẽ, quàm r d n t circumferẽtia cum tota circuli circumferẽtia, ad d n t circumferentiã, cum tota d n t circũferentia. Sed quam proportionẽ habet r d n t circumferẽtia, cum tota d n t r circuli circumferentia, ad d n t circumferentiam cũ tota d n t circuli circumferentia: hanc habet f g k h circumferentia, cum tota circuli circumferentia h f g k, ad g k h circumferentiam, cum tota circuli h f g k circumferentia. Quam autem proportionem habent circumferentiæ poſtremò dictæ, eam habet q a linea recta, ad ipſam a d rectã. Hoc enim oſtenſum fuit. Minorem

igitur

igitur proportionem habet i a ad a r, quàm a q ad ipſam a d: quod quidem eſſe nõ poteſt. nam r a eſt æqualis ipſi a d. maior uero eſt i a, quàm a q. quare conſtat, angulum a d f obtuſum eſſe, reliquum uero acutum. Hæc eadem euenient, ſi contingens in termino lineæ ſpiralis ipſam contingere ponatur: & eadem ratione demõſtrabitur, ubi lineam ſpiralem quacunq; reuolutione deſcriptam, linea recta contigerit, etiam in termino ipſius lineæ ſpiralis angulos inæquales fieri, cum linea ducta à puncto quod eſt initium lineæ ſpiralis ad punctum contactus: & eum qui in parte præcedentium fuerit, obtuſum eſſe: qui uero in parte ſequentium, acutum.

SI lineam ſpiralem in prima reuolutione deſcriptã linea recta contigerit in ter- 18
mino lineæ ſpiralis, à puncto autem quod eſt initium lineæ ſpiralis, ducatur linea quædam recta ſtans angulis rectis ſuper lineam, quæ initium fuit reuolutionis: illa ducta coincidet lineæ contingenti, & eius pars quæ intra contingentem, & initium ſpiralis lineæ deprehenditur, æqualis erit circumferentiæ primi circuli.



Eſto linea ſpiralis a b c d h, eſto autem pũctum a initium eius, linea uero a h initium reuolutionis, & ſit h g k circulus primus. Contingat autem quædam ſpiralem lineam in puncto h, quæ ſit h f, & à puncto a ducatur ad angulos rectos ſuper lineam h a, linea a f, quæ coincidet cum h f, cum f h, h a contineant angulum acutum. coincidat itaq; in puncto f. Eſt itaq; demõſtrandum, lineam rectam f a circumferentiæ circuli h k g eſſe æqualem. Si enim non eſt, aut erit ea maior, aut minor. Eſto primũ, ſi eſſe poteſt, maior. Sumatur autem quædam recta, quæ ſit minor linea a f, & maior circumferentia h k g. eſt iam h k g circulus quidam, & in circulo linea recta minor diametro, quę eſt g h: & proportio linea h a ad a l maior eſt proportione ea quam habet dimidia h g ad lineam ab ipſo a ad ipſam h g perpendiculariter ductam, quoniam & eam habet quam h a ad a f. Poteſt igitur à puncto a educi ad eductam a n, ita ut n r, quæ media intercipit inter h n eductam, & circumferentiã ad ipſam h r rectam, eam habeat proportionem, quã h a ad a l. Habebit igitur n r ad r a, eam quã habet h r recta ad a l. ipſa uero h r ad a l minorem proportionem habet, quàm h r circumferentia ad k h g circuli circumferentiã. nam h r recta minor eſt circumferentia h r, & linea a l recta maior eſt circumferentia circuli. Minorem igitur proportionem habebit n r ad r a, quàm h r circumferentia ad h k g circuli circumferentiam. Tota igitur n a ad a r habet minorem proportionem, quàm k r circumferentia cum tota circuli circumferentia ad h k g circuli circumferentiam. Quam autem proportionem habet h r circumferentia cum tota circuli h g k circumferentia, ad h k g circuli circumferentiam, hanc habet q a ad h a. Hoc enim oſtenſum eſt. Minorem igitur proportionem habebit n a ad a r, quàm q a ad h a. quod quidem eſſe non poteſt. Nam n a maior eſt ipſa q a, & a r eſt æqualis h a. non eſt igitur a f circumferentia circuli h k g maior. Eſto uero, ſi fieri poteſt, minor f a circũferentia circuli

circuli h k g. Sumatur item quædam linea a l recta, quæ sit maior a f, & minor circumferentia circuli h k g. Et ducatur à puncto h recta h m, æquedistans ipsi a f. Rursus est circulus h k g, & in ipso linea recta h g minor diametro, & itẽ alia quæ contingit circulũ in pũcto h. et proportio quam habet h a ad a l, est minor ea quã habet dimidia g a ad lineã ab a ad se ductam perpendiculariter. Quoniã uero & minor est ea quã habet h a ad a f, potest ab a duci a p ad cõtingentem, ita ut r n linea inter rectam in circulo datam & circumferentiam compræhensa, ad lineam h p compræhensam inter ductam & cõtactum eam habeat proportionẽ, quam h a ad a l. Secet autem a p circulũ in puncto r, lineam uero spiralem in puncto q. Tunc habebit permutatim, eandem proportionem n r ad r a, quam h p ad a l. Linea uero h p ad a l maiorem habet proportionẽ, quàm h r circumferentia, ad h g k circuli circumferentiam. nam h p recta, maior est h r circũferentia: & a l minor est h g k circuli circumferentia. maiorem ergo habet proportionem n r ad a r, quàm h r ad g h k circuli circumferentiam. quare & r a ad a n maiorem habet proportionem, quàm h g k circuli circumferentia, ad h k r circumferentiã. Quam autem proportionem h g k circuli circumferentia ad h k r circumferentiã, eam habet h a recta ad a q. nam hoc est ostensum. Maiorem ergo proportionem habet r a ad a n, quàm h a ad a q. quod quidem esse non potest. Non est igitur minor, neque maior a f recta, h g k circuli circumferentia. igitur est eidem æqualis.

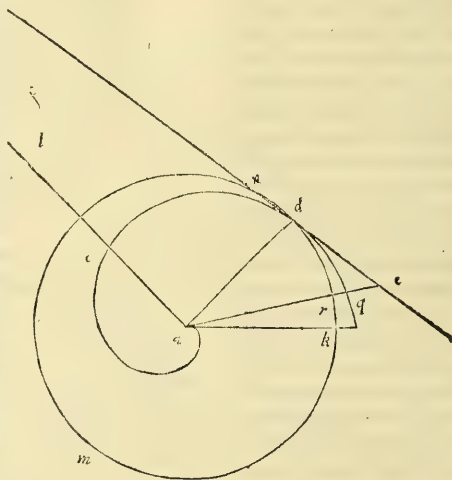
20 SI lineam spiralem in secunda reuolutione descriptam aliqua linea recta in illius termino contingat, & ab initio lineæ spiralis ducatur aliqua recta super lineam quæ est initium reuolutionis constituta ad angulos rectos: illa coincidet cũ contingente, & linea recta quæ media erit inter contingentem, & initium lineæ spiralis, dupla esse probatur circumferentiæ circuli secundi. Esto itaq; a b c h linea spiralis in prima reuolutione descripta, et h e t in secũda, & h k g circulus primus, & t m n secundus. Sit autem t f quædam linea contingens lineam spiralem in pũcto t, & f a ducta ad angulos rectos super t a. Coincidet autem ipsa lineæ t f, cum sit ostensum angulum a t f esse acutum. Ostendẽdum itaq; est, a f rectam duplam esse circumferentiæ circuli t m n. Nam si non est ei dupla, aut plus aut minus erit, quàm dupla eiusdem. Esto prius si potest esse, plus quàm dupla, & sumatur a l recta minor a f recta, & maior quàm dupla circumferentiæ circuli t m n. Est iam circulus quidam t m n, & in circulo linea data t n minor diametro: & quam habet t a ad a l maior est proportione quam habet dimidia t n, ad perpendicularem ab a

cen tro

centro ad ipſam ductam. Poteſt igitur ab a educi a ſ ad t n extra actam, ita ut media inter t n extra actam, & circumferentiam quæ ſit r s, habeat ad t r eam proportionem, quam t a ad a l. Secet autem a ſ circulum in puncto r. Et lineam ſpiralem in puncto q. Et permutatim, eãdem habebit proportionẽ r s ad t a, quam t r ad a l. Sed ipſa t r ad a l minorem proportiõem habet, q̃ t r circũferentia ad duplam circumferentiæ circuli t m n. nam t r linea recta, minor eſt t r circũferẽtia. Recta uero a l maior eſt, q̃ dupla circũferentiæ circuli t m n. Minorẽ ergo habet proportionem r s ad a r, q̃ t r circũferẽtia ad duplã circumferẽtiæ circuli t m n. Tota igitur s a ad a r minorem habet proportionem, quàm t r circumferentia, cum circumferentia circuli t m n bis ſumpta, ad circumferentiam circuli t m n bis ſumptã. Quam autem proportionem habent dictæ circũferentiæ, eam habet q a ad a t. hoc enim oſtenſum eſt. Minorem ergo proportionem habebit a ſ ad a r, quàm q a ad t a. quod eſſe non poteſt. nõ eſt igitur a f plus quàm dupla circumferentiæ circuli t m n. Similiter autem oſtendetur, quod neq; minor, quàm dupla illius eſſe poteſt. Quare conſtat duplam eſſe. Oſtendendum quoq;, ſi lineam ſpiralem in quacunque reuolutione deſcriptã, recta quædam contigerit in termino illius, & ab initio lineæ ſpiralis ducatur ſuper lineam quæ eſt reuolutionis initium, linea recta ad angulos rectos, ipſa coincidet contingenti, & multiplex eſt circumferentiæ circuli ſecundum reuolutionem numeri nominati eodem numero, & ipſa multiplex nominata.

SI lineam ſpiralem in prima reuolutione deſcriptam linea recta contingat, non 21
in termino ipſius, & à puncto cõtactus ad initium lineę ſpiralis recta ducatur, & initio lineæ ſpiralis poſito centro deſcribatur circulus ſecundum interuallum lineæ ductæ, ab initio autem lineæ ſpiralis quædam recta ducatur ſuper lineam reuolutionis initium ad angulos rectos conſtituta, ipſa cum contingente concurret. Et linea inter huiuſmodi concurſum & initium lineæ ſpiralis media, æqualis eſt circumferentiæ circuli deſcripti, quæ inter punctum contactus & ſectionis pũctum compræhenditur, in quo puncto circulus deſcriptus ſecat lineam initium reuolutionis, cum in præcedentium parte circumferentia ſumatur à pũcto quod ſitum eſt in reuolutionis initio. Eſto linea ſpiralis, in qua a b c d in prima reuo-

lutione descripta, & contingat eam aliqua recta e d f, in puncto d. ab ipso uero d ad initium lineæ spiralis ducatur linea d a, & super centro a describatur circulus secundum interuallum a d, qui sit d m n. Secet autem hic initium reuolutionis in puncto k. Ducatur autem f a ad a d secũdum angulos rectos. Quod autem ipsa cõcurret cũ cõtingẽte, manifestũ est. Quod uero f a recta sit æqualis k m n d circũferẽtiæ, est demõstrandũ. Nã si nõ, uel maior, uel ea minor existet. Esto primũ maior, si esse potest. Sumat̃ aũt quædã recta l a, minor recta f a, & maior circumferẽtia k m n d. Rursus circulus est k m n, & in circulo recta d n minor diametro data, & proportio quã habet d a ad a l, maior est ea quam habet dimidia d n, ad perpendicularem à cẽtro super ipsam d n ductam. Potest igitur à puncto a educi a e ad ipsam n d



extra ductã, ita ut e r ad d r eã habeat proportionẽ, quam d a ad a l. nã hoc fieri posse ostẽsum est. Habebit igitur e r ad a r eam proportionẽ, quam d r ad a l. & d r ad a l minorem habet proportionem, quàm d r circumferentia ad k m d circumferẽtiam, cum d r recta minor sit d r circumferentia, ipsa uero a l sit maior k m d circũferentia. Minorem ergo proportionem habet e r recta ad r a, quàm d r circumferẽtia ad k m d circumferentiam. quare & a e ad a r minorem habebit proportionem, quàm k m r circumferentia, ad k m d circumferentiam. Quam aũt proportionem habet k m r circũferẽtia ad k m d circumferentiã, eã habet q a ad ipsam a d. quare minorem proportionẽ habebit e a ad a r, quàm q a ad ipsam d a, quod esse non potest. Non erit igitur f a maior circumferentia k m d. Similiter autem eis quæ antea dicta sunt ostendetur, quod neq; minor est illa, quare æqualem illi esse necesse est. Eodem autem modo ostendetur, & si lineam spiralem in secunda reuolutione descriptam recta contingat, non in termino illius, & cætera ut prius disponantur, quod linea recta media inter contingentem, & initium lineæ spiralis, æqualis est toti circuli descripti circumferentiæ, & insuper circumferentiæ inter dicta puncta depræhensæ, ipsa iã dicta circũferentia similiter sumpta. Item si lineam spiralem in quacunq; reuolutione descriptam aliqua recta contigerit, non in termino ipsius, & cętera disponantur, ut suprà, quod recta intermedia inter dicta puncta multiplex existit circumferentiæ circuli descripti secundum numerum uno minorem, eo secundum quẽ reuolutio facta fuerit, & dicta insuper media inter dicta pũcta æqualis est dictæ circumferentiæ similiter sumptæ.

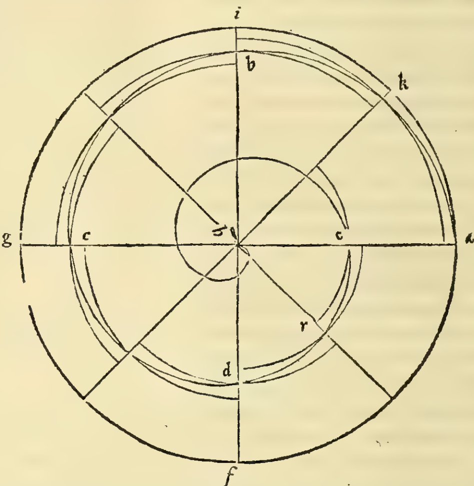
22 SI spacium à linea spirali in prima reuolutione descripta, & à linea recta initio reuolutionis primæ compræhensum sumatur, potest figura quædam plana circa ipsum describi, & altera intra, quæ figurę ex frustis similibus sint compositę, & ita ut id quo circumscripta inscriptam excesserit, quocunq; dato spacio minus existat. Esto linea spiralis in prima reuolutione descripta a b c d. Esto initium lineæ spiralis punctum h, & initium reuolutionis h a. Primus autem circulus

f g i a,

f g i a, & a g, f i diametri ipſius inter ſe altera alteri perpendicularis. Diuiſo itaq; angulo recto per æqualia, & fruſto ſpacij angulum rectum continentis, & hac diuiſione in reliquis reteta, deueniemus tandem ad reſiduũ quoddã, quod minus erit dato ſpacio. & ſit illud fruſtum reſiduum factum a h k, minus dato ſpacio. Diuiſi ſunt itaque anguli quatuor recti in angulos æquales illi angulo qui continetur ſub a h, h k. & rectę partientes angulos uerſus lineam ſpiralẽ ductæ, ſecant eam. Eſto itaq; pũctum l, in quo h k ſecat ſpiram, & centro h deſcribatur circulus ſecundum interuallũ h l. Eius itaq; pars quæ in præcedẽtium partem fertur, intra ſpiralem lineam cadet. Quę uero in partem ſequẽtium, extra. Deſcribatur itaq; eius circumferentia, ut incidat in a h in pũcto o, & ſit ipſa o m. Et item linea, quæ poſt h k ad ſpirã ducta, ſecat illam, eſto in pũcto n. & dicta circumferentia incidat in illam in puncto m. Et item centro h interuallo h n poſito, deſcribatur circulus. Huius quoq; circũferentia incidet in lineam ſequentem h m, quæ à centro ducta incidit in ſpiram. Et ſimiliter in alijs omnibus quæ ſecant lineam ſpiralem, & faciunt angulos ſecũdum unamquanq;, deſcribantur circuli in centro h, eorum circumferentiæ ſecũdum unamquamq; incident & in præcedentem & in ſequentem. Et circũferentiæ in præcedentium parte intra cadent, & in parte ſequentium extra lineam ſpiralem. Iam igitur circa ſpacium ſumptum, eſt circumſcripta quædam figura: & alia inſcripta eidem, quæ ſunt ex fruſtis ſimilibus compoſitæ, & circumſcripta addit ſuper inſcriptam dato ſpacio minus. Quod oſtendetur. nam fruſtum h l o eſt æquale fruſto h l m, & h n p æquatur h n r, & h q s ipſi h q t. Eſt etiam unumquodq; eorum fruſtorum, quæ in figura inſcripta continentur, æquale illi fruſto in figura circumſcripta contento, quod commune latus cum illo habuerit. Conſtat igitur, omnia fruſta omnibus fruſtis æqualia eſſe. Figura igitur ſumpto ſpacio inſcripta, eſt æqualis figuræ circumſcriptæ eidem, dempto a h k fruſto. nam hoc ſolum eorum quæ in figura circumſcripta exiſtunt, relictum eſt. Cõſtat igitur, circumſcriptam figuram inſcripta maiorem eſſe fruſto h k a: quod quidem eſt propoſito ſpacio minus. Ex hoc itaq; manifeſtum eſt, quod circa dictum ſpacium poteſt circumſcribi figura qualis dicta eſt, & altera inſcribi dicto ſpacio, ita quod circumſcripta dicto ſpacio ſuperaddat minus quocunq; ſpacio dato, & inſcripta diminuat ab eodem quocunq; dato ſpacio minus. Et ipſum ſpacium figuram inſcriptam excedat, ſimiliter quocunq; ſpacio dato minus.

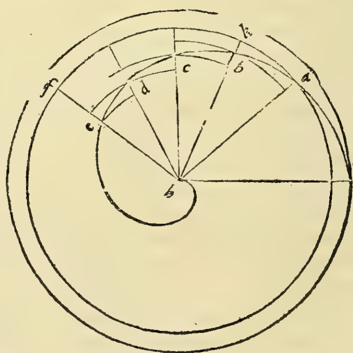
SI ſumatur ſpacium compræhenſum à linea ſpirali in ſecunda reuolutione de- 23
ſcripta, & à recta quæ eſt ſecũda in reuolutionis initio: poteſt ipſi ſpacio quædam plana figura circumſcribi, & alia inſcribi, quæ ex fruſtis ſimilibus ſint cõpoſitæ, ita ut id quo circumſcripta excedit inſcriptam, quocunq; dato ſpacio minus ſit. Eſto linea ſpiralis, in qua a b c d e in ſecunda reuolutione deſcripta: & eſto pũctum h initium lineæ ſpiralis, & a h initium reuolutionis, & e a ſit recta ſecunda in reuolutionis initio, & a f g eſto circulus ſecundus, a g, f i diametri ipſius quæ

ſeſe ad angulos rectos ſecent. Et item diuiſis per æqualia angulis rectis, & fruſtis quæ continent angulos rectos ſimiliter, & pariter diuiſis, & hac diuiſione perducta, tandem deueniemus ad aliquod reſiduum, quod erit minus quocunque ſpacio dato. Et ſit illud fruſtum h k a minus dato ſpacio. Diuiſis angulis rectis in æquales angulos ei angulo, qui continetur ſub k h a, & cæteris diſpoſitis ut ſupra, erit id quo figura circumſcripta excedet inſcriptam minus ſpacio dato. nam exceſſus quo fruſtũ h k a excedit fruſtũ h e r, minor eſt fruſto h k a. Quare conſtat, circumſcriptã figuram addere ſuper inſcriptam minus dato ſpacio, et eam ſuper ſpacium in ſpira ſumptum addere poſſe minus quocũque ſpacio dato. Et ipſum ſpaciũ ſumptum addere ſuper inſcriptam minus quocunque ſpacio dato, & hæc fieri poſſe. Eodem autem modo



conſtat fieri poſſe, ut ſumpto ſpacio à linea ſpirali in quacunque reuolutione deſcripta compræhenſo, & à recta reuolutionis initio ſecundum reuolutionis numerũ dicta circa ipſum ſpacium quædam figura plana circumſcribatur, & altera inſcribatur eidem, ut dictum eſt, ita ut id quo circumſcripta ſumptum ſpacium excedat, minus ſit quocunque ſpacio dato. Et item id quo ſpacium ſumptum excedat inſcriptam ſibi figuram, ſit minus quocunque ſpacio dato.

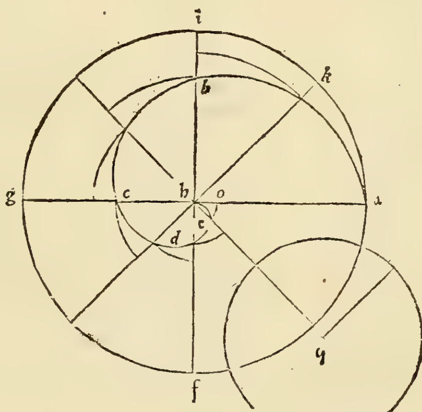
24 SI ſumatur ſpacium compræhenſum à ſpirali linea, quæ ſit minor ea quæ in una reuolutione deſcribitur, quæque non habeat terminum lineæ ſpiralis initium, & compræhenſum à rectis ductis ab initio lineę ſpiralis ad terminos dictæ ſpiralis ſpacium compræhendentis. Poteſt ipſi ſpacio plana quædam figura circũſcribi, ex fruſtis ſimilib. compoſita: & alia inſcribi eidem, ita ut circumſcripta excedat inſcriptam minus, quàm ſit quodcunque ſpacium datum. Eſto linea ſpiralis a b c d e, eius termini a e: ſit lineæ ſpiralis initium h, & iũgantur a h, e f. deſcribatur quoque circulus centro h, interuallo h a, & incidat in h e in puncto f. Angulo itaque ad h poſito, & fruſto a h f ſimul in æqua diuiſo, et diuiſione tali producta donec reſiduum



mi-

minus exiſtat dato ſpacio, eſt ut fruſtum h a k minus ſit ſpacio propoſito. Similiter iam his quæ ſuprà ſunt demonſtrata, deſcripti ſint circuli per puncta lineã ſpiralem ſecantia tranſeuntes, ſecundum lineas rectas, quæ faciunt ad h angulos æquales. & ductæ ita ſint, ut & in parte ſequentium, & in parte præcedentium incurrant in circumferentias circulorum, quæq; ſuo loco. Erit iam ipſi ſpacio quod à linea ſpirali a b c d e, & à rectis h a, h e continetur, figura quædam circumſcripta plana, ex fruſtis ſimilibus compoſita: & alia eidem inſcripta, & exceſſus quo figura circumſcripta ſuperat inſcriptam, minor eſt ſpacio propoſito. nam fruſtũ h a k eſt minus dato ſpacio. Ex hoc manifeſtum eſt, quod circa dictum ſpacium poteſt circumſcribi figura plana, qualis dicta eſt, ita ut circumſcripta figura dictum ſpacium minori ſpacio ſuperet, quàm ſit ſpacium quodcunque propoſitum. Et ſpacium ipſum figuram ſibi inſcriptam minori ſpacio ſimiliter ſuperet, quàm ſit ſpacium quodcunq; datum.

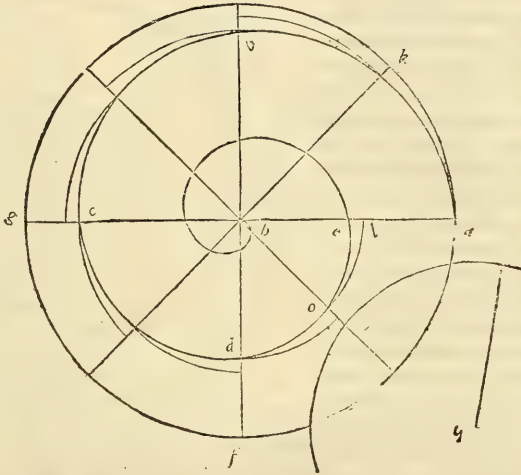
SPacium à linea ſpirali in prima reuolutione deſcripta, & à recta in reuolutionis initio prima comprehenſum, eſt tertia pars circuli primi. Eſto linea ſpiralis 25
in qua a b c d e h in prima reuolutione deſcripta, & h punctum initiũ lineæ ſpiralis, & h a recta prima in reuolutionis initio. & a f g i ſit circulus primus, cuius tertia pars ſit circulus ɥ. Oſtendendũ eſt, quod prædictum ſpacium æquale eſt circulo ɥ. nam ſi non, uel maius erit, uel minus eo. Eſto primum, ſi eſſe poteſt, minus eo. Circa ſpacium itaq; contentum ſub a b c d e h linea ſpirali, & ſub recta h a deſcribi poteſt figura quædam plana ex fruſtis ſimilibus compoſita, ita ut id quo circumſcripta figura ſuperat ipſum ſpacium, ſit minus eo quo circulus ɥ ſuperat ſpacium dictum. Circumſcribatur itaq;, & eſto fruſtorũ ex quibus componitur dicta maximum h a k, minimum uero h e o. Manifeſtũ igitur, quod figura circumſcripta minor eſt circulo ɥ. Eductæ autem ſunt lineæ rectæ ab h facientes angulos æquales, & incidẽtes in circumferentiam circuli. Quædam uero intra cadunt, in lineam ſpiralem incidentes, quæ ſeſe æquali exceſſu ſuperant: quarũ maior quidem eſt h a, minor uero h e, & minima ęqualis exceſſui. Sunt autẽ & aliæ lineæ ab h ad circũferentiam circuli procedentes, multitudine quidem prædictis æquales, magnitudine uero unaquæq; æqualis maximæ prædictarum, & ab omnibus ſimilia fruſta compræhenſa ſunt, & ab his quæ ſeſe æquali exceſſu ſuperant, & ab his quæ ſunt inter ſe & maximę illarum æquales. Fruſta igitur quæ cõtinẽtur, ab his quæ inter ſe ſunt & maximæ illarum æquales, ſunt minus quàm tripla fruſtorum quæ continentur ab illis quæ ſeſe æqualiter excedunt. Oſtenſum namq; hoc fuit. Sunt autem fruſta ab his compræhẽſa, quæ inter ſe ſunt & maximæ aliarum æquales, circulo a f g i æqualia. Fruſta uero contenta ab illis quæ ſeſe æqualiter excedunt, æqualia ſunt figuræ circumſcriptæ. circulus ergo a f g i minor eſt quàm triplus figuræ circũſcriptæ, Ipſe uero eſt triplus circuli ɥ. Circulus ergo ɥ minor exiſtet figura cir



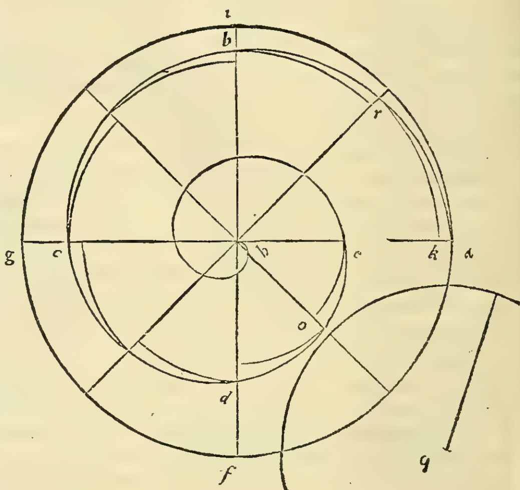
cumſcripta: quod quidem uerum non eſt, ſed maior exiſtit illa. Non eſt igitur ſpacium compræhenſum à linea ſpirali a b c d e h, & linea recta h a, minor circulo ɣ. Neq; utiq; maior. Eſto itaq; maior, ſi eſſe poteſt. Item ſpacio compræhenſo à linea ſpirali a b c d e h, & recta h a poteſt inſcribi figura, ita ut dictũ ſpacium minus addat ſuper figuram inſcriptã, quàm ſit id quodcunque ſpacium dictum addit ſuper circulum ɣ. Inſcribatur itaq;. Et eſto fruſtorum ex quibus inſcripta componitur, maximũ h r x. minimum uero, o h e. Conſtat iam, figuram inſcriptam circulo ɣ eſſe maiorem. lineę quæ angulos ad h faciebant æquales eductæ, in circuli circumferentiam inciderunt. Rurſus quædam rectæ ſunt ſeſe æqualiter excedentes, ab h ad ſpiram procedentes, quarum maxima eſt h a, minima uero h e, & minima æquatur exceſſui. Sunt item aliæ lineæ ab h puncto ad circuli circumferentiam eductæ, multitudine quidem æquales prædictis, magnitudine uero unaquæq; æqualis maximæ illarum: & ab omnibus deſcribuntur fruſta ſimilia, & ab illis quæ inter ſe & maximæ aliarum ſunt æquales, & ab illis quæ ſeſe æqualiter excedũt. Fruſta igitur ab illis quæ ſunt maximæ aliarum æquales, deſcripta exiſtunt plus quàm tripla fruſtorũ quæ à lineis ſeſe æqualiter excedentibus continentur, dempto illo quod à maxima contentum eſt. Hoc enim demonſtratum fuit. Fruſta uero à lineis maximæ æqualib. contenta, circulo a f g i æqualia ſunt. quæ uero à lineis æqualiter ſeſe excedentib. compræhenduntur, dempto eo quod à maxima æquantur, figuræ inſcriptæ. Circulus igitur a f g i eſt plus quàm triplus inſcriptæ figuræ. idem uero triplus eſt circuli ɣ. Quare circulus ɣ maior eſt inſcripta figura. Sed fuerat poſitus minor. Spacium igitur comprenſum à ſpira a b c d e h, & à recta a h, neq; minus circulo ɣ, neque maius exiſtit. Igitur neceſſe eſt eſſe eidem æquale, quod erat demonſtrandũ.

26 SPacium quod à ſpirali linea in ſecunda reuolutione deſcripta, & à ſecunda linea recta reuolutionis initio producta cõtinetur, habet ad circulum ſecundũ eam proportionem, quam ſeptem ad duodecim, quæ eadem eſt ei quam habent utraq; ſimul, contentum ſub ſemidiametro circuli ſecundi, & ſemidiametro circuli primi, & tertia pars quadrati lineæ illius qua ſemidiametros ſecundi circuli excedit ſemidiametrum primi circuli, ad quadratum ſemidiametri circuli ſecundi. Eſto linea ſpiralis, in qua a b c d e, in ſecũda reuolutione deſcripta. Eſto h pũctum lineæ ſpiralis initium, recta uero h e in reuolutionis initio prima. recta autem a e, in reuolutionis initio ſecunda: circulus a f g i ſecundus. ſint autem a g, f i diametri eius, altera alteri ſit perpendicularis. Oſtendendum eſt itaq;, ſpacium contentum à linea ſpirali a b c d e, & à recta a e ad circulum a f g i, habere eam proportionem, quam ſeptem habent ad duodecim. Eſto circulus quidam ɣ, cuius ſemidiametrus poteſtate ſit æqualis ei quod continet ſub a h, h e, & tertiæ parti quadrati lineæ a e. habebit iam circulus ɣ ad circulum a f g i, ſicut ſeptem ad duodecim. Quoniam ſemidiametrus eius ad ſemidiametrum a f g i circuli eam habet proportionem poteſtate. Sed circulus ɣ oſtendetur æqualis eſſe ſpacio contento à linea ſpirali, & à recta a e. nam ſi non ſit, uel itaq; maior erit, uel minor eo. Eſto itaq; primum maior,

ior, si esse potest. Circa spacium itaque describi potest quædam plana figura, ex frustis similibus composita, ita ut figura circumscripta super spacium addat minus, quàm sit spacium quo ɣ circulus excedit dictum spacium. Esto circumscripta, & sit h a k frustum maximum eorũ ex quibus figura circumscripta componitur, minimũ uero h o d. Constat igitur, circumscriptam figuram circulo ɣ esse minorẽ. Educantur lineæ rectæ quæ faciunt angulos æquales ad h uersus circumferentiam circuli secũdi, in eam incidẽtes. Erunt iam quædam lineæ rectæ, sese æqualiter excedentes, quæ uidelicet à puncto h, in spiram incidunt, quarum maxima est h a, minima uero h e. Erũt etiam aliæ lineæ à puncto h, ad circumferentiã circuli a f g i eductæ, multitudine quidẽ una pauciores illis: magnitudine uero & inter se, & maximæ illarum æquales, & confecta sunt frusta similia, & ab eis quæ sunt inter se & maximæ illarum æquales, & ab eis quæ sese æqualiter excedunt: à minima autem non est confectum aliquod. Frusta igitur, ab eis quæ sunt æquales maximæ illarum confecta, habent ad frusta confecta à lineis sese æqualiter excedentibus, dempto eo quod à minima, minorem proportionem, quàm quadratum h a maximæ ad utraque simul hæc, ad contentũ sub h a, h e, & tertiam partem quadrati a e. Hoc enim ostensum est. Circulus autem a f g i æquatur frustis, quæ à lineis inter se & maximæ illarum æqualibus confecta sunt. Frustis autem confectis à lineis sese æqualiter excedentibus, æquatur figura circumscripta. Minorem igitur proportionem habet circulus a f g i, ad figuram circumscriptam, quàm quadratum ad hæc utraque simul, ad contentum sub a h, h e, & tertiam partem quadrati a e. Quam autem proportionem habet quadratum a h, ad cõtentum sub a h, h e, & tertiam partem quadrati a e: hanc habet circulus a f g i, ad circulum ɣ. Minorem ergo proportionem habet à f g i circulus ad figuram circumscriptam, quàm ad circulum ɣ. Quare colligitur, circulum ɣ minorem esse figura circumscripta. quod est cõtrarium ei quod positum fuerat. Circulus igitur ɣ spacio à linea spirali a b c d e, & recta a e contento, maior esse non potest. Verum neque minor. Esto namque, si esse potest. Rursus in spacio à linea spirali a b c d e, & recta a e contento, potest quædam figura plana inscribi, ex frustis similibus composita, ita ut spacium à linea spirali a b c d e, & recta a e contentum, addat supra figuram inscriptam minus eo quo idem spacium excedit circulum ɣ. Esto igitur inscripta, & sit h k r frustum maximum eorum ex quibus componitur inscripta figura. Minimum uero, sit h e o. Constat igitur figuram inscriptam circulo ɣ esse maiorẽ. Educãtur lineæ rectæ, quæ faciunt angulos æquales ad h, uersus circumferentiã cir-

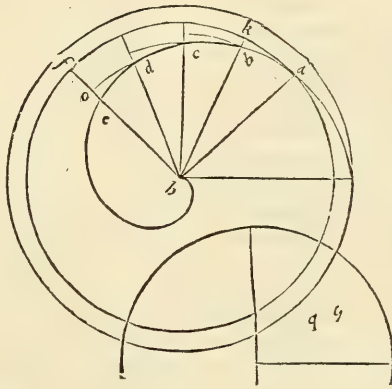


circuli a f g i, in quam incidant. Rursus erunt lineæ quædam æqualiter sese excedentes, quæ à puncto h in spiralem incidunt, quarum maxima h a, minima uero h e. Erunt item aliæ lineæ à puncto h ductæ in circumferentiam circuli incidẽtes, multitudine quidẽ una pauciores illis, magnitudine uero & inter se & maximæ illarũ æquales. Et à lineis sese equaliter excedentibus confecta sunt frusta similia, & à lineis maximæ illarum æqualibus. Frusta igitur ab æqualibus maximæ illarum confecta, ad frusta à lineis sese æqualiter excedentibus confecta, dempto eo quod à maxima maiorẽ proportionem habebit, quàm quadratum h a ad hæc utraque simul, ad cõtentum sub a h, h e, & tertiam partem quadrati a e. Frustis autem quę à lineis sese æqualiter excedentib. sunt confecta, dempto eo quod à maxima æquatur figura inscripta spacio: frustis uero alijs circulus æquatur. Quare sequitur circulum a f g i maiorem habere proportionem ad figuram inscriptam, quàm quadratum h a ad hæc utraque simul, ad contentum sub a h, h e, & tertiam partem quadrati a e, hoc est circulus a f g i ad circulum ϛ. Vnde colligitur, circulum ϛ figura inscripta esse maiorem. Quod positioni contrariũ est. Neque igitur circulus ϛ spacio à linea spirali a b c d e, & recta a h contento minor esse potest. igitur illi æqualem esse necesse est. Eodem autem modo ostendetur spaciũ à linea spirali in quacunque reuolutione descripta, & à recta contentum, quæ secundum numerum reuolutioni eundem, nominetur ad circulum ab eodem numero denominatum, eã habere proportionem quam utraque simul ista, cõtentum sub semidiametro circuli à numero reuolutionis dicti, et sub semidiametro circuli dicti à numero qui sit unitate minor numero reuolutionis, et tertia pars quadrati ab ea linea producti, qua semidiametros maioris circuli ex prædictis excedit semidiametrum minoris circuli prædictorum, ad quadratum semidiametri maioris circuli prædictorum.

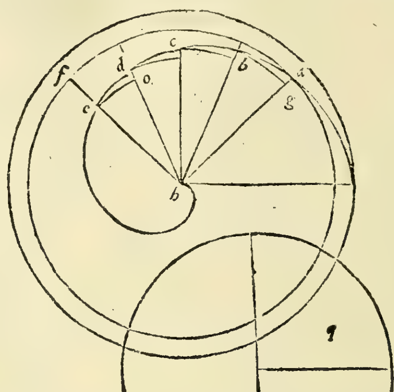


27 SPacium quod continetur à linea spirali, quę sit minor ea quam una reuolutio describit, quæque non habeat terminum initiũ lineæ spiralis, sed lineas rectas à terminis suis ad lineæ spiralis initium ductas, habet ad frustum quod eam quæ ex centro habeat æqualem maiori earum quæ à terminis ad lineæ spiralis initium ductæ sint: circumferentiam uero eam quæ inter dictas lineas media intercipitur in parte lineæ spiralis, eam proportionem quam hæc utraque simul, cõtentum sub lineis quæ à terminis ad lineæ spiralis initium ductæ sunt, & tertia pars quadrati eius lineæ qua maior dictarum linearum minorem excedit, ad quadratum maioris earum quæ à terminis ad lineæ spiralis initium iunctæ fuerunt. Esto linea spiralis in qua a b c d e, minor ea quam una reuolutio describeret: eius sint termini a e. Esto autem lineæ spiralis initium pũctum h, et centro h, interuallo autem h a, cir-

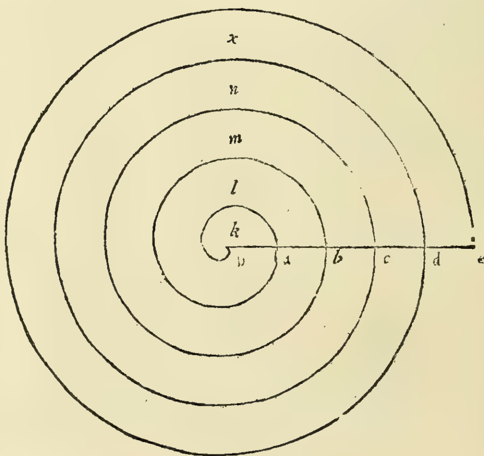
circulus describatur, & concurrat eius circumferentia h e in puncto f. Ostendendum est, quod spacium ab a b c d e linea spirali, & ab a h, h e contentum ad frustũ a h f, eam habet proportionem, quam utraq; simul ista, contentum sub a h, h e, & tertia pars quadrati e f lineę ad quadratum lineæ h a. Esto itaque circulus in quo ℊ q. cuius semidiametros sit in potẽtia æqualis contento sub a h, h e, & tertiæ parti quadrati e f. Et sit angulus ad centrum eius æqualis angulo ad h constituto. Frustum itaque ℊ q, ad frustum h a f eandem habet proportionem, quam contentum sub a h, h e, et tertia pars quadrati e f, habet ad quadratum h a. nam istorũ semidiametri hanc proportionem potentia inter se habent. Ostendendum iam est, frustum ℊ q, æquale esse spacio contento sub a b c d e linea spirali, & sub a h, h e rectis. nam si non, uel maius erit, uel minus. Sit itaque primò maius, si esse potest. Spacio igitur potest figura quędam plana circũscribi ex frustis similibus cõposita, ita ut ipsa addat super spacium minus eo quo ℊ q frustum excedit ipsum spacium dictum. esto circumscripta, & sit frustorum ex quibus componitur dicta figura maius quidem h a r, minus uero h o d. Manifestũ est, his positis figuram circũscriptam minorem haberi frusto ℊ q. Iam actæ sunt lineæ quæ faciunt angulos æquales ad h, uersus circumferentiam frusti h a f, in quam incidunt. Erunt iam quædam lineæ rectæ sese æqualiter excedentes, quæ ab h in spiralem incurrunt, quarum maxima quidem h a, minima uero h e. erunt item aliæ lineæ rectæ numero quidem una pauciores illis, magnitudine autem inter se & maximæ illarum æquales, quæ à pũcto h ad frusti a h f circumferentiam ipsi occurrunt, dempta h f. & ab omnibus confecta sunt frusta similia, & ab his quæ sese æqualiter excedunt, & ab his quæ inter se & maximæ illarum sunt æquales. & earum quæ sese æqualiter excedunt, ab h e, nil confectum est. Frusta igitur quæ à lineis inter sese æqualibus & maximæ illarum confecta sunt, ad frusta confecta à lineis sese æqualiter excedentibus, dempto quod a minima frusto, minorem habent proportionem, quàm quadratũ h a adhæc utraq; simul, ad contentum sub h a, h e, & tertiam partem quadrati e f. Frustis autem quæ à lineis inter se, et maximæ aliarum æqualibus constant, æquatur frustum h a f. Illis uero quæ à lineis sese æqualiter excedentibus sunt, circũscripta figura est æqualis. Minorem ergo proportionem habet h a f frustum ad figuram circumscriptam, quàm quadratum h a ad utraq; simul, ad contentum sub h a, h e, & tertiam partem quadrati e f. Quam autem proportionem habet ad dicta quadratum lineæ h a, eam habet frustum h a f ad frustum ℊ q. Quare frustum ℊ q, minus esse concluditur figura circumscripta. Verum positum fuerat maius esse, & demonstratum ex positione. Non est igitur ℊ q frustum maius spacio cõtento sub a b c d e linea spirali, & h a, h e. Neq; utique minus esse potest. ponatur nãque minus, si esse potest, & reliqua eadem disponantur. Rursus spacio potest figura quædam plana inscribi, ex similibus frustis composita, ita ut dictũ spaciũ su



pra figurã inſcriptã minus addat, eo quo ipſum ſpacium excedit ꝗ q fruſtum. inſcribatur itaque: & fruſtorum ex quibus inſcripta figura conſtituitur, eſto maius h b c, minus uero o h e. Conſtat igitur, inſcriptam figuram fruſto ꝗ q eſſe maiorem. Rurſus erunt quædam lineæ ſeſe æqualiter excedentes à puncto h, ad lineam ſpiralem accedentes: quarum maxima quidem h a, minima uero h e. Eunt quoque aliæ inter ſe, & maximæ illarum æquales à puncto h, ad circumferentiam fruſti h a f productæ, excepta h a, quæ numero quidẽ illis ſunt una pauciores, magnitudine uero inter ſe & maximæ aliarũ æquales. & ab unaquaque fruſta ſimilia conſcripta ſunt: à maxima uero earũ quæ ſeſe æqualiter excedunt, nullum conſcriptum eſt. Fruſta igitur à lineis æqualibus inter ſe, & maximæ aliarum confecta, ad fruſta à lineis ſeſe æqualiter excedentibus contenta, dempto eo quod à maxima, maiorem habent proportionem, quàm quadratum h a, ad contentum ſub h a, h e, & tertiam partem quadrati e f. Quare & fruſtum h a f ad figuram inſcriptam, maiorem habebit proportionem, quàm ad ꝗ q fruſtum. Vnde ſequitur ꝗ q fruſtum maius eſſe figura inſcripta. At uero poſitũ fuerat, minus eſſe. Non poteſt igitur fruſtum ꝗ q minus eſſe ſpacio à ſpirali linea, & rectis h a, h e comprehenſo. quare eidem æquale eſſe neceſſe eſt.



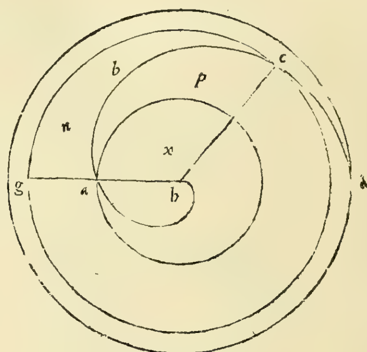
28 EOrum quæ continentur à lineis ſpiralibus, & rectis quæ in reuolutionibus reputãtur ſpaciorum, id quidem quod tertium datur, eſt duplum ſecundi, quartum eſt eius triplum, quintum eſt quadruplum: & ſic deinceps ſecundum numeros creſcentes, ſemper ſequens ſpaciũ eſt multiplex ſecũdi, primũ autem ſpacium ſexta pars ſecundi eſſe demonſtratur. Eſto linea ſpiralis propoſita, & in prima, & in ſecunda, & in cæteris deinceps deſcripta reuolutionibus quotcunque. Eſto pũctum h lineæ ſpiralis initium, & recta h e initium reuolutionis. Primum uero ſpacium ſit k, ſecundum l, tertium m, quartum n. Oſtendendum eſt itaque ſpacium k, ſextam



tam partem esse spacij se sequentis, & spacium m duplum esse ipsius l, ipsum n triplum ipsius l. Et eorum quæ sequuntur, semper id quod deinceps sumitur multiplex ipsius l secundum numeros se sequentes. Quod autem k sit sexta pars ipsius l, sic ostẽditur: quoniam l spacium eã habet proportionem ad circulum, secũdum quam habent septem ad duodecim. Secundus uero circulus ad primũ, sicut 12 ad 3. constat enim. Circulus uero primus ad spacium k, sicut tria ad unum. k igitur sexta pars est ipsius l. Rursus k l m spacium ad circulum tertium, eam ostensum est habere proportionem, quam utraq; simul, cõtentum sub c h, h b, et tertia pars quadrati c b ad quadratum ipsius c h. Tertius uero circulus habet se ad secũdum circulum, sicut quadratũ h b. Circulus item secundus habet ad k l spacium, sicut quadratũ h b ad utraq; simul, ad cõtentum sub h b, h a, & tertiam partem quadrati a b. Hæc autem eam habent inter se, quam decem & nouem ad septem. Spaciũ uero k l ad spacium l, sicut septem ad sex. Cõstat igitur spacium m, ipsius l esse duplum. Quod autem ea quæ deinde sequuntur, secundum numeros deinde sequẽtes habeant proportionẽ, deinceps ostendetur. Nam k l m n x, ad circulum cuius ea quæ ex centro est h e, eam habet proportionẽ quam utraq; simul, contentũ sub h e, h d, & tertia pars quadrati d e, ad quadratum h e. Circulus uero, cuius quæ ex centro est h e, ad circulum cuius quæ ex cẽtro est h d, eam habet proportionẽ, quã quadratum h e, ad quadratum h d. Circulus autem cuius quæ ex centro est h d, ad spacium k l m n, eam habet proportionem, quam quadratum h d, ad utraque simul ista, ad id quod continetur sub h d, h c, & tertiam partem quadrati d c. Spaciũ igitur k l m n x, ad spacium k l m n, eam habet quam contentum sub h e, h d, & tertia pars quadrati d e, ad contentum sub h d, h c, & tertiam partem quadrati c d. Diuidendo, & spacium x ad spacium k l m n, eam habet quam excessus contenti sub e h, h d, cum tertia parte quadrati e d, ad contentum sub d h, h c, & tertiam partem quadrati e d, ad contentum sub d h, h c: & tertiam partem quadrati d c. utraq; uero illa simul excedunt ista simul utraq;, eo quo contentum sub e h, h d, excedit contentum sub d h, h c. Excedunt autem eo quod sub d h, e c. Spacium igitur x ad spacium k l m n, eam habet quam contentum sub h d, c e, ad contentũ sub d h, h c, & tertiã partẽ quadrati c d. Per hæc aũt eadem ostẽdetur, quod spaciũ n ad spaciũ k l m, eam habet, quã cõtentum sub h c, b d, ad utraq; simul ista, ad contentũ sub c h, h b, & tertiam partem quadrati c b. Spacium ergo n, ad spacium k l m n, eam habet quam contentum sub h c, b d. itemq; quod sub b h, h c, & tertia pars quadrati c b, ad contentum sub h c, b d. Constat enim diuidendo, & conuersim. Hæc autem æquantur cõtento sub d h, h c, & tertiæ parti quadrati c d. Quoniam igitur spacium x, ad spacium k l m n, eam habet quam contentum sub h d, c e ad utraq; simul ista, ad contentum sub h d, h c, & tertiam partem quadrati c d. Spacium uero k l m n, ad spacium n, eam quam utraq; simul ista contentum sub d h, h c & tertia pars quadrati c d, ad contentum sub h c, d b. Habet igitur spacium x, ad spacium n, eam quam contentum sub h d, c e, ad contentum sub h c, d b. Contentum autem sub h d, c e, ad cõtentum sub h c, d b, eam habet quam h d ad h c, cum c e sit ipsi b d ęqualis. Constat itaq;, quod spacium x ad spacium n, eam habet quã h d ad h c. Similiter ostendetur, spacium n ad spacium m, eam habere proportionem quam habet h c ad h b, & m ad l, sicut b h ad h a. Lineæ uero e h, d h, c h, b h, a h, habent proportionem, quam numeri deinceps continenter sumpti.

SI in linea spirali quacũq; reuolutione descripta, duo pũcta sumantᷓ, quæ non 29
sint eius termini, & ab istis ducantᷓ lineæ rectæ ad initiũ lineæ spiralis, & cẽtro spiræ initio, interuallis uero ipsis lineis quæ ad initiũ spiræ à pũctis ductæ sint, circuli describantur: spacium comprætensum, ab ea maioris circuli circumferentia quæ media inter lineas rectas, & spiram inter easdem lineas comprætensam, & à linea extrà ducta capitur, eã habet proportionẽ ad spaciũ comprætẽsum à circũ

ferentia minoris circuli, & ab eadem spira & à linea recta, quæ earũ terminos iungit, quãq; ex centro circuli maioris cum tertijs duab. excessus eius quo ea quæ ex centro maioris circuli excedit eam quæ ex centro minoris ad eam quæ ex centro maioris, cum una eiusdem excessus tertia parte. Esto linea spiralis, in qua a b c d in una reuolutione descripta. & sumantur in ea duo puncta a c. Esto punctũ h initium spiræ. & ab a & c ducãtur ad h lineę. & cẽtro h, interuallis h a, h c, circuli describantur. Ostendendum quod spacium x ad spacium p, eam habet proportionem, quam utraq; simul a h, et duæ tertiæ g a, ad utramq; simul, ad a h, & unam tertiã ipsius g a. nam spaciũ n p, ad frustũ g c h, ostẽsum est eam habere proportionem, quam habet contentum sub g h, h a, & tertia pars quadrati a g, ad quadratum h g. ipsum



ergo x, ad n p eam habet, quam contentum sub h a, a g, & duæ tertiæ quadrati a g ad utraq; simul, ad contentum sub a h, h g, & tertiam partem quadrati g a. Et quoniam spacium n p, ad frustum n p x, eam habet quam utraq; simul, contentũ sub h a, h g, & tertia pars quadrati g a, ad quadratum h g. Frustum aũt n p x, ad frustum n, eam habet quã quadratũ h g ad quadratũ h a. Spacium quoq; n p, ad ipsum n, eam habebit quam utraq; simul, contentum sub h a, h g, & tertia pars quadrati g a, ad quadratum h a. Igitur n p ad p, eam habet quam utraq; simul, contentum sub g h, h a, & tertia pars quadrati g a, ad utraq; simul, ad contentum sub g a, h a, & tertiam partem quadrati g a. Quoniam spacium x ad n p eam habet, quam utraque simul, contentum sub h a, a g, & duæ tertiæ quadrati g a, ad utraque simul, ad contentum sub g h, h a, & tertiam partem quadrati g a. Spacium autem n p ad p, eam habet quam utraq; simul, contentum sub g h, h a, & tertia pars quadrati g a, ad utraq; simul, ad contentum sub g a, a h, & tertiam partem quadrati g a. Habebit quoq; x ad p, eam quam habent utraque simul, cõtentum sub h a, g a, & duæ tertiæ quadrati g a, ad utraq; simul, ad contentum sub h a, g a, & tertiã partem quadrati g a. Ista uero utraq; simul, contentum sub h a, g a, & duæ tertiæ quadrati g a, ad utraq; simul, ad contentum sub h a, g a, & tertiam partem quadrati g a, eam habent quam utraque simul, ipsa h a, & duæ tertiæ ipsius g a, ad utraq; simul, ad ipsam h a, & tertiam partem ipsius g a. Constat igitur, spacium x ad spacium n, eam habere proportionẽ, quam utraq; simul, ipsa h a, & duæ tertiæ ipsius g a, ad ipsam h a, & tertiam ipsius g a, utraq; simul sumpta.

FINIT ARCHIMEDIS TRACTATVS
de Lineis spiralibus.

AR-

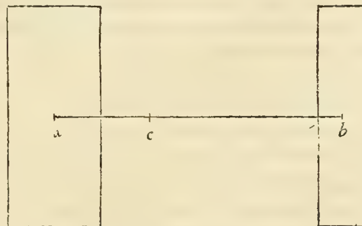
ARCHIMEDIS PLANORVM AEQVEPONDERANTIVM INVENTA, VEL CENtra grauitatis planorum.


ETIMVS grauia æqualia, æquali distantia posita, inter se æqualiter ponderare. Grauia item equalia, distantia inæquali suspensa, non æqualiter ponderare: sed id quod in longiori distantia pendet, ad graue deferri. Item, si grauibus secundũ quandam distantiam æqueponderantibus, alteri eorum adijciatur aliquod graue, tunc ea non æqualiter ponderare, sed illud ad graue deferri, cui quod graue fuerit adiectum. Similiter etiam si ab altero eorum auferatur graue, tunc non æqualiter ponderare, sed id à quo nil sit ablatum, ad graue deferri. Figuris planis similibus & æqualibus inter se coaptatis, centra quoq; grauitatis earum erunt inter se coaptata. Si uero figuræ similes fuerint, non autem æquales, centra grauitatis earum erunt similiter posita. Dicimus puncta similiter posita esse ad similes figuras, à quibus lineæ rectæ, secundum angulos æquales ductæ, ad latera inuicem correspondentia æquales angulos efficiant. Item si magnitudines quædam in quibusdam distantijs positæ æqualiter ponderent, & quæcunq; eis æquales in eisdem distantijs positæ æqualiter ponderabunt. Cuiuscunq; figuræ cuius circum limbus fuerit, in eandem partem connexus, centrum grauitatis intra figuram esse oportet. Suppositis his, sequitur:

GRauia, quæ in distantijs æqualibus posita æqualiter ponderent, æqualia esse. Si enim essent inæqualia, auferreturq; à maiori excessus, reliqua non æqualiter ponderarent: cum ab altero æqueponderantiũ aliquid fuerit ablatum. Quare grauia in distantijs æqualibus æqueponderantia, æqualia esse necesse est. 1

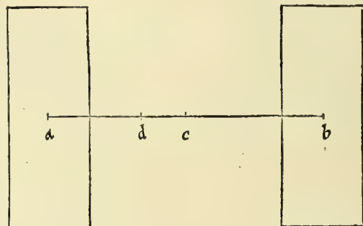
GRauia in distantijs æqualib. posita, si fuerint inæqualia, non æqueponderabunt, sed maius eorũ inclinabitur. Ablato enim excessu, æqueponderabũt: cum æqualia in distantijs posita æqualibus æqueponderent. Eo autem quod ablatum fuerit adiecto, iam in maius inclinabitur, cum alteri equeponderantium sit aliquid adiectum. 2

SI grauia inæqualia in distantijs inæqualibus suspensa, æqualiter ponderent: maius in minori, minus in maiori distantia suspendetur. Esto grauia inæqualia a b, & sit a maius, b minus: & æqueponderent ab a c, c b distãtijs. Ostendendum est, quod a c minor est c b. nam si non, ablato excessu quo a excedit b, cum iam ab altero equeponderantium sit ablatum aliquid, inclinabitur ad b: quod non uerum est. nam a c si esset æqualis b c, æquepõderarent. nam æqualia in distantijs equalibus. Si autem a c maior esset b c, inclinaretur ad a. nam æqualia in distãtijs inæqualib. nõ æqueponderãt. Sed quod in maiori distãtia est, inclinatur. ac iam propter hæc a c minorẽ esse b c necesse est. Manifestũ aũt, quod grauia quæ in di- 3



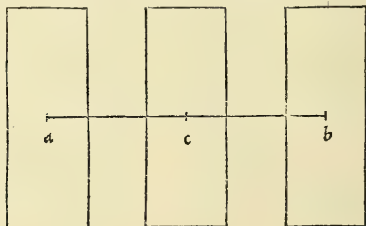
ſtantijs inæqualibus æqueponderāt, inæqualia ſunt. & eorū maius eſt illud quod in minori diſtantia pendet.

4 SI duæ magnitudines æquales non idem centrum grauitatis habuerint, magnitudinis ex utraque compoſitæ cētrum grauitatis eſt medium lineæ rectæ, quæ dictarum magnitudinum centra grauitatis coniungit. Eſto itaq; ipſius a centrū grauitatis ipſum a, et ipſius b ipſum b. Et ſit ducta linea a b, quæ diuidatur in duo æqualia in puncto c. Dico quod utrarumq; compoſitarum cētrum grauitatis eſt ipſum c. nam ſi non, eſto utrarumq; a b magnitudinum compoſitarum centrum grauitatis d, ſi eſſe poteſt. Quod autem eſt in linea a b, prædemonſtratum eſt. Quoniam igitur d eſt centrum grauitatis magnitudinis, compoſitæ ex a & b, apprehenſo d pūcto æqueponderabūt magnitudines

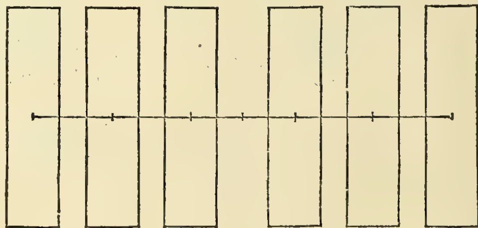


Igitur a b æqueponderabunt in a d, d b diſtantijs, quod eſſe non poteſt. nā æqualia in diſtantijs inæqualibus non æqueponderant. quare manifeſtum eſt, ipſum c centrum grauitatis eſſe magnitudinis ex ipſo a & ipſo b compoſitæ.

5 SI autem trium magnitudinum centra grauitatis in una linea fuerint poſita, & magnitudines æqualem inter ſe grauitatem habuerint, & lineæ rectæ inter cētra ductæ æquales extiterint: magnitudinis ex dictis magnitudinibus compoſitæ centrum grauitatis punctum illud erit, quod idem eſt mediæ magnitudinis centrum grauitatis. Eſto tres magnitudines a b c, centra uero grauitatis earum ſint a b c, pūcta in una recta linea poſita. Sint quoq; a b c ęquales: & lineæ a c, c b rectæ æquales. Dico centrum grauitatis magnitudinis illius, quæ ex omnibus illis magnitudinib. compoſita fuerit, eſt punctum c. Quoniam itaq; a b, magnitudines æqualē habent grauitatem, centrum grauitatis earum erit punctum c. Quoniam a c, c b, rectæ æquales ſunt: eſt etiam

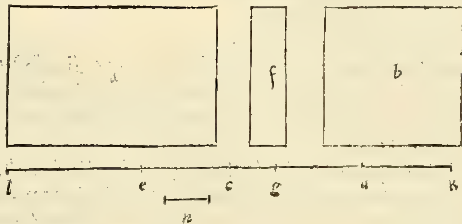


ipſius c centrum grauitatis c punctum. Conſtat quod magnitudinis quoq; ex omnibus illis compoſitæ centrum erit grauitatis punctum, quod eſt magnitudinis mediæ inter illas centrum grauitatis. Ex hoc manifeſtum eſt, quod quotcunq; magnitudinum numero imparium, ſi centra grauitatis, in eadem linea ſint conſtituta, & ſi magnitudines cęteræ ab ea quæ earum media exiſtit, hincinde æqualiter quęque duæ correſpondentes deſtiterint, habuerintq; grauitatem inter ſe æqualem, & lineæ rectæ inter earum cētra mediæ fuerint inter ſe æquales, eius magnitudinis quę ex illis omnibus compoſita



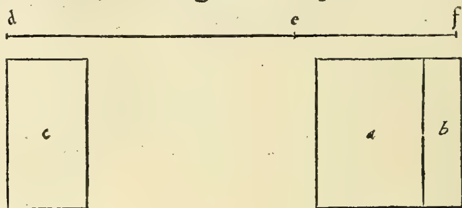
posita fuerit, centrum grauitatis erit punctum, quod magnitudinis mediæ centrũ grauitatis existit. Quod si pares numero fuerint magnitudines, & centra earum grauitatis in eadem linea recta posita fuerint, & earum mediæ grauitate æquali inter se constiterint, & lineæ rectæ inter earum centra mediæ inter se æquales fuerint, eius quæ ex illis omnibus componetur magnitudinis centrum grauitatis erit medium lineæ rectæ punctum, eius uidelicet quæ centra grauitatis magnitudinum coniungit, uti in figura subscripta patet.

Magnitudines quæ fuerint in grauitate commensurabiles, æqueponderabunt, si in distantijs quæ secundum grauitatum proportionem fuerint cõstitutæ, permutatim suspendantur. 6 Esto magnitudines in grauitate commensurabiles a b. Esto e d item quædam distantia, & sicut a ad b, ita d c ad c e. Ostendendum itaq;, quod magnitudinis ex utrisq; a & b compositę centrum grauitatis est c punctum. Quoniam itaq; est sicut a ad b, ita d c ad c e. ipsum uero a est ipsi b commẽsurabile. ipsa ergo d c est ipsi c e commensurabilis, recta scilicet rectæ. quare e c, c d erit quædam communis mensura quæ sit n, & ponatur ipsi e c æqualis utraq; istarum d g, d k. Ipsi aũt d c esto e l æqualis. Et quoniã d g æquatur c e, & d c æquatur e g. quare & l e æquatur ipsi e g. Igit̃ l g dupla est ipsius d c, & ipsa g k ipsius c e. Quare n utrãq; l g, g k mensurabit, cum earum medietates metiatur. Et quoniam est sicut a ad b, ita d c ad c e. Sicut autem d c ad c e, sic l g ad g k. nam utraq; utriusque dupla existit. Igitur sicut a ad b, sic l g ad g k. Quotuplex autem est l g ipsius n, eo sit numero multiplex ipsa a ipsius f. Erit ergo sicut l g ad n, sic a ad f. Est autem sicut k g ad l g, ita b ad a. ab æqua igitur est, sicut k g ad n, sic b ad f. æque multiplex est igitur k g ipsius n, sicut b ipsius f. Ostensum uero est, & ipsum a quoq; ipsius f multiplex esse. quare ipsũ f, erit ipsorum a & b communis mensura. Diuisa igitur l g in partes æquales ipsi n, & a in partes æquales ipsi f: partes ipsius l g, quæ ipsi n in magnitudine æquantur, tot erunt numero, quot sunt partes ipsius a, ipsi f in magnitudine æquales. Quare si unicuiq; partium l g apponatur, magnitudo æqualis ipsi f cẽtrum grauitatis habens in medio portionis, & omnis magnitudines æquantur ipsi a, & magnitudinis ex omnibus compositæ centrum grauitatis erit ipsum e. nam omnes numero pares sunt propterea, quod ipsa l e æquatur ipsi e g. Similiter autem ostendetur, & si unicuiq; portionum k g apponatur magnitudo æqualis ipsi f, centrum grauitatis habens in medio portionis, & omnis magnitudines æquales erunt ipsi b, & magnitudinis ex omnibus illis compositę centrum grauitatis erit ipsum d. Est igitur a quidem impositum ad ipsum e, & ipsum b ad ipsum d. Sunt itaque iam magnitudines inter se æquales in lineam rectam positę, quarum centra grauitatis æqualiter inter se distant compositę, & numero pares. Constat igitur, quod compositę ex omnibus magnitudinibus centrum grauitatis est diuisio in duo ęqua lineę rectæ, in qua centra magnitudinum mediarum sunt posita. Cũ igitur l e sit æqualis c d, & ipsa e c ipsi d k: tota igitur l c æquatur ipsi c k. Quare magnitudinis ex omnibus compositæ centrũ grauitatis est c punctum. Posito igitur ipso a ad ipsum e, & ipso b ad ipsum d, ęqueponderabũt secundum c punctum.

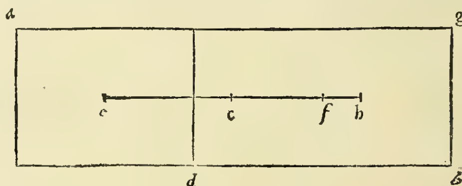


Si magnitudines incommensurabiles fuerint, similiter ęqueponderabunt, si in distantijs suspendantur, quę proportionem inter se magnitudinum mutuam ha- 7

habuerint. Sunto a b c magnitudines incommensurabiles, distantię uero d e, e f. Habeat autem a b ad ipsum c eam proportionem, quam distantia e d ad e f. Dico quod magnitudinis compositæ ex a b c, centrum grauitatis est punctum e. nam si non, ęqueponderabit a b positum ad f, ipsi c posito ad ipsum d, uel maius est a b ipso c, ita ut ęqueponderet ipsi c, uel non. Esto maius, & auferat ab ipso a b, minus excessu quo a b excedit c, ita ut æquepōderet: & residuum sit commensurabile ipsi c, quod sit a. Quoniam igitur magnitudines a c sunt commensurabiles, & minorem habet proportionem a ad c quàm d e ad e f, non ęqueponderabunt a & c in distantijs d e, e f, posito ipso a in f, & c in ipso d. Per hęc eadem neque sic maius existit, quàm ut ęqueponderet ipsi a.

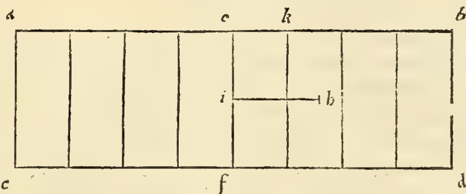


8 SI ab aliqua magnitudine magnitudo aliqua auferatur, quæ non habeat idem centrum cum tota, residuæ magnitudinis centrum grauitatis existit in linea recta, quæ centra grauitatis totius magnitudinis & ablatæ coniungat, & in ea illius parte in qua linea ipsa à centro totius magnitudinis educitur extra, atq; in eo puncto quo ipsa sic terminatur, ut ipsa iam educta ad eam quæ iungit centra prędicta eam habeat proportionem, quam magnitudinis ablatæ grauitas ad grauitatem residuæ. Esto magnitudinis alicuius centrum grauitatis c, ipsa uero sit a b. & auferatur ab ipsa a b magnitudo a d, cuius centrum grauitatis sit e. ducta uero e c, & extra ducta intercipiatur c f, quæ eam proportionē habeat ad e c, quam habet grauitas magnitudinis a d ad grauitatem magnitudinis d g. Ostēdendum quod magnitudinis d g centrum grauitatis est f punctum. Nam si non, esto si fieri potest, h punctum. Quoniam igitur a d magnitudinis centrum grauitatis est e, ipsius uero d g est punctum h, magnitudinis ex utraque compositæ centrum grauitatis erit in linea e h, ita diuisa ut partes mutuam inter se magnitudinum proportionē habeant. Quare non erit c punctum secundum proportionalem sectionem, ei quæ dicta est. quare c non est centrum grauitatis eius magnitudinis, quæ ex a d, d g cōposita est: hoc est ipsius a b. positum uero fuerat, ipsum c esse dictum centrum. nō erit igitur h punctum centrum grauitatis d g magnitudinis.

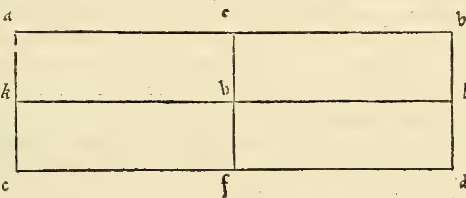


9 CUiuslibet figuræ æquedistantiū laterum cētrum grauitatis est in linea recta, quæ coniungit latera opposita ipsius figuræ æquedistantium laterum, diuisæ in duo æqua, quæ latera in diuisione figuræ secta fuerint. Esto figura æquedistantium laterum a b c d, in diuisione uero in duo æqua ipsius a b c d, esto e f. Dico a b c d centrum grauitatis esse in linea e f. nam si non, esto si esse potest punctum h, & ducatur h i æquedistans ipsi a b. Linea uero e b continuæ in duo æqua diuisa erit, tandem quædam intercepta minor h i. Et diuidatur utraq; e b, e a in lineas æquales e k, & à punctis diuisionum æquedistantes ipsi e f. Diuidetur itaq; tota figura in figuras æquedistantium laterum æquales, & similes ipsi k f. Figuris itaq; æquedistantium laterum similibus, & æqualibus ipsi k f, inuicem coaptatis,

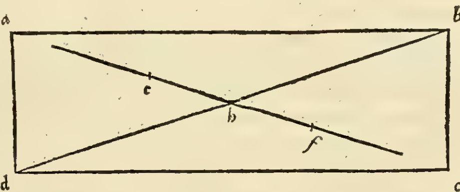
tis, & centra quoq; grauitatis earum erunt inuicem coaptata. Erunt iam magnitudines quædam æquedistantiũ laterũ æquales ipsi k f, numero pares, & centrũ grauitatis earũ in eadem linea posita, & media æqualia, & omnia quæ utrinq; ipsis medijs assistunt, & ipsa æqualia sunt. & lineæ inter centra mediȩ sunt ȩquales. Magnitudinis ergo ex omnibus compositæ centrũ grauitatis est in linea recta, quæ iungit centra grauitatis spaciorum eorũ quæ in medio sunt. nõ est autem. nam h est extra figuras medias. Constat ergo, centrum grauitatis figuræ a b c d æquedistantium laterum esse, in e f linea recta.



CVIuslibet figuræ ȩquedistantium laterum centrum grauitatis est punctum, in quo diametri coincidunt. Esto figura æquedistantium laterum a b c d, & in ipsa sit linea e f, diuidens in duo æqua a b c d lineas. & item k, l diuidens a c, b d. Est iam figuræ a b c d ȩquedistantium laterum centrum grauitatis in linea e f. Ostensum namq; est hoc, et eadem ratione est in linea k l. Igitur punctum h est cẽtrum grauitatis. in puncto autem h diametri figuræ æquedistantium laterum cõcurrent, ut prius demonstratum fuit. 10



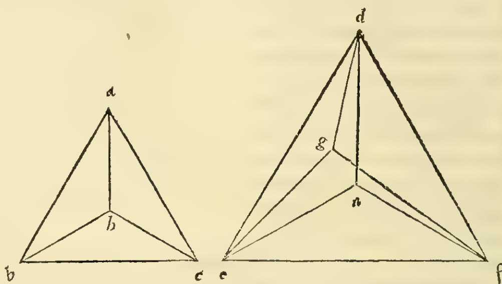
Contingit autem & aliter hoc idem demonstrare. Esto figura æquedistantium laterum a b c d. eius diametros d b. trianguli ergo a b d, b d c erũt inter se similes & æquales. quare ipsis coaptatis, & eorum centra grauitatis inter se coincident. Esto iam trianguli a b d, centrum grauitatis e pũctum, & † ducatur e h, & protrahatur donec assumatur h f æqualis e h. Coaptato itaq; a b d triãgulo ad triangulum b d c, & latere a b ad latus d c. accommodato uero latere a d ad latus b c, coaptabitur quoq; e h linea recta ad h f rectam, & e punctum in f cadet, sed et in centrum grauitatis trianguli b d c. Quoniam igitur trianguli a b d centrum grauitatis est e punctum, trianguli uero b d c est f, manifestum est, quod magnitudinis ex utrisq; compositæ centrum grauitatis est punctum medium lineæ e f rectæ, quod quidem est h punctum.



† *Intellige diametrum b d diuisam esse per me diũ in h puncto.*

SI duo trianguli fuerint inter se similes, & duo in ipsis puncta similiter ad triangulos se habentia in positione, & punctũ unum eius in quo est, triãguli sit centrum grauitatis: reliquum quoq; punctum eius in quo est, trianguli centrum grauitatis existet. Puncta uero dicimus similiter se habere in positione ad similes figuras, à quib. lineæ rectæ ab angulis ȩqualibus eductæ, ad latera inter se correspõdentia angulos æquales efficiant. Esto duo trianguli a b c, d e f. & esto sicut a c ad 11

d f, sic a b ad d e, & b c ad e f. & sint in dictis triangulis puncta similiter posita, quæ sint h, n, similiter se in positione habentia ad triangulos a b c, d e f. & sit h centrum grauitatis a b c trianguli. Dico quod n est centrum grauitatis d e f trianguli. nam si non, esto si esse potest g punctum grauitatis trianguli d e f, & iũgantur h a, h b, h c. item n d, n e, n f. Quoniam igitur triangulus a b c est similis triangulo d e f, & centra grauitatis sunt h g puncta: similium uero figurarum centra grauitatis similiter



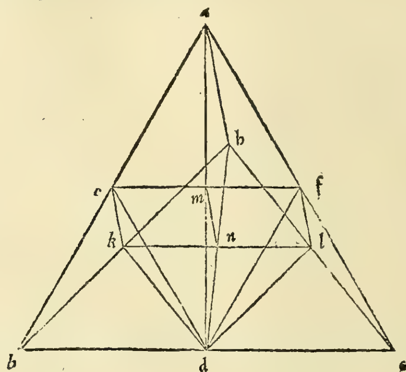
posita sunt, ita ut æquales angulos efficiant ad latera eiusdem rationis unũquodque ad unumquodq;. Angulus igitur g d e, erit æqualis angulo h a b. Sed angulus h a b est æqualis angulo e d n: quia puncta h n, similiter posita sunt. Angulus igitur e d g erit æqualis angulo e d n, maior scilicet minori: quod esse non potest. Non est igitur g punctus centrum grauitatis trianguli d e f. quare punctum n erit centrum dictum.

12 SI duo trianguli fuerint similes, & centrum grauitatis alterius eorum fuerit in linea recta, quæ ab uno angulo eius ad mediam basem ducatur: alterius quoq; trianguli erit centrum grauitatis in linea similiter in eo ducta. Sunto trianguli duo a b c, d e f. & esto sicut a c ad d f, ita a b ad d e, & b c ad f e. et a c diuisa in duo equa in puncto g, iungatur b g. Et esto centrum grauitatis trĩaguli a b c, in linea b g, quod sit h. Dico quod centrum grauitatis d e f trianguli erit in linea recta, similiter in eo ducta. Diuidatur d f in duo æqua in puncto m. & iungatur e m, & fiat sicut b g ad b h, sic m e ad e n: & iungant̃ a h, h c, d n, n f. Cum igitur ipsius c a dimidia est a g, & ipsius d f dimidia est d m: est sicut b a ad e d, ita a g ad d m. & latera circa æquales angulos existentia, sunt proportionalia. Angulus igitur a g b est æqualis angulo d m e. & est sicut a g ad d m, sic b g ad e m. Est autẽ & sicut b g ad b h, sic m e ad e n: & per æquam ergo, sicut a b ad d e, sic b h ad e n. Et circa angulos æquales latera proportionalia consistunt. Erit igitur angulus b a h, æqualis angulo e d n. Quare angulus h a c reliquus erit ęqualis angulo e f n. et angulus h c g, æqualis angulo n f m. Ostensum est autem, quod angulus a b h est æqualis angulo d e m. quare & angulus h b c reliquus, erit æqualis angulo n e f. Et omnino eadem ratione puncta h n, ad latera proportionalia similiter posita sunt, & angulos æquales faciunt. Cum igitur h n puncta similiter posita sint, & h est centrum grauitatis trianguli a b c, erit n quoq; centrum grauitatis trianguli d e f.

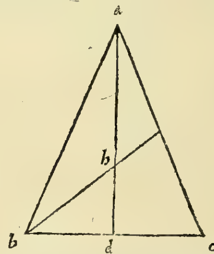
Cuius-

CViuscunq; trianguli centrum grauitatis existit in linea recta, quæ ab angulo ad dimidiam basem ducta fuerit. Esto triangulus a b c, & in ipso a d ducta ad dimidiam basem. Est itaq; ostendendum, quod in linea a d centrum grauitatis trĩãguli a b c existit. Nam si non, esto si esse potest pũctũ h, & per ipsum ducatur h i, æquedistans ipsi b c. Continuè igitur diuisa d c in duo æqua, tandem relinquetur linea minor h i. Diuidatur utraq; b d, d c in duo ęqua: et à pũctis sectionum ducantur æquedistantes ipsi a d, et iũgantur e f, g k, l m. Erũt iam ipsæ æquedistãtes ipsi b c. Iam figuræ æquedistantium laterum m n, centrum grauitatis est in s y. Ipsius aũt k x in y t, & ipsius f o, in t d. Magnitudinis ergo ex omnibus compositæ centrum grauitatis est in linea s d recta, quod sit r. Et iungatur h r, & educatur & protrahatur, & ducatur c u æquedistans ipsi a d. triangulus autem a d c, ad omnis triangulos a m, m k, k f, f c, lineis descriptos similes ipsi a d c, eam habet proportionẽ, quam habet c a ad a m. Quia a m, m k, k f, f c æquales sunt. Quoniam autem & triãgulus a d b, ad omnis triangulos à lineis a l, l g, g e, e b descriptos, similes sibi, eã habet proportionem, quã b a ad a l. Triangulus igitur a b c, ad omnis dictos triangulos, eam habet, quã c a ad a m. Sed c a ad a m maiorem proportionem habet, q̃ u r ad r h. nam proportio c a ad a m eadem est ei quam habet tota u r ad r p. quia trianguli similes existunt. & triangulus quoq; a b c, ad dictos triangulos maiorem habet proportionem, quàm u r ad r h. Fiat igitur, ut sicut figuræ æquedistantium laterum se habent ad triangulos, sic q h ad h r. Quoniam igitur aliqua magnitudo existit a b c, cuius centrum grauitatis est h: & aufertur ab ea magnitudo cõposita ex m n, k x, f o figuris æquedistantium laterum: & ablatæ magnitudinis centrum grauitatis est r punctum. reliquæ igitur magnitudinis, quæ ex triangulis circumrelictis cõponitur, cẽtrum grauitatis in linea r h habetur, quæ educta & protracta est ad h r: eamq; habet proportionem ad illam, quam magnitudo ablata ad reliquam. Punctum ergo q centrum est grauitatis magnitudinis compositæ ex omnibus circum relictis, quod esse non potest. nam linea recta à puncto q æquedistãter ipsi a d ducta in plano, in eadem ipsius parte: hoc est in altera ipsius parte, centra omnia habentur. Manifestum est igitur propositum. Aliter idem. Esto triangulus a b c, & ducatur a d linea ad dimidiam basem. Dico itaq;, quod in linea a d centrũ grauitatis trianguli a b c habetur. Nam si non, esto h, si esse potest: & iungantur h a, h b, h c, & e d, d f, f e, ad medias b a, a c. Ducantur ipsi a h æquedistantes e k, f l: & iungantur k l, l d, d k. item m n æquedistans ipsi a h. Quoniam itaq; triangulus a b c similis est triangulo d f c, cum b a sit æquedistans ipsi f d, & trianguli a b c cẽtrum grauitatis est punctum: & f d c trianguli quoq; centrum grauitatis est punctum l. nam h l puncta sunt similiter posita in utroq; triangulo, cum ad latera eiusdem rationis æquos angulos efficiant. constat enim istud. Eadem autem ratione

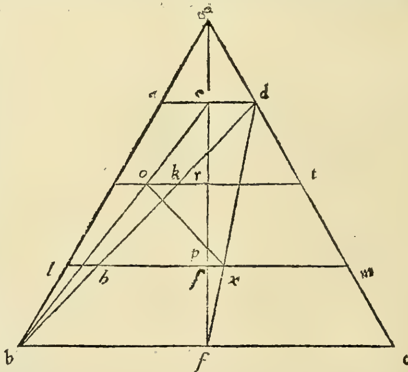
& trianguli e b d centrum grauitatis eſt k punctum. quare magnitudinis ex ambabus b e d, d f c triãgulis compoſitæ centrum grauitatis habetur in medio lineæ k l. cum triãguli e b d, f d c, ſint æquales. Et ipſius k l, medium eſt n: cum ſit ſicut b e ad e a, ita b k ad h k. Sicut autem c f ad f a, ſic c l ad l h. Si autẽ hoc ſic ſe habet, erit b c ipſi k l æquediſtans. Et iuncta eſt d h. erit igitur ſicut b d ad d c, ſic k n ad n l. Quare magnitudinis ex utriſq; dictis triangulis compoſitæ centrum grauitatis eſt n. eſt quoq; figuræ æquediſtantium laterum a e d f, centrum grauitatis pũctum m. Quare magnitudinis ex omnibus compoſitæ centrum grauitatis habetur in linea m n. Eſt autem trianguli a b c centrum grauitatis h punctum. Igitur m n protracta per punctum h tranſibit, quod eſſe non poteſt. Centrum igitur grauitatis trianguli a b c, non extra lineam a d uſquam habetur. in ea igitur neceſſe eſt ipſum haberi. Quare conſtat propoſitum.



14 Cuiuſcunque trianguli cẽtrum grauitatis eſt punctum, in quo lineæ rectæ ab angulis ad dimidias baſes ductę concurrũt. Eſto triangulus a b c, & ducatur a d linea ad mediam b c, & linea b e ad mediã a c. Si iam centrum grauitatis trianguli a b c habetur in utraq; a d b e, ſicut demonſtratum fuit, erit utique punctum h centrum grauitatis trianguli a b c.



15 Cuiuſcunq; menſalis figuræ, quæ duo latera habeat æquediſtantia inter ſe, centrum grauitatis habetur in linea recta, quæ iungit laterum æquediſtantium ſectorum in duo æqua puncta diuiſionis, atq; in eo ipſius dictæ lineæ loco, ubi ipſa ſic diuiſa ſit, ut pars eius terminata ad minus laterum ęquediſtantium in duo æqua ſectorum ad reliquam partem eam habeat proportionẽ, quam habet utraque ſimul, duplũ maioris æquediſtantium cum minore, ad duplum minoris cum maiore. Eſto menſalis figura a b c d, quæ habeat a d, b c æquediſtantes. & e f iungat puncta diuiſionis ipſarũ a d, b c, quæ in duo æqua diuiſæ ſunt. Quod itaq; in linea e f, ſit centrum grauitatis menſæ, manifeſtum eſt, nam ſi protrahantur c d g, f e g, b a g, conſtat eas in idem punctum concurrere:



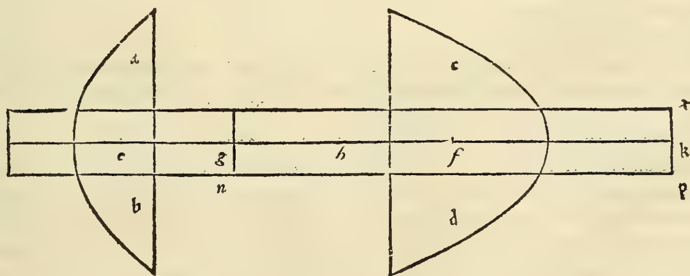
currere: eritq; trianguli b g c centrũ grauitatis in ipsa g f, & similiter trianguli a g d cẽtrum grauitatis in ipsa e g. & reliquæ igitur mensæ a b c d, erit in ipsa e f. Ducta uero b d diuidatur in tria æqualia in punctis k h: & per ea puncta ducãtur æque distantes ipsi b c lineæ l h m, n k t. & iungantur d f, b e, o x. Erit igitur centrum grauitatis triãguli d b c, in linea h m, cum h b sit tertia pars b d, & per h ducta est h m æquedistans ipsi basi. Est autem centrũ grauitatis trianguli d b c, in linea d f. Quare x erit centrum grauitatis dicti trianguli. Eadem autem ratione erit o punctum centrum grauitatis trianguli a b d. Magnitudinis ergo ex utrisq; triangulis a b d, b d c compositæ, centrum grauitatis erit in linea recta o x. Quæ quidem magnitudo mensalis cum sit, erit eius centrũ grauitatis in linea e f. Quare mensalis a b c d, centrũ grauitatis erit punctũ p. Habet autem triangulus b d c ad triãgulum a b d eam proportionẽ, quam o p ad p x. Sed sicut triangulus b d c ad triangulũ a b d, sic b c ad ipsam a d. Est autẽ sicut o p ad p x, ita R p ad p s. Igitur sicut b c ad ipsam a d, sic R p ad ipsam p s. Quare sicut duæ b c, cum a d ad duas a d, cum b c: sic duæ R p cum p s, ad duas p s cum R p. Verum duæ R p cum p s, est utraq; simul e R, R p, hoc est p e: duæ uero p s cum p R utraque simul, est p s f, hoc est p f. Ostensa ergo sunt ea quæ proposita fuerant.

FINIT PRIMVS ARCHIMEDIS LIBER de Aequeponderantibus.

ARCHIMEDIS DE HIS QVAE AEQVEPONDERANT LIBER *secundus*.



SI DVO spacia compræhensa à linea recta & sectione coni rectãguli, quæ ad lineam rectam datam possimus applicare, non habeãt idem centrum, centrũ grauitatis eorum erit in linea quę iungit cẽtra grauitatis eorũ: eritq; punctũ illud quod dictam lineam rectam sic diuidet, ut partes eius inter se mutuam habeant proportionem spaciorum. Esto duo spacia a b, c d, qualia dictum est. Cẽtra autem grauitatis eorum sint puncta e, f. & quam proportionem habet a b ad c d, eam habeat f h ad h e. O- I

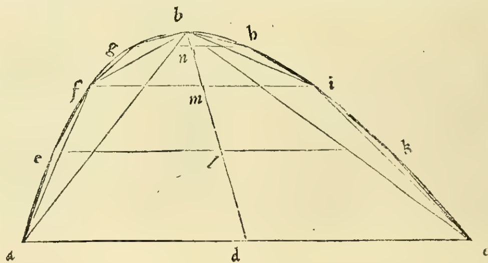


stendendum est, quod magnitudinis ex utrisque a b, c d spacijs compositæ, centrũ

uitatis est punctum h. Sit autem ipsi e h harum utraque æqualis f g, f k, ipsi autem f h, hoc est g e, sit e l æqualis. erit igitur & l h ipsi k h æqualis. Et est sicut l g ad g k, sic a b ad c d. nam utraque utriusque dupla est. Protendatur autem in parte pũcti a linea æquedistans ipsi l g, ita ut fiat spacium m n ipsi lineæ l g utrinque adiectũ, æquale ipsi a b. erit iam ipsius m n centrum grauitatis punctum e. Compleatur itaque n x. Habebit igitur m n ad n x eam proportionem, quam l g ad g k. habet autem & a b ad c d eam, quam l g ad g k. Igitur sicut a b ad c d, sic m n ad n x. & permutatim. At uero a b æquatur ipsi m n, ergo c d æquatur ipsi n x. Et centrum grauitatis eius est f punctum. Et quoniam l h est æqualis ipsi h k, & tota l k latera opposita diuidit in duo æqua totius p m, centrum grauitatis erit punctum h. Sed m p est æquale utrique simul m n, n x. Quare & compositi ex utrisque a b, c d centrũ grauitatis erit h punctum.

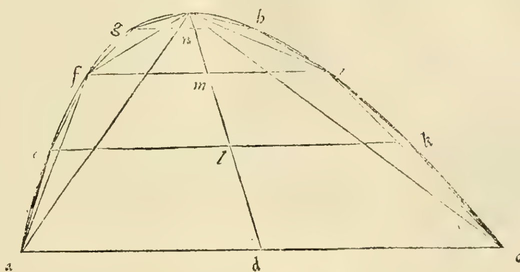
Si intra portionem à recta & coni rectanguli sectione comprætensam triangulus inscribatur, qui basem habeat cum portione eãdem, & altitudinem ipsi æqualem, & item in residuis portionibus trianguli inscribantur easdem cum portionibus bases & altitudines æquales habentes, atque item & hoc idem in residuis portionibus fiat: & huiusmodi triangulorum inscriptio continuetur figura, quæ hoc modo in sectione describitur, perspectè inscribi dicatur. Manifestum est autem, quod figuræ hoc modo inscriptæ lineæ quæ iungent angulos eos qui uertici portionis proximi existunt & eos qui deinceps sequentur æquedistabunt basi ipsius portionis, & in duo æqua diuidentur à diametro portionis, & diametrum ipsæ diuident in proportiones à numeris ab unitate continenter imparibus dictas, ea parte quæ ipsi uertici coniuncta erit pro uno computata. hoc autem in ordinibus est ostendendum.

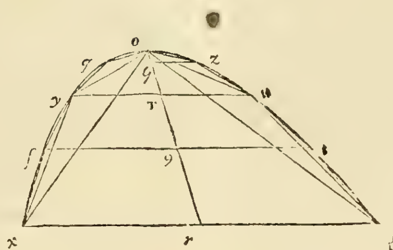
2 SI autem in portione quæ à recta & rectanguli coni sectione comprætenditur, rectilinea figura inscribatur, perspectè, centrum grauitatis figuræ inscriptæ erit in diametro portionis. Esto a b c portio qualis dicitur, & inscribatur ei perspectè figura rectilinea a e f g b h i k c. Ostendẽdum est, centrum grauitatis rectilineæ figuræ esse in b d. Quoniã enim mẽsulæ a e k c centrũ grauitatis est in l d, mensulæ uero e f i k centrum est in linea m l. ipsius uero f g h i mensulæ centrum est in linea m n. Ad hæc quoque trianguli g b h centrum grauitatis est in b n. Constat quod totius figuræ rectilineæ centrũ grauitatis est in linea b d. quare constat propositum.



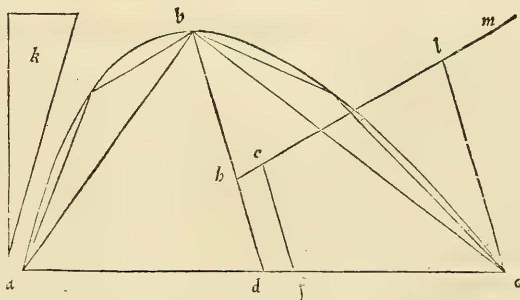
3 SI in utraque duarum portionum similium à coni rectanguli sectione, & linea recta comprætensarum rectilineæ figuræ inscribantur, perspectè quæ latera numero inter se æqualia habuerint, rectilinearum figurarum centra grauitatis secabunt similiter diametros portionum. Sint duæ portiones a b c, x o p, & eis inscribantur figuræ rectilineæ notæ secundũ omnia latera quæ sint in utraque numero æquali. Sint diametri portionum b d, o r. & iungantur e k, f i, g h. & s t, y u, q z. Quoniam igitur & b d diuiditur à lineis æquedistãtibus in proportiones à numeris imparibus, continenter ab uno dispositis nominatas: & p o similiter, & diuisiones earum sunt numero æquales inter se: constat quod partes diametrorum eisdem

dem proportionibus habebuntur, & lineæ æquedistantes easdem proportiones seruabunt, & mensularum ipsius quidem a e k c, & ipsius x s t p, centra grauitatis erunt in d l, 9 r lineis rectis similiter posita, cum eandẽ habeãt proportionem a c, e k, quam p x ad s t. Rursus autem & mensularum e f i k, s y u t, centra grauitatis diuident similiter lineas l m, 9 T. Sũt autem & triangulorum g b h, q o z centra grauitatis in lineis b n, o ç similiter posita. Habent autem eandem proportionem mensulæ & trianguli. Cõstat igitur, quod totius figuræ rectilineæ in portione a b c inscriptæ, centrum grauitatis similiter diuidit b d diametrum, sicut figurę in x o p portione inscriptæ centrum grauitatis in o r. quod demonstrari oportuit.



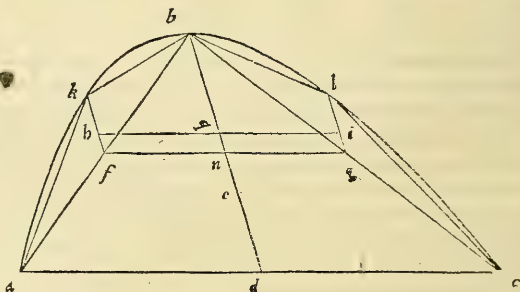


CVIuscunq; portionis à linea recta & sectione rectanguli coni compræhensæ, centrum grauitatis in diametro portionis existit. Esto portio, ut dicitur, a b c: eius diametros, b d. Ostendendum est, dictæ portionis cẽtrum grauitatis esse in b d. Nam si non, esto ipsum e, & per ipsum ducatur e f, ipsi b d æquedistans, & inscribatur portioni triangulus a b c eandem basim habens, & altitudinem cũ portione eandem. & quam habet c f ad d f, hanc habeat triangulus a b c, ad spacium k. Inscribatur iã in portione rectilinea figura perspectè, ita ut quæ relinquẽtur portiões, sint minores ipso k. figuræ inscriptæ centrum grauitatis est in b d. Sit h, & iungatur h e, et producatur, & ducatur c l æquedistans ipsi b d. Constat autem, quod maiorẽ proportionem habet inscripta portioni figura ad eas quæ relictæ sunt portiones, quàm a b c triangulus ad spacium k, qui eam habet quam c f ad d f. Figura igitur inscripta, ad portiones relictas maiorem habet proportionem, quàm c f ad f d, hoc est e l ad e h. Habeat itaque m e ad e h, eã proportionem, quam rectilinea figura ad portiones. Quoniam igitur e est centrũ totius 4



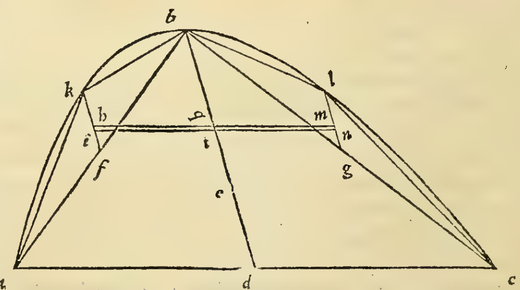
totius portionis: figuræ uero inſcriptæ portioni centrum eſt h: cònſtat quod magnitudinis compoſitæ ex reliquis portionibus, centrum grauitatis eſt in parte h e producta, quæ eam ad h e proportionē habet, quam figura inſcripta ad reliquas portiones. Quare erit magnitudinis ex reliquis portionibus compoſitæ centrum grauitatis punctum m: quod eſt inconueniens. nam ei quæ per m punctum ducitur lineæ æquediſtanter ipſi b d, in eandem partem erunt omnis reliquæ portiones. Manifeſtum eſt igitur, quod in diametro b d centrum exiſtit grauitatis.

5 SI in portione à recta linea & ſectione rectanguli coni cōtenta, figura rectilinea inſcribatur perſpectè totius portionis centrum grauitatis erit uertici portionis propinquius, quàm centrū figuræ rectilineæ inſcriptæ portioni. Eſto a b c portio qualis dicitur, cuius diametros b d, & inſcribatur eidem triãgulus primum perſpectè, & notè a b c, et diuidatur b d in puncto e, ita ut b e ſit dupla e d. erit igitur trianguli a b c centrum grauitatis punctum e. Diuidatur iã in duo æqua utraqꝫ a b, b c, in punctis f g: & per f g ducãtur f k, l g, æquediſtantes ipſi b d. Eſt igitur



portionis a k b centrum grauitatis in linea f k. portionis uero b c l, centrum grauitatis in g l linea. Sint autem ea h i, & iungantur h i: & quoniam h f g eſt figura laterum æquediſtantium, & g i eſt æqualis ipſi f h: eſt igitur f g æqualis h i. Quare magnitudinis ex utriſque compoſitæ ex a k b, & b l c portionibus, centrum grauitatis eſt in media h i: cum portiones quidem ſint æquales, hoc eſt punctum q. quoniam autem trianguli a b c centrum grauitatis eſt e, magnitudinis uero ex utriſqꝫ a k b, b l c compoſitæ centrum eſt q: conſtat quod portionis totius a b c centrum grauitatis eſt in linea q e: id eſt inter puncta q e. quare centrum grauitatis totius portionis erit uertici ipſius portionis propinquius, quàm centrum trianguli in ipſa perſpectè inſcripti.

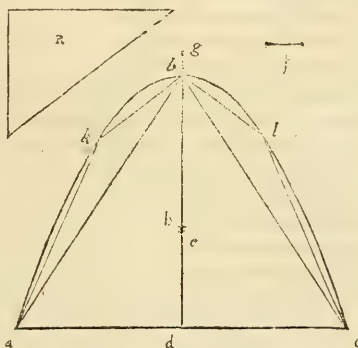
Rurſus portioni pentagonum inſcribatur rectilineum perſpectè, quod ſit a k b l c. Et eſto totius portionis diametros b d, utriuſque uero portionis utraque k f, l g diametros. Et quoniã in a k b portione inſcripta eſt rectilinea figura perſpectè, ſiue notè, totius portionis cētrum grauitatis eſt propinquius uertici ipſius portiōis, quàm cētrum rectilineæ inſcriptæ. Eſto itaque ipſius portionis centrum grauitatis h, trianguli uero I. Rurſus eſto portionis b l c centrum grauitatis m, trianguli uero n. Eſt autem magnitudinis



dinis

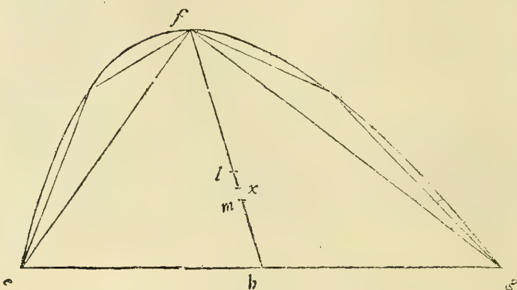
dinis ex utrisque a k b, b l c portionibus compositæ, centrum grauitatis q: magnitudinis autem ex utrisque a k b, b l c triangulis compositæ, centrum est T. Rursus quoniam trianguli a b c centrum grauitatis est e, compositæ autem ex utrisque a k b, b l c portionibus, centrum est q: constat quod totius a b c portionis cētrum grauitatis est in linea q e, sic diuisa, ut quā proportionem habet a b c triangulus ad utrasq; simul a k b, b l c portiones, eam habeat eius pars terminata ad q, ad partem minorem. Pentagoni autem a k b l c centrum grauitatis est in linea recta e t, sic diuisa, ut quam proportionem habet a b c triangulus ad a k b, b l c triangulos, eam habeat eius lineæ pars terminata ad t ad reliquam. quoniam igitur maiorem habet proportionem a b c triangulus ad a k b, b l c triangulos, quàm ad portiones, manifestū est portionis a b c centrum grauitatis esse uertici b propinquius, quàm centrū figuræ rectilineæ inscriptæ. & in omnibus figuris rectilineis inscriptis portionibus notæ eadem ratio habetur.

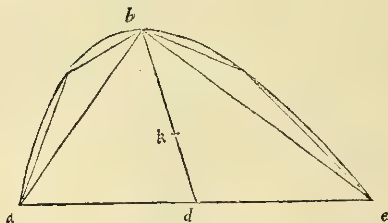
Portione à linea recta & sectione rectanguli coni compræhensa data, potest ipsi portioni figura rectilinea perspectè ita inscribi, ut linea quæ inter centrum grauitatis portionis & centrum figuræ inscriptæ capitur, sit quacunque linea recta data minor. Detur portio a b c, qualis dicitur, cuius cētrum grauitatis sit h, & inscribatur ipsi perspectè triāgulus a b c, & sit data linea f: & quā habet proportionem b h ad f, eam habeat triangulus a b c ad spacium R, inscribatur etiam ipsi portioni a b c perspectè rectilinea figura a k b l c, ita ut portiones residuę sint minores spacio R: & esto figuræ inscriptæ centrum grauitatis e. Dico iam lineam h e minorem esse linea f data. Nam si non, uel æqualis, uel maior erit. Quoniā itaque a k b l c figura rectilinea ad residuas portiones maiorem proportionem habet, quàm a b c triangulus ad R, hoc est quàm h b ad f: habet autem h b ad f nō minorem proportionem, quàm ad h e, cū nō sit minor f: multo magis ergo figura a k b l c rectilinea ad reliquas portiones maiorem proportionem habebit, quàm b h ad h e. Quare si faciamus, ut sicuti a k b l c figura inscripta ad residuas portiones habet, sic alia quæcunq; linea ad h e: cum iam portionis a b c centrum grauitatis sit h, protracta e h, & assumpta aliqua recta eam ad e h proportionem habēte, quam figura a k b l c rectilinea ad residuas portiones, erit ipsa maior h b: habeat igitur g h ad h e talem proportionem. erit igitur g centrum grauitatis magnitudinis ex portionibus residuis compositæ: quod quidem esse non potest. nam est, quæ per g ducta ęquedistanter ipsi a c in eandem partem portioni. Constat igitur, lineam h e minorem esse linea f. quod fuerat demonstrandum. 6



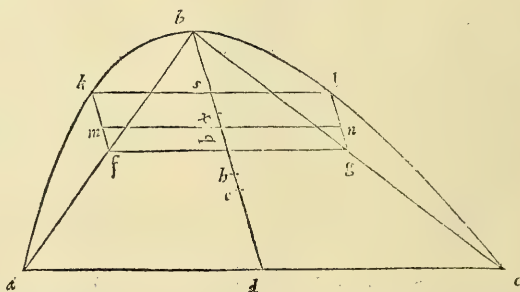
Duarum portionum similium, quæ linea recta & coni rectanguli sectione compræhenduntur, centra grauitatis in eandem proportionem diametros earum diuidunt. Sint duæ portiones, quales dicitur a b c, e f g, quarum diametri b d, f h: & esto portionis a b c, centrum grauitatis k punctum: ipsius uero e f g, sit centrum grauitatis l. Ostendendum quod in eandem proportionem diuidunt ipsas diametros centra k l. Nam si non, esto sicut k b ad k d, sic f m ad h m, & inscribatur ipsi e f g portioni figura rectilinea notæ, ita ut linea inter centrum portionis, & centrum figuræ inscriptæ capta, sit minor l m. & esto fi- 7

guræ inſcriptæ centrum grauitatis x punctum. Inſcribatur quoque ipſi a b c portioni figura rectilinea ſimilis figuræ ipſi e f g portioni inſcriptæ, hoc eſt ſimiliter notæ, cuius centrum grauitatis uertici portionis erit propinquius, quàm centrum portionis: quod quidem eſſe nõ teſt. Conſtat igitur, b k ad k d eam, quam f i ad i h, habere proportionem.





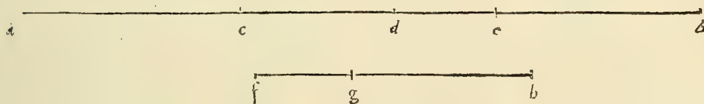
8 CVIuſcunque portionis à recta linea & rectanguli coni ſectione compræhenſæ, centrum grauitatis diuidit diametrum portionis, ita ut pars eius ad uerticem terminata, ſit ad partem eam ſeſquialtera, quæ ad baſim portionis terminatur. Eſto a b c portio qualis dicitur: eius diametros eſto b d, cẽtrum grauitatis punctum h. Oſtendendum eſt, quod b h ad h d eſt ſeſquialtera. Inſcribatur ipſi a b c portioni triãgulus per ſpeciẽ a b c, cuius centrum grauitatis eſto e: & utraque b a, b c in duo æqua diuidatur punctis f g, & ducant̃ k f, l g ęquediſtanter b d. Erũt igit̃ k f l g diametri portionũ a k b, b l c. Sit itaque portionis a k b centrũ grauitatis m: ipſius uero b l c punctum n. Et iungantur f g, m n, k l. magnitudinis ergo ex utraque portione compoſitæ centrum grauitatis eſt q. Et quoniam eſt ſicut b h ad h d, ſic k m ad m f, & componendo, & permutatim ſicut b d ad k f, ita h d ad m f. Sed b d ad k f, quadrupla eſt. hoc enim in fine oſtenditur, ubi eſt ſignũ ☍: igitur h d eſt quadrupla m f. Quare reſidua b h, ad reſiduam k m quadrupla eſt: hoc eſt ipſius f q. reliquarum ergo utraque ſimul, hoc eſt b f, q h tripla eſt ad f q. eſto b f tripla f x: & q h ergo erit tripla x q. Et quoniam b d eſt quadrupla ipſius b f, hoc enim demonſtratum eſt: & b f eſt tripla f x: igitur b x eſt tertia pars ipſius b d. Eſt autem & e d pars tertia ipſius b d, cum punctum e ſit centrum grauitatis trianguli a b c: & reliqua igitur x e erit tertia pars b d. Quoniam uero totius portionis centrum grauitatis eſt h punctum: magnitudinis autem ex utriſque a k b, b l c portionibus compoſitæ cẽtrum grauitatis eſt punctum q: trianguli a b c centrum eſt e: eſt quoque ſicut triã-



guli

guli a b c ad residuas portiones, sic q h ad h e. Triplus uero est triangulus a b c ad residuas portiones, cum tota portio sit ad triangulum a b c sesquitertia: igitur q h est ad h e tripla. Ostensum autem est q h triplam esse q x. Igitur x e quincupla est ipsius e h: hoc est d e ad h e. nam illæ sunt æquales. quare d h sexcupla est ipsius h e, & est b d tripla ipsius d e. igitur b h ipsius h d sesquialteram esse necesse est.

SI quatuor lineæ fuerint in proportionalitate cõtinua proportionales, & quam 9
proportionem habuerit minima earum ad excessum quo maxima minimam superat, eam habeat quædam linea sumpta ad tres quintas eius excessus quo maxima proportionalium tertiam superat: quam uero habuerit linea sumpta æqualis simul istis, duplæ maximæ proportionalium, & quadruplæ secundæ, & sextuplæ tertiæ, & triplæ quartæ, ad lineam sumptam istis simul æqualem, quincuplæ maximæ, & item decuplæ secundę & tertiæ, & quincuplæ quartæ, eam habeat linea quædam sumpta ad excessum quo maxima proportionalium excedit tertiam: lineæ sumptæ utreq; simul erũt duæ quintæ illius lineæ quæ maxima est proportionalium linearum. Sint quatuor lineæ proportionales a b, b c, b d, b e: & quam proportionem habet b e ad e a, eam habeat f g ad tres quintas ipsius a d. Quam uero habet linea æqualis istis simul duplæ a b, quadruplæ b c, sexcuplæ b d, triplæ b e, ad lineam æqualem simul istis, quincuplæ a b, decuplę c b, & b d, &

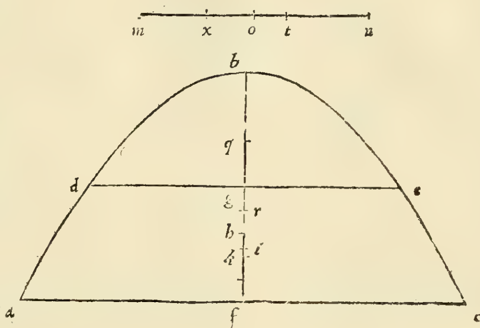


quincuplæ b e, eam habeat proportionem g h ad ipsam a d. Ostendendum est, quod f h est duæ quintæ ipsius a b. Quoniam enim a b, b c, d b, b e sunt proportionales: erunt etiam a c, c d, d e in eadem proportione. et utraque simul a b, b c ad ipsam b d, eam habet proportionem, quam a d ad d e: & similiter utraque simul c b, b d ad e b, & omnes ad omnes. Eam ergo habet proportionem a d linea ad d e, quam linea æqualis istis simul, dupla a b, tripla c b, & b d, ad lineam æqualem istis simul, duplæ b d, & e b. Quam autem proportionem habet linea æqualis istis simul, duplæ a b, & quadruplæ b c, & quadruplæ b d, & duplæ b e, ad lineam istis simul æqualem, duplæ d b, & ipsi b e, eam habebit d a ad aliquam minorem ipsa d e. Sit illa d o, & utræque ad primas eandem habebunt proportionem: habebit itaque o a ad ipsam a d, eam quam linea æqualis istis simul duplæ a b, quadruplæ b c, sexcuplæ d b, & triplæ b e, ad compositam ex dupla utriusque simul a b, b e, & quadruplæ utriusque simul c b, b d. Habet autem & a d linea ad g h, eam quam quincupla utriusq; simul a b, b e cum decupla utriusque simul c b, b d, ad compositam ex dupla a b, & quadrupla c b, & sexta b d, & tertia e b. Dissimiliter autem proportionibus ordinatis: id est in proportionalitate perturbata. per æquam ergo eam habet proportionem a o ad g h, quam composita ex quincupla utriusque simul a b, b e, & decupla c b, b d, ad compositam ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d. Verum composita e x quincupla utriusq; simul a b, b e, & decupla utriusq; simul c b, b d, ad cõpositam ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d, eam habet proportionem quam quinq; ad duo. Igitur o a ad g h eam habet proportionem, quam quinq; ad duo. Rursus quoniam o a ad d a eam habet proportionẽ, quam e b, cum dupla b d ad æqualem lineæ compositæ ex dupla utriusque simul,

a b, b e, cum quadrupla utriusq; simul c b, b d. Est autem & sicut d a ad d e, sic cõposita ex dupla a b, tripla b c, & ipsa b d, ad æqualem ipsi c b, cũ dupla b d: dissimiliter igitur proportionibus ordinatis & sectis, id est perturbata proportionalitate per æquam sicut o d ad d e, sic dupla a b, cum tripla b c, & ipsa b d, ad compositam ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d. quare & sicut o e ad e d, sic c b cum tripla b d, & dupla e b, ad duplam utriusque simul a b, b e, & quadruplam utriusq; simul c b, b d. Est autem & sicut d e ad e b, sic a c ad c b, & c d ad d b. quare secundum compositionem tripla c d, ad triplam d b, sicut dupla d e ad duplam e b. & ideo composita ex a c, & tripla c d, & dupla d e, ad compositam ex c b, & tripla d b, & dupla e b. Dissimiliter rursus proportionibus ordinatis, id est, in perturbata proportionalitate per æquam, eandem habebit proportionem o e ad e b, quam a c cum tripla c d, & dupla d e, ad duplam utriusq; simul a b, b e, cum quadrupla utriusq; simul c b, b d. Tota igitur o b ad e b, eam habet proportionem, quam tripla a b cum sexcupla c b: & tripla d b, ad duplam utriusq; simul a b, b e, cum quarta utriusq; simul c b, b d. Et quia e d, d c, c a in eadem sunt proportione, & utraque simul, unaquæq; c b, b d, d b, b c, c b, b a, erit sicut e d ad d a, sic utraque simul e b, b d ad utramq; simul d b, b c, cum composita ex c b, b a. Igitur componendo sicut e a ad d a, sic utraque simul e b, b d, cum utraq; simul a b, b c, & utraq; simul c b, b d: quæ est utraque simul e b, b a, cum dupla utriusq; simul d b, b c, ad utramq; simul b d, d a, cum dupla b c. Quare & dupla ad duplam eandem habebunt proportionem: hoc est, sicut e a ad d a, sic dupla utriusq; simul e b, b a, cum quarta utriusque simul c b, b d, ad duplam utriusque simul a b, b d, cum quadrupla b c. quare & sicut e a ad tres quintas d a, sic composita ex dupla utriusque simul e b, b a, & quadrupla utriusq; simul c b, b d, ad tres quintas compositæ ex dupla utriusq; simul a b, b d, & quadrupla c b. Verum sicut e a ad tres quintas a d, sic e b ad f g. Sicut igitur e b ad f g, sic dupla utriusq; simul a b, b e, cum quadrupla utriusq; simul d b, b c, ad tres quintas compositæ ex dupla utriusq; simul a b, b d, cum quadrupla c b. Ostensum est autem, sicut o b ad e b, sic tripla utriusque simul a b, b d cum sexcupla c b, ad duplam utriusq; simul a b, b e, cum quarta utriusq; simul c b, b d. per æquam igitur sicut o b ad f g, sic composita ex tripla utriusq; simul a b, b d, & sexcupla c b, ad tres quintas compositæ ex dupla utriusq; simul a b, b d, & quadrupla c b. Verum composita ex tripla utriusque simul a b, b d, & sexcupla c b, ad compositam ex dupla utriusq; simul a b, b d, & quadrupla c b, proportionem habet quam tria ad duo. & ad tres quintas eiusdem, proportionem habet quam quinq; ad duo. Ostensum est autem, quod o a ad g h proportionem habet, quam quinq; ad duo. Tota igitur a b ad totam f h proportionẽ habet, quam quinq; ad duo. Quod si hoc uerum est, necesse quoq; est f h duas quintas ipsius a b esse. Quod fuerat demonstrandum.

10 CVIuslibet frusti à sectione rectanguli coni ablati, centrum grauitatis est in linea recta, quæ frusti existit diametros: qua in quinq; partes ęquas diuisa, cẽtrum in quinta eius media existit, atq; in eo eius puncto quo ipsa quinta sic diuiditur, ut portio eius propinquior minori basi frusti ad reliquam eius portionem eam habeat proportionem, quam habet solidum, cuius basis sit quadratum lineæ illius quę frusti basis maior extiterit. Altitudo uero istis utrisq; simul ęqualis, lineę quæ dupla sit minoris basis frusti, & basi maiori eiusdem, ad solidum quod basim habeat quadratum basis minoris frusti, altitudinem uero istis utrisq; simul æqualem, lineæ quæ dupla sit maioris basis, & basi minori. Sint in sectione rectanguli coni duæ lineæ rectæ a c, d e: diametros a b c portionis esto b f. Constat quòd a c, d e sunt æquedistantes ei lineæ, quæ per punctum b ducta, contingit ipsam sectionem: & diuisa e f in quinque partes æquas, esto quinta media h k. & h i ad i k eam habeat proportionem, quam solidum, quod basim habeat quadratum a f, altitudinem

titudinem uero æqualem istis utrisque simul, duplæ d g, & ipsi a f, ad solidum cuius basis existat quadratum f g, altitudo uero æqualis istis utrisque simul duplæ a f, & ipsi d g. Ostendendum est, quod frusti a d c e, centrũ grauitatis est punctum i. Esto itaque m n æqualis ipsi f b, & n o æqualis b g: & sumatur ipsarum m n, n o media proportionalis m x, & quarta proportionalis n t. & sit sicut t m ad t n, ita f h ad quandam ab ipso i, quocunque proueniat in frusto punctum. Nihil enim refert siue inter f g, siue inter b g pũcta proueniat: quæ sit i r. Et quoniã in rectanguli coni sectione diametros portionis est f b, ipsa f b uel est principalis ipsius sectionis, uel ei diametro æquedistat. lineæ uero a f, d g in eam intentæ, sunt ductæ, cum sint æquedistantes ei lineæ quæ à puncto b ducta sectionem contingit. Si autem hoc fuerit, erit sicut a f ad d g potentia, sic f b ad b g longitudine: hoc est m n ad n x potentia. Sicut ergo a f ad d g potentia, sic m n ad n x potentia. Quare & longitudine sunt in eadem proportione. Sicut ergo cubus lineæ a f, ad cubum lineæ d g, sic cubus ipsius m n ad cubum n x. Verum sicut cubus a f ad cubum d g, sic portio b a c ad portionem d b e. Sicut autem cubus m n ad cubum n x, sic m n ad n t. Quare & diuidendo erit, sicut frusti a d, c e ad portionem d b e, sic m t ad t n: hoc est tres quintæ f g ad i r. Et quoniam solidum basim habens quadratũ a f, altitudinẽ uero compositam ex dupla d g, & ex a f ad cubum a f, eam habet proportionem quam dupla d g, cum a f ad a f. Quare & sicut dupla n x, cum n m ad n m. Est autem sicut cubus a f ad cubum d g, sic m n ad n t. Sicut autem cubus d g ad solidum, basim habens quadratum d g, altitudinem uero compositam ex dupla a f, cum d g: sic d g ad compositam ex dupla a f & d g. Quare & sicut t n ad compositam ex dupla o n et t n. Sunt igitur quatuor magnitudines: solidum, quod basim habet quadratum a f, altitudinem uero compositam ex dupla d g & a f: & cubus a f, & cubus d g: & solidum basim habens quadratum d g, altitudinem uero compositam ex dupla a f, & d g. quæ quatuor magnitudinibus sunt proportionales, duabus simul sumptis compositæ ex dupla n x & m n, & alij magnitudini ipsi m n, & alij deinceps n t, & postremò compositæ ex dupla n o & t n. Per æquam igitur fiet, sicut solidum basim habẽs quadratũ a f, & altitudinem compositam ex dupla d g, & a f, ad solidum quod basim habeat quadratum d g, altitudinem uero compositam ex dupla a f: & d g eam habeat proportionem, quam composita ex dupla n x, & m n, ad compositam ex dupla n o, & n t. Verum sicut solidum dictum, ad solidum dictum, sic h i ad i k. Sicut ergo h i ad i k, sic composita ad compositam. Quare & componendo antecedentibus sequentia, erit igitur sicut f g ad i k, sic quincupla utriusque simul m n, n t, & decupla utriusque simul n x, n o, ad duplam n o & t n. Et sicut f g ad f k, quæ est duæ quintæ illius: sic quintupla utriusque simul m n, n t, & decupla utriusque simul n x, n o, ad duplam utriusque simul m n, n t, & quadruplam utriusque simul n x, x o. Erit igitur sicut f g ad f i, sic quincupla utriusque simul m n: n t, et decupla utriusque simul x n, n o, ad cõposità ex



dupla m n, & quadrupla n x, & ſexcupla o n, & tripla n t. Quoniã igitur ſunt quatuor lineæ rectæ conſequenter proportionales, m n, n x, o n, n t: & eſt ſicut n t ad t m, ſic quædam ſumpta, hoc eſt r i, ad tres quintas f g, hoc eſt m o. Sicut autem cõpoſita ex dupla m n, & quadrupla n x, & ſexcupla o n, et tripla n t, ad compoſitam ex quincupla utriuſque ſimul m n, n t, & decupla utriuſq; ſimul x n, n o, ſic altera quædam ſumpta, hoc eſt i f ad f g, hoc eſt ad m o: erit per ea quæ prædicta ſunt r f, duæ quintæ m n, hoc eſt f b. Quare centrum grauitatis portionis a b c erit r punctum. Eſto iam d b e portionis centrum grauitatis q punctum. Fruſti itaque a d c e, centrũ grauitatis erit in linea q r recta, terminans lineam ab r eductam, quæ eãdem habet ad illam proportionem, quam fruſtum ad reſiduam portionem. Eſt autem punctum i, centrum ipſum: quoniam ipſius f b tres quintæ eſt ipſa b r: ipſius uero b g tres quintæ eſt b q. Reliquæ ergo, hoc eſt g f, tres quintæ eſt q r. Quoniã igitur eſt ſicut a d e c fruſtum ad b d e portionem, ſic m t ad n t. Sicut autem m t ad n t, ſic tres quintæ g f, quæ eſt q r, ad r i. Erit igitur & ſicut fruſtum a d c e, ad portionem d b e, ſic q r ad lineam quæ eſt inter centrum grauitatis a b c portionis, & centrum grauitatis fruſti. Sed cẽtrum grauitatis a b c portionis, eſt r punctum, et centrum grauitatis portionis d b e eſt q. Conſtat igitur, fruſti a d e c, punctum i eſſe centrum grauitatis.

FINIVNT INVENTA ARCHIMEDIS DE HIS quæ æquali pondere aptantur.

ARCHIMEDIS QVADRATVRA PARABOLAE, ID EST PORTIONIS CONtentæ à linea recta & ſectione rectanguli coni.

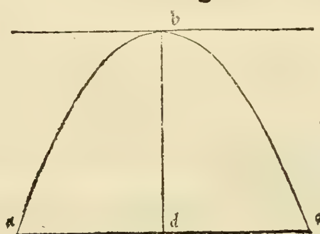
ARCHIMEDES DOSItheo recte agere.



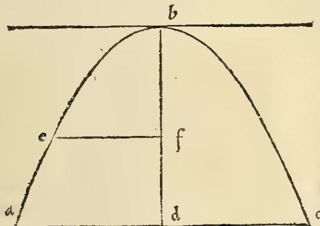
CVM audiſſem Cononem mortuum eſſe, qui nobis adhuc in amicitia reſidebat: teq; hominem Cononis antea admodum familiarem extitiſſe, & in Geometria maxime uerſatum, eius quidem uita priuati deſiderio, & dolore maximo affecti ſumus, cum eſſet homo, cum mei amantiſſimus, tũ in ſpeculationibus ingenio admirali, ac prope diuino. Tibi uero, ueluti antea Cononi ſcribere conſueueramus ſæpiſſime, præconati ſumus inter cætera Geometricæ facultatis theoremata, hoc unum conſcriptum mittere: quod cum antea tentatum eſſet à nullo, nuper à nobis inſpectum, & depræhenſum eſt: primò quidem Mechanica ratione perquiſitũ, poſtea uero Geometrica quoq; demonſtratum. Eorum enim qui antehac Geometriæ operam dederunt, nõnulli id inueſtigare, & memoriæ mandare ſtuduerũt, circulo dato, uel circuli portione quacunq;, ſpacium rectilineum æquale illi poſſe inueniri. Itẽ ſpacium à coni totius rectanguli ſectione comprænhenſum, & linea recta, ad quadrati formam & menſuram reducere conati ſunt, ſumentes non facile conceſſibilia fundamenta ipſis, ſanè cum hæc ipſa à quàmplurimis non inuenta ſint. Illud etiã diuul-

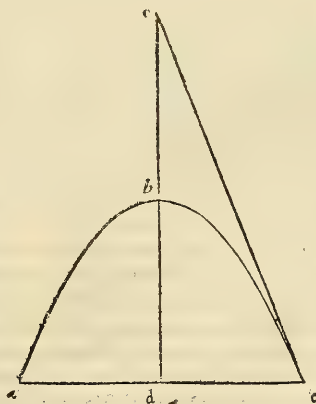
diuulgatum, portionem à rectanguli coni sectione contentam ueterũ neminem ingressum quadrare comperimus, quod nuper à nobis inuentum est. Hoc enim demonstratur, portionem omnem à recta linea & coni rectanguli sectione compræhensam, trianguli illius esse sesquitertiam, qui quidem triangulus basim habeat & altitudinem cum portione eandem. Hoc fundamento ad eius demonstrationem sumpto, spaciorum inæqualium excessus quibus minus à maiore superatur, sibi ipsis totiens coaceruari posse, ut quodcunq; spacium propositum quod sit finitum superent. Superiores quoque Geometræ hoc fundamento usi sunt: & circulos habere inter se proportionem diametrorum duplicatam, hoc demonstrauerunt, illo fundamento muniti. Item sphæras inter se proportionem suarum diametrorum habere triplicatam. Amplius, omnem pyramidem tertiam esse partem eius prismatis, quod eandem pyramidi basim & altitudinem æqualem habuerit. Item, omnem conum tertiam esse partem eius cylindri, qui basim cono eandem, & æqualem habuerit altitudinem. Similiter eodem fundamento prouecti, illa scripserunt, cum id accidat, eorum quæ predicta sunt theorematum unum quodq; nihil minus sibi fidei comparare, quàm ea quæcunque sine eo fundamento sunt demonstrata. Nuper autem his quæ à nobis exposita sunt, in similem huius fundamenti fidem adductis, describentes igitur eius demonstrationes mittimus: primum quidem quo pacto per Mechanicas rationes inspecta fuerunt, deinde Geometricis argumentis demonstrata. Præmittuntur autem initio ea Conica elementa, quibus ad eorum demonstrationes maxime indigemus. Vale.

SI coni rectãguli sectio sit, in qua a b c, et linea b d recta sit, aut æquedistans diametro, aut ipsa diametros, & a c sit æquedistans lineæ contingenti in puncto b sectionẽ rectanguli coni: æqualis erit a d ipsi d c. Quod si a d est ipsi d c æqualis, æquedistantes erunt a c, & contingens sectionem coni in puncto b. 1



SI coni rectanguli sectio sit a b c, sitq; b d æquedistans diametro, aut ipsa diametros: linea uero a d c æquedistans lineæ coni sectionem in puncto b contingenti: & linea e c sectionem coni in puncto c cõtingat: erunt b d, & b e æquales. 2

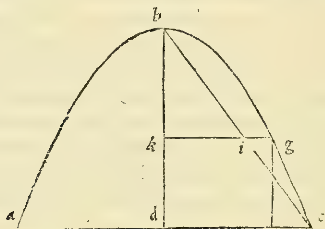


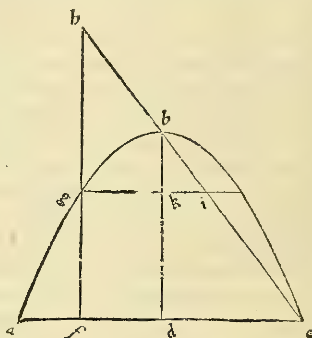


SI sectio rectanguli coni sit a b c, & b d, æquedistans diametro, aut ipsa diametros: & ducantur quædam æquedistantes illi, quæ in puncto b contingit sectionem 3

ctionem, quæ sint a d, e f. Erit sicut b d ad b f longitudine, ita a d linea ad e f potentia. Hæc autem demonstrata sunt in Conicis elementis.

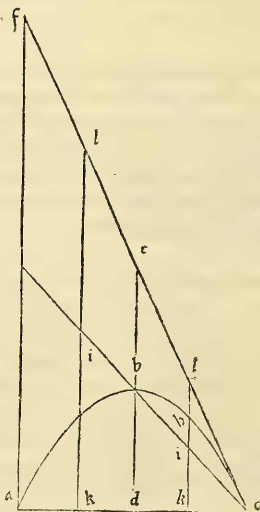
4 ESto portio compræhensa à coni rectanguli sectione, & linea recta a b c, & linea b d, à medio a c ducatur æquedistans diametro, aut ipsa diametros: & sit b c linea iũcta, et protracta. si iam ducatur alia quædam æquedistãs ipsi b d, quæ sit f h, diuidens lineas rectas c b, a c: ducatur item alia æquedistans ipsi a c, secans lineam b d,





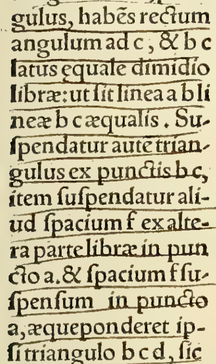
quæ sit k g: eandem habebit proportionem f h ad h g, quam d a ad d f. Ducta est namque per punctum i, linea k g æquedistans ipsi a c. Est igitur sicut b d ad b k longitudine, ita d c ad k g potentia. nam hoc demõstratum est. Erit igitur sicut b c ad b i longitudine, ita d c ad d f potentia. Aequales sunt enim d f, k g. & ideo sicut b c ad b h potentia: proportionales igitur sunt b c, b h, b i lineæ. Quare eam habet proportionem b c ad b h, quam c h ad h i. Est igitur, sicut c d ad d f, ita f h ad h g. Verum c d est æqualis ipsi d a. Cõstat igitur, d a eam ad d f habere proportionem, quam f h ad h g.

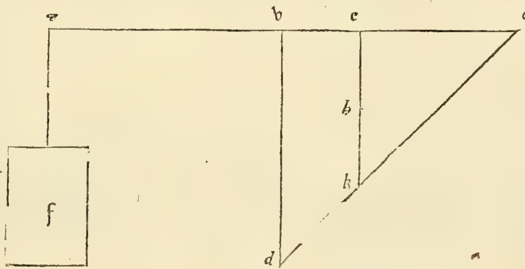
5 ESto portio cõtenta à linea recta, & coni rectanguli sectione a b c, & ducatur à puncto a, linea a f, æquedistans diametro. à puncto c ducatur contingens sectionem coni, cõcurrens cum a f, in puncto f. Si iam ducatur aliqua in triangulo f a c, quæ sit æquedistãs ipsi a f: ipsa ducta secundũ eandẽ proportionem à sectione rectanguli coni secabitur, & ipsa a c ab ipsa producta proportionaliter. Eiusdem uero rationis erit pars lineæ a c uersus a, cuius pars lineæ ductæ uersus a c lineam. Ducatur itaq; aliqua d e, æquedistans lineæ a f: & primò secet lineam a c in duo æqua. Quoniam igitur a b c est sectio coni rectanguli, & b d ducta est ęquedistans diametro, & a d d c sunt æquales, erit a c æquedistans lineæ contingenti sectionem rectanguli coni in puncto b. Rursus quoniam d e diametro est æquedistans, & à puncto c ducta est c e contingens sectionem rectanguli coni in puncto c, & linea a c æquedistans lineæ contingenti sectionem coni, erit e b æqualis b d, Quare eandem habet proportionem d a ad d c, quam d b ad b e. Siquidem



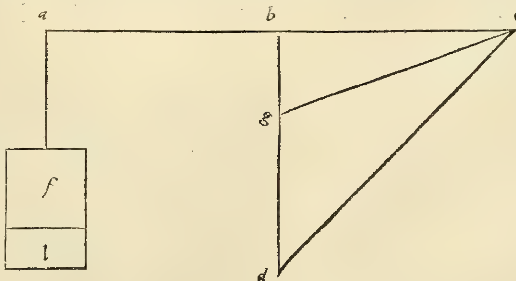
dẽ igitur línea ducta, per æqualia diuidat lineã a c, oſtenſum eſt. Sin nõ per æqua diuidat, ducat̃ alia quędã k l, æquediſtans ipſi a f. Oſtendendũ quod eandẽ habet proportionẽ a k ad k c, quam k h ad h l. Cũ igitur b d, ſit æqualis ipſi b e, æqualis erit & i l ipſi k i. Eandẽ ergo proportionẽ habet k i ad i l, quã d c ad d a. Habet aũt & k i ad i h, eam quã d a ad d k. nam hoc eſt prius oſtẽſum in præmiſſa. Quare eã habet k h ad h l, quam a k ad k c proportionem. Demõſtratũ eſt igitur propoſitũ.

INtelligatur autem hoc primum, quod eſt in inſpectione propoſitum, ſitq; conſpectum ad horizontem erectum, & lineæ a b: deinde pars quidem uerſus d intelligatur infrà, pars autem uerſus aliud ſuprà. Triangulus autem b d c ſit rectan- 6


gulus, habẽs rectum angulum ad c, & b c latus equale dimidio libræ: ut ſit linea a b lineæ b c æqualis. Suſpendatur autẽ triangulus ex punctis b c, item ſuſpendatur aliud ſpacium f ex altera parte libræ in puncto a. & ſpacium f ſuſpenſum in puncto a, æqueponderet ipſi triangulo b c d, ſic



poſito ut nunc eſt collocatum. Dico tunc f ſpacium trianguli b c d tertiam partem eſſe. Quoniam igitur ſuppoſitum eſt, libram æqueponderare, a c linea ipſi libræ aſſimilatur. Terminantur autem lineæ ad angulos rectos ex ipſa a c ductæ in plano, erecto ſuper horizontẽ: & erũt perpendiculares ſuper horizõtem. Diuidatur iam linea b c in puncto e, ita ut c e dupla ſit ipſius e b: & ducatur k e æquediſtans ipſi d b, & hæc in duo æqua diuidatur in puncto h. trianguli itaq; b a c centrum grauitatis eſt punctum h. nam hoc eſt oſtenſum in Mechanicis. Si igitur trianguli b d c ſuſpenſio, quæ eſt ad b c, ſoluatur, & ipſe ſuſpendatur ad punctum e, manet triangulus ut nunc ſe habet. Vnumquodq; enim ſuſpenſorũ ex quo puncto conſtitutum manet, ita ut ſecundum lineam perpendicularem ſit punctum ſuſpenſibilis, & centrum grauitatis ſuſpenſi. nam hoc quoque oſtenſum eſt. Quoniam igitur triangulus b d c eandem habet conſtitutionem ad libram, æqueponderabit ſimiliter ipſi ſpacium f. Quoniam autem æqueponderãt f ſpacium ſuſpenſum in puncto a, & triangulus b d c in puncto e, conſtat quod mutuam inter ſe habent proportionem longitudinũ: & eſt ſicut a b ad b e, ita triangulus b d c ad ſpaciũ f. ſed a b tripla eſt ipſius b e, igitur triangulus b d c ſpacij f triplus exiſtit. Manifeſtũ quoq; eſt, quod ſi triangulus b d c ſpacij f triplus extiterit, ambo ſimiliter cõſtituta æqueponderabunt.

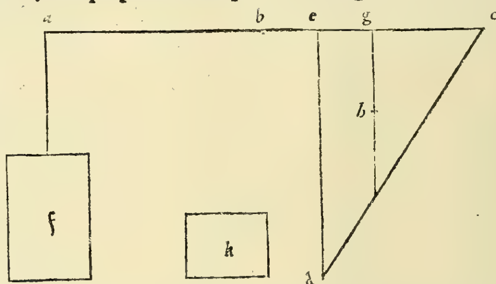


ESto itẽ libra linea a c, medium aũt eius ſit b, & ſuſpẽdadatur ſecũdum b triangulus c d g: triangulus uero c d g ſit triangulus ambligoni- 7

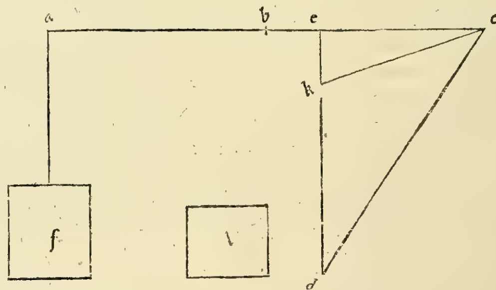
cus,

us, qui basim habeat lineã d g, altitudinẽ uero ęqualem dimidiæ libræ, & suspendatũ d c g triãgulus ex b c pũctis. spaciũ uero f suspensum ad a, æqueponderãs esto ipsi c d g triangulo, sic se habenti uti nunc positũ est. Similiter ostẽdetur spacium f esse tertiam partem trianguli c d g. suspendatur autem & quoddam aliud spaciũ ex a, quod sit tertia pars trianguli b c g. triangulus itaq; b d c æqueponderabit spacio f l. Cum itaq; b c g triangulus æqueponderet ipsi l, & b c d ipsi f l, & trianguli b c d tertia pars est f l, manifestum est triangulum c d g spacij f triplum haberi.

8 Esto libra a c, medium eius b: & suspendatur secundũ b triangulus c d e rectangulus, qui rectũ angulum habeat ad e, & suspendatur ex libra secundum c e, & spacium f suspendatur ex a, & æqueponderato ipsi c d e triangulo, sic se habente sicut nũc positum est. Quam autem proportionem habet a b ad b e, eam habeat c d e triãgulus ad spacium k. Dico iam, f spacium triangulo c d e minus esse, spacio autem k maius. Sumatur itaq; triãguli c d e centrũ grauitatis quod sit h, et ducatur h g ęquedistans d e. Quoniam igitur triangulus c d e æqueponderat spacio f, eandem proportionem habet spacium c d e ad spacium f, quam a b ad b g. Quare f minus est c d e. & quoniam c d e triangulus ad spacium f, eam proportionem habet, quam b a ad b g: ad k uero eam quam b a ad b e: constat triãgulum c d e maiorem proportionẽ habere ad k, quàm ad f. quare f spacium ipso k maius existit.

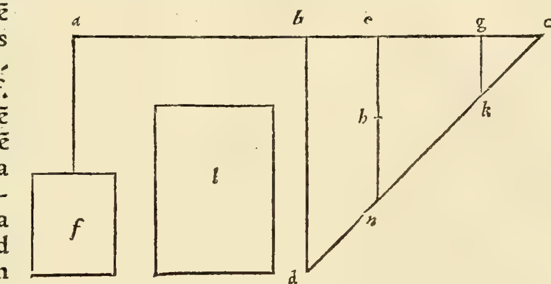


9 Esto item libra a c, & medium eius b, & c d k triangulus ambligonius, qui basim habeat d k, altitudinem uero e c, & suspendatur ex libra in punctis c e. Spaciũ uero f suspendatur, & æqueponderato d e k triangulo, sic se habẽti sicuti nũc iacet. Quam aũt proportionem habet a b ad b e, eam habeat c d k triangulus ad spacium l. Dico iam spacium f, ipso l maius esse, et ipso d c k minus. Hoc similiter præmisso, demonstrabitur.

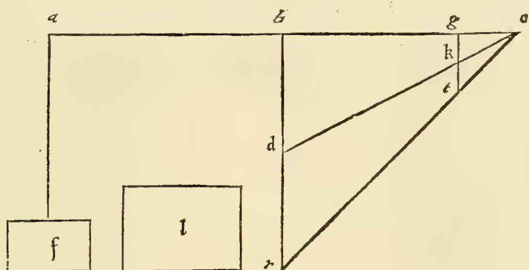


10 Esto item a b c libra, eius medium b, mensula uero b d g k habeat angulos ad puncta b g rectos, latus uero k d inclinatum in c: & quam habet proportionẽ b a ad b g, eam habeat b d k g mensula ad l spacium. Suspensa autem sic mensula b d k g ex libra in b g punctis, suspensum quoq; sit f spacium in a, & æqueponderato ipsi b d k g mensulæ, sic se habenti sicut nunc iacet: dico iam f spacium ipso l minus esse. Diuidatur itaq; b g, in puncto e, ita ut quam proportionem habet dupla d b, & ipsa k g ad duplam ipsius k g, & ipsam b d, eam habeat e g ad b e: & ducta per punctum e, línea e n æquedistans ipsi b d, diuidatur in duo æqua in pũcto h, iam mensulæ b d k g centrum grauitatis est h, nam hoc ostensum est in Mechanicis.

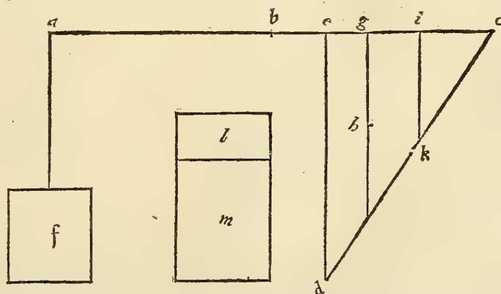
chanicis. Si igitur b d k g in e suſpendatur, à punctis autem b g ſoluatur, manet eandem habens conſiſtentiam, per eandē quæ in ſuperioribus rationem, & æqueponderabit ſpacio f. Quoniam igitur mēſula b d k g in e ſuſpēſa ęqueponderat ſpacio f in a ſuſpenſo, erit ſicut b a ad b e, ita menſula b d k g ad ſpacium f. Maiorem igitur proportiōem habet menſula b d k g ad ſpacium f, quàm ad ſpacium l, cum a b habeat ad b e maiorem proportionem, quàm ad b g. Quare ſequitur f ſpacium eſſe ipſo l ſpacio minus.



ESto item a b c libra, & medium eius b, & b d t r menſula ſit quæ habeat latera k d, t r uerſus c inclinata: latera uero d r, k t ſuper b c perpendicularia, & d r cadat in b. Quam autem proportionem habet a b ad b g, eam habeat k d t r menſula ad l ſpaciū: mēſula uero k d r t ſuſpendatur ex libra in punctis b g, & ſpacium f in puncto a, et æqueponderato ſpacium f mēſulæ k d t r, ſic ſe habenti uti nūc iacet. Similiter iam ſuperiorib. oſtendetur, ſpacium f ſpacio l minus eſſe. 11

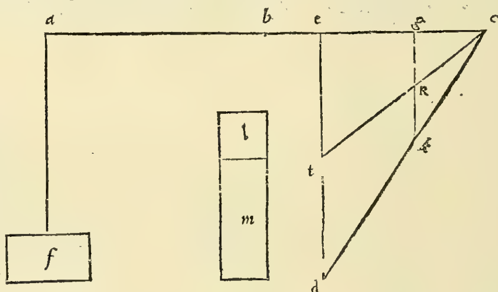


ESto item libra a b c, medium eius b, & menſula d e k g ſit, quæ angulos ad e g puncta rectos habeat: lineas uero k d, e g uerſus c inclinatas. et quam proportionem habet a b ad b g, eam habeat d e k g menſula ad m. Quā autem habet a b ad b e, eam habeat d e k g menſula ad l. menſula uero d e k g ſuſpenſa ſit in libra ex punctis e g: ſpaciū uero f ſuſpendatur ex a, æqueponderans ipſi menſulæ, ſic ſe habenti uti nunc iacet. Dico iam ſpacium f ipſo l maius eſſe, ipſo uero m minus. Sumam enim centrum grauitatis menſulæ d e k g, quod ſit h. Sumetur autem ſimiliter ſuperioribus: & ducatur h i ęque 12

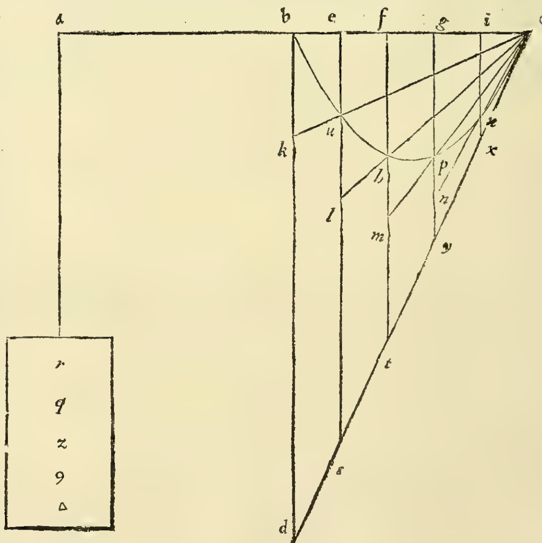


distans ipsi d c. Si igitur mensula ex libra suspendatur in puncto i, & soluatur à punctis e g, manet eandem habens consistentiam, & æqueponderabit ipsi f spacio eadem qua superius ratione: quoniam mensula suspensa in puncto i, ęquepõderat spacio f suspenso in a. eãdem habebit proportionẽ mensula ad spaciũ f, quã a b ad b i. Cõstat igitur d e k g maiorẽ ad l habere proportionem, quàm ad f: ad m uero minorẽ, quàm ad f. Quare f spaciũ ipso l spacio maius est, ipso uero m minus.

13 Esto rursus libra a c, medium eius b, & mensula k d t r, ita ut latera eius k d, t r sint uersus c inclinata: ipsa uero d t, k r sint ad a b perpendicularia. Suspensa autem sit ex libra in puncto e, & spacium f suspendatur in a, & æquepõderato ipsi mẽsulæ k d t r, sic se habenti, ut nunc habet. & quam habet proportionem a b ad b e, eam habeat d t k r, ad spacium l. Quã uero habet a b ad b g, eam habeat mensula ad spacium m. Similiter, ut suprà proximè ostẽdetur, f spaciũ ipso l spacio esse maius, ipso m uero minus.



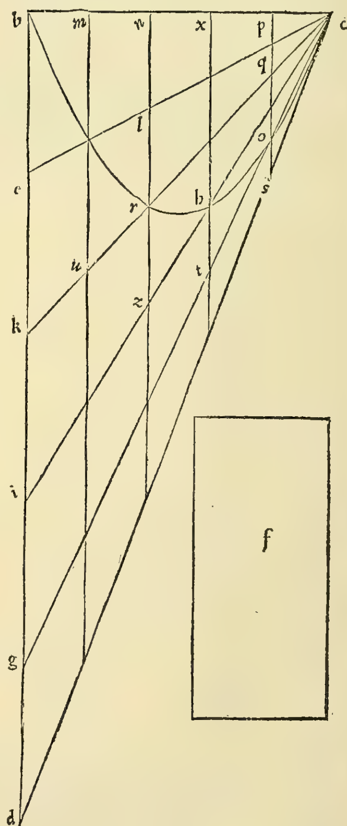
14 Esto portio b o c compræhensa à recta linea, & rectanguli coni sectione. Esto primum b c ad angulos rectos super diametrum, & ducatur à puncto b æquedistans ipsi diametro: & à puncto c ducatur c d contingens sectionem rectanguli coni in puncto c. erit iam b c d triangulus rectangulus. Diuidatũ b c in partes quotcunq;, b e, e f, f g, g i: & à punctis diuisionum ducantur æquedistantes diametro e f, f t, g y, i x. à punctis autem, quibus ipsę secant sectionem coni, educãtur & iungantũ ad c. Dico itaq;, b d c triangulũ mẽsulis quidẽ k e, l f, m g, n i, & triãgulo x i c minorẽ esse, quàm triplũ. mẽsulis aũt f u, g h, i p, & triangulo i o c maiorem esse, quàm triplum. Ducatur itaq; linea recta a b c, & sumatur a b æqualis ipsi b c, & intelligatur libra a c, cuius medium b, et pendeat ex b. Suspendatur autem b d c ex libra in punctis b c: ex altera autem libræ parte suspendantur spacia r q z 9 Δ in puncto a: & spacium r æqueponderet mensulæ d e, sic se habenti ut nunc iacet: spacium uero q mensulæ f s: spacium z mensulæ



menſulæ t g: ipſum 9 menſulæ x i: ipſum uero Δ triangulo c i x: æqueponderabit iam totũ toti. Quare triangulus b d c, triplus erit ſpacio r q z 9 Δ. Et quoniã eſt portio b c o, quæ comprædenditur à recta & ſectione rectanguli coni, & à puncto b, ducta eſt b d æquediſtans diametro: & à puncto c ducta c d, contingens ſectionẽ coni in puncto c: ducta quoq; alia æquediſtãs diametro ſ e, eandem habebit proportionem b c ad b e, quam ſ e ad e u. Quare b a ad b e, eam habet quam menſula d e ad k e. Similiter oſtenditur, a b ad b f eam habere proportionem, quam ſ f menſula ad l f, ad b g autem eam quam t g ad m g. ad lineam uero b i, eam quam y i ad n i. Quoniam igitur menſula d e habet angulos ad puncta b e rectos, latera uero uerſus c inclinata: æqueponderat autem ipſi quoddam ſpacium r, ſuſpenſum ex libra in puncto a, menſula ſic manẽte uti nunc poſita eſt: & eſt ſicut b a ad b e, ſic mẽſula d e ad ſpacium k e. [ſicut autem b a ad b f, ita menſula d e ad ſpacium q. Spacium igitur q ſpacio r maius eſt. nam hoc oſtẽſum eſt.] quare ſpacium k e maius eſt ſpacio r. nam hoc oſtenſum eſt. Rurſus menſula f ſ, quæ angulos ad f e puncta rectos habet, & latus ſ t inclinatum uerſus c, & æqueponderat ei ſpacium q ex libra ſuſpenſum in puncto a, menſula ſic manente uti nunc iacet: & eſt ſicut b a ad b e, ſic f ſ menſula ad f u. Sicut autem a b ad b f, ita f ſ menſula ad l f. Quare q ſpacium menſula l f minus exiſtit, ipſa uero f u maius. Hoc enim oſtẽſum eſt. Eadem ratione & z ſpacium, menſula quidem m g minus: ipſa uero h g maius eſſe probatur. & 9 ſpacium menſula n i minus, ipſa uero p i maius. Similiter autem & d ſpacium triangulo quidem x i c minus, ipſo uero c i o maius. Quoniam igitur menſula k e eſt maior ſpacio r, & ipſa l f maior ipſo q, & m g ipſo r: & n i ipſo 9, & x i c triangulus ipſo Δ: conſtat quod omnia ſimul dicta ſpacia maiora ſunt ſpacio r q z 9 Δ. Eſt autem ſpacium r q z 9 Δ tertia pars trianguli b c d. Quare manifeſtum eſt, triangulũ b c d minorem eſſe quàm triplum menſularum k e, l f, m g, n i, & triãgulo x i c. Rurſus quoniam mẽſula f u minor eſt ſpacio q, menſula h g minor ſpacio z, & ipſa i p ipſo 9, & triangulus i o c ipſo Δ: conſtat, dicta ſpacia ſimul omnia minora eſſe ſpacio q z 9 Δ. Quare manifeſtũ quoque eſt, b d c triangulum maiorem eſſe quàm triplum menſularũ u f, h g, i p, & triangulo i c o: minorẽ uero quàm triplũ earũ quæ antè ſcriptæ ſunt.

Esto rurſus b o c portio à recta linea & à ſectione rectanguli coni compræhenſa, & b c linea non ſit ad angulos rectos ſuper diametrum, neceſſe iam eſt lineam à puncto b du- 15

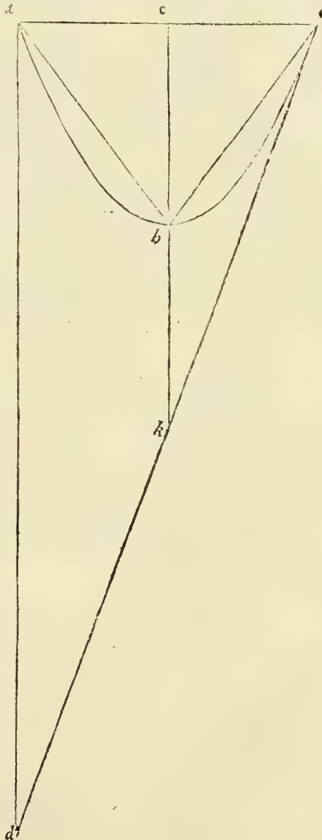
ctam, æquediſtantem diametro uerſus portionem facere angulum obtuſum in parte uerſus b, aut uerſus c, & intra ſectionis portionem, aut extra. Eſto itaque quod faciat angulum extra obtuſum uerſus b, & ducatur b d æquediſtans diametro à puncto b: & à puncto c ducatur c d contingens ſectionem in puncto c, & diuidatur b c in partes æquas quotcunque b e, e f, f g, g i, i c. à punctis uero e f g i ducantur e ſ, f t, g y, i x diametro æquediſtantes, & à punctis quibus ipſæ ſecant ſectionem coni iungantur lineæ ad c, & extrahantur. Dico iam & nunc triangulum b d c eſſe menſulis ſ u, l f, m g, n i, & triangulo c i x eſſe minorem quàm triplum: menſulis uero f u, g h, i p, & triangulo c o i maiorem eſſe quàm triplum. Extrahatur d b in alteram partem, & à puncto c ducatur ad ipſam c k perpendicularis: & protendatur, donec ſumatur a k æqualis ipſi c k. Intelligatur rurſus libra a c, cuius medium k, & pendeat libra ex k puncto: & c k d triangulus ſuſpẽdatur ex media libra in pũctis k c, ſic ſe habens ut nũc iacet. Ex altera parte libræ ſuſpẽdantur in puncto a, ſpacia r q z 9 Δ: & r quidẽ menſulæ d e æqueponderet, ſic manenti uti nunc poſita eſt: & ſpacium q menſulæ f ſ, ſpacium z menſulæ t g: & ipſũ 9 ipſi y i. & ipſum Δ ipſi c i x triangulo, æqueponderabit quoque totum toti. Quare triangulus d b c triplus exiſtit ſpatio r q z 9 Δ. ſimiliter ſuperiori proximo oſtendetur, mẽſulam e z ſpacio r eſſe maiorem, & menſulam l f maiorem ſpacio q, & f u minorem: & menſulam m g maiorem ſpacio z, ipſam uero g h minorem. & n i maiorem ſpacio 9, & ipſam p i minorẽ. & x i c triangulum ſpacio Δ maiorem, ipſum c i o minorem eodem. Quare conſtat propoſitum.



16 Eſto item portio b o c cõtenta à linea recta, & à ſectione rectanguli coni. et ducatur per b linea b d æquediſtãs diametro, & à puncto c ducatur contingẽs ſectionem coni in puncto c, quæ ſit c d. Eſto trianguli b c d tertia pars ſpacium f. Dico iam, portionem b o c ęqualem eſſe ſpacio f. Nam ſi nõ, erit uel maior, uel minor. Eſto primum ſi fieri poteſt maior, & ſit ut exceſſus quo portio b o c ſuperat ſpacium f, ſibiipſi toties coaceruetur, donec compoſitum ex ipſo excedat triangulum b c d. Poteſt itaque ſumi ſpacium quoddã minus illo exceſſu, quod ſpacium ſit pars trianguli b c d. ſit ergo b e c triangulus dicto exceſſu minor, & pars trianguli b c d. Erit quoque linea b e pars lineæ b d. Diuidatur itaque b d in partes, & ſint diuiſionum puncta g i k: & à punctis g i k, ad lineam c e rectam ducãtur lineæ rectæ, quæ ſecabũt ſectionem coni, cum linea c d contingat eam in pũcto c. & per puncta quibus rectæ ſecant ſectionem coni, ducãtur lineæ rectæ m u, n r, x h, p ſ æquediſtantes diametro. erunt eædem æquediſtantes quoque ipſi

bd,

b d. Quoniã igitur triangulus b e c est minor excessu, quo portio b o c excedit spacium f. Constat utraq; simul, spacium f, et triangulum b e c, minora esse portione: & triãgulo b c e æquales sunt mensulæ illæ per quas sectio coni permeat, quę sunt m e, u l, h r, h o cum triangulo c o s. nam mensula m e est communis: m l autem est æqualis u l, & l x æqualis ipsi h r, & q x æqualis ipsi h o, & triangulus c q p æqualis triangulo c o s. Spacium igitur f minus est mensulis m l, x r, p h, cũ triangulo p o c: & est triangulus b c d triplus spacij f. Quare b c d minor est, quàm triplus mensularum m l, r x, h p cum triangulo p o c, quod quidem esse non potest. nam ostensus est maior esse, quàm triplus. non est igitur portio maior spacio f. Dico item eam neq; esse minorem illo. Esto enim, si esse potest, minor. Rursus excessus quo spacium f superat portionem b o c, ipse sibiipsi totiẽs coaceruetur, donec superet triangulum b c d. Potest itaq; spaciũ aliquod sumi quod sit minus excessu, quodque sit pars trianguli b c d, & reliqua eadem disponantur ut prius. Quoniam igĩt triangulus b c e minor est excessu quo spacium f superat portionem b o c, triangulus b e c, & portio b o c, utraq; simul sunt minora spacio f. Est autem & ipsum f spacium minus quadrilateris e m, u n, z x, p t, & triangulo c p s. nam b c d triangulus spacij f est triplus: spaciorum autem prædictorum minor, quàm triplus, ut in premisso est ostensum. Igitur triangulus b c e, & portio b o c, simul sunt minora quadrilateris e m, u n, z x, p t, & triangulo c p s. Quare portione inde ablata, quę communis est, triangulus b c e minor erit ipsis spacijs compræhensis, quod esse non potest. nam ostensum est, triangulum b c e mensulis e m, u l, h r, h o, & triangulo c o s esse æqualem, quæ simul sunt maiora dictis spacijs compræhẽsis. Non est igitur portio b o c minor spacio f: & ostensum est eo maiorem esse nõ posse. Portio ergo spacio erit æqualis.

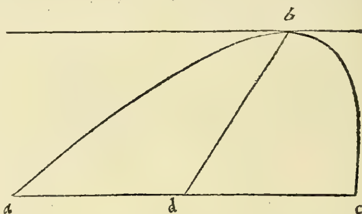


HOc autem demõstrato, manifestũ est, portionẽ à recta linea et à sectione rectanguli coni compræhensam, esse sesquitertiam triangulo, qui habeat basim cũ portione eandem, & altitudinem eidem æqualem. Esto portio comprẹhensa à linea recta, & sectione rectanguli coni: uertex eius esto punctum h, & inscribatur ei triangulus b h c, qui basim habeat cum portione eandem, & altitudinem æqualem. Quoniam igitur punctum h est uertex portionis, linea recta à puncto h ducta æquedistans diametro in duo æqua diuidit lineam b c, & b c est æquedistans lineæ cõtingenti portionem in puncto h. Ducatur autem e h diametro æquedistans: ducatur item à puncto b æquedistans diametro quæ sit b d, & à puncto c ducatur contingens sectionem in puncto c, quæ sit c d. Quoniam igitur e h k linea est diametro æquedistans, & c d contingens sectionem in puncto c, & linea b e c est æquedistans lineæ contingenti sectionem in pũ- 17

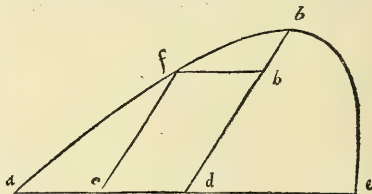
cto h, erit triangulus b c d quadruplus triangulo b h c. Cum igitur triãgulus b c d sit quadruplus triangulo b h c, & triplus portioni, manifestum est portionẽ b h c triangulo b h c sesquitertiam esse.

Earum portionum quæ continentur à curua, & à recta linea, basim uoco ipsam rectam: altitudinem uero maximam perpendicularem, quę à curua linea ad basim portionis aptata sit: uerticem autem, punctum illud à quo perpendicularis maxima ad basim ducitur.

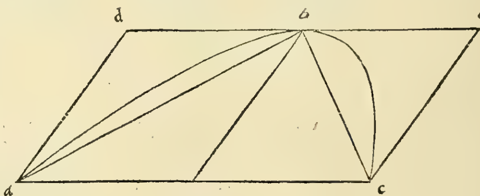
18 SI in portione quæ compræhensa sit à linea recta, & à coni rectanguli sectione, à media basi ducatur recta diametro æquedistans, punctum illud in quo dicta æquedistans diametro secat coni sectionem, est uertex sectionis. Esto a b c portio compræhensa à linea recta, & à sectione rectanguli coni, & à medio a c ducatũ d b diametro æquedistans. Quoniã igitur in rectanguli coni sectione ducta est b d diametro æquedistans, erit a d æqualis ipsi d c. Constat a c ęquedistãtem esse lineæ contingenti sectionem in puncto b. Manifestum est igitur, quod perpendicularis quæ ducẽt à sectione ad lineã a c, erit maxima omnium illa quę à puncto ducta fuerit. Punctum igitur b portionis uertex existit.



19 IN portione à linea recta, & à rectanguli coni cõpræhensa sectione linea ducta à media base, æquedistãs diametro, est sesquitertia lineæ ductæ similiter à dimidia dimidiæ basis. Esto a b c portio contenta à recta, & à sectione coni rectanguli: & ducatur b d à dimidia basi æquedistans diametro, & e f ducatur à dimidia a d: ducatur item f h æquedistãs ipsi a c. Quoniã igitur in sectione rectanguli coni ducta est b d ęquedistans diametro, & a d f h sunt æquedistantes cõtingenti sectionem in puncto b, constat eandem habere b d ad b h proportionem longitudine, quam a d linea ad f h potentia. Igitur b d est quadrupla ipsius b h longitudine. Constat igitur b d ipsius e f esse sesquitertiã longitudine.



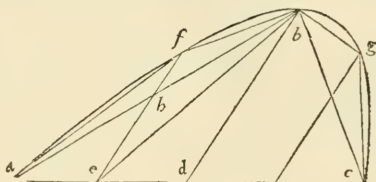
20 SI portioni à recta, & sectione rectanguli coni contentæ triangulus inscribatur, qui habeat basim cum portione eandem, & altitudinem eandem, triangulus dimidio portionis maior existit. Esto itaq; a b c portio qualis dicitur, & inscribatur ei triangulus a b c, eãdem habens basim toti, & altitudinem æqualem. Quoniam igitur triangulus habet basim, & altitudinem cum portione eandem, necesse est pũctum b uerticem esse portionis. Quare linea a c est æquedistans contingenti sectionem in puncto b. ducatur b e, per punctum b æquedistans ipsi a c. & à punctis a & c, ducantur a d, c e æquedistantes diametro. cadent iam ipsæ extra portionem. Quoniam igitur triangulus a b c est dimidium figuræ a d e c æquedistantium



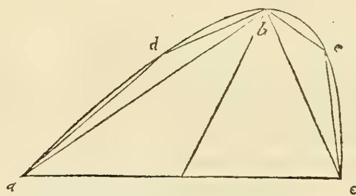
um

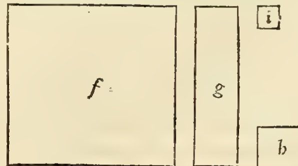
um laterum, constat ipsum plus quàm dimidium esse portionis. Hoc demonstrato manifestum est, posse figuram multorum angulorũ inscribi portioni, ita ut portiones residuæ sint quocunq; spacio dato minores. nã continuè plus dimidio ablato ex hoc constabit, quod diminuentes hoc modo tandem faciemus portiones residuas quocunq; spacio proposito minores.

SI in portione à recta, & à sectione rectanguli coni contenta, triangulus inscribatur, eandem basim cum portione, & eandem altitudinẽ habens: item in portionibus residuis alij trianguli inscribantur, eandem & basim & altitudinem cum portionibus habentes: utriusq; trianguli in residuis portionibus inscripti, octuplus est triangulus ille qui in tota portione descriptus existit. 21 Esto a b c portio qualis dicitur, & diuidatur a c puncto d, & ducatur b d diametro æquedistans. punctum ergo b erit uertex portionis, & triangulus a b c eandem basim habet cum portione, et altitudinẽ eandem. Diuidatur item in duo ęqua a d puncto e, & ducatur e f ęquedistãs diametro: diuidatur autem a b puncto h. pũctum igitur f, erit uertex portionis a f b: & triangulus a f b, eandem & basim & altitudinem cum portione a f b habebit. Ostendendum est, triangulum a b c, octuplum esse trianguli a f b. Est itaq; b d sesquitertia lineæ f e, & dupla ipsius e h. Quare e h, dupla est ipsius h f. Quare a e h triãgulus, duplus est a f h: & ideo æqualis triangulo a f b: & triangulus a b d quadruplus est triangulo a h e. igitur & trianguli a f b. Quare totus triangulus a b c, erit trianguli a f b octuplus. Similiter ostendetur octuplus esse triangulo in b g c portione descripti.



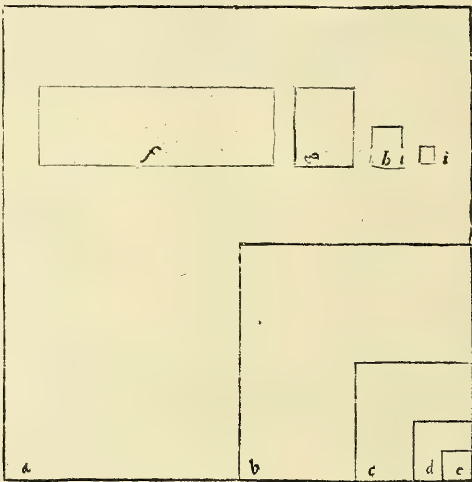
SI sit portio à recta & à sectione rectanguli coni comprehensa, & spacia quotcũque ponantur consequenter in quadrupla proportione: sit autem horum spaciorum maximum æquale triangulo, qui basim habeat, & altitudinem cum portione eandem: spacia hæc simul omnia sunt ipsa portione minora. 22 Esto itaq; portio a b e c, à recta & sectione rectanguli coni comprehensa. Sunto itẽ spacia quotcunq; numero continenter posita, f g h i: & sit præcedens quadruplũ sequentis. Esto autem eorum maximũ f, & esto f æquale triangulo habenti basim, & altitudinem cum portione eandem. Dico a d b e c portionem, spacijs f g h i, simul omnib. esse maiorem. Esto totius quidem portionis uertex b, & residuarum portionum uertices d, e. Quoniam igitur triangulus a b c, est octuplus utriusq; trianguli a b d, b e c: Constat quod utriusq; simul quadruplus existit. Et quoniam a b c triangulus æqualis est spacio f, eadem ratione & trianguli a d b, b e c sunt simul æquales spacio g. Similiter ostendetur, triangulos deinceps reliquis portionibus inscriptos, eãdem basim & altitudinem cum portionibus habẽtes, æquales esse spacio h, & triangulos portionibus deinde residuis inscriptos æquales esse spacio i. Spa



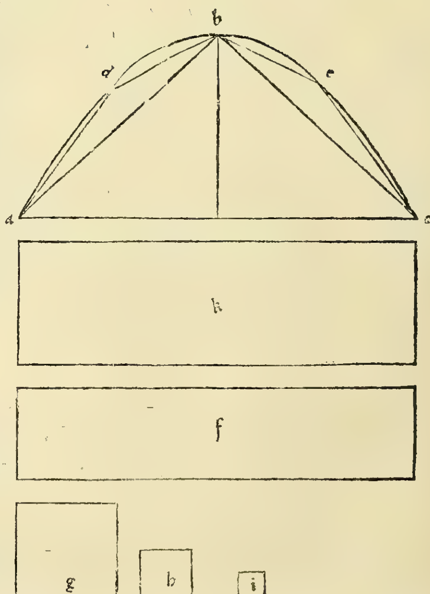


cia igitur proposita simul omnia, sunt æqualia figuræ cuidam multorum angulorum portioni inscriptæ. Quare ipsa portione constat esse minora.

23 SI magnitudines quotcunq; consequenter in proportione quadrupla disponantur, hæ magnitudines simul omnes cum tertia parte minimæ illarum, sunt sesquitertiæ magnitudini illarum maximæ. Sunto itaq; quotcunq; magnitudines continenter positæ, unaquæq; præcedens, quadrupla proximæ sequentis a b c d e: & sit earum maxima a. Sit autē f tertia pars ipsius b, et g tertia pars ipsius c, & h ipsius d, et i ipsius e. Quoniam igitur f est tertia pars ipsius b, & b quarta ipsius a, erit b f utraque simul tertia pars ipsius a. & eadem ratiõe c g, tertia ipsius b, et h d ipsius c, & i e ipsius d: & iam simul omnia b c d e f g h i, tertia pars cõpositæ ex omnibus simul a b c d e. Sunt autem f g h tertia pars ipsarum b c d. Quare & residuū b c d e i, erit residui, hoc est ipsius a tertia pars. Constat igitur ea simul omnia a b c d e, cū ipso i tertia ipsius e, esse ipsius a sesquitertia: quare, &c.



24 QVæcunq; portio contenta à linea recta, & sectione rectanguli coni, est sesquitertia trianguli illius qui basim habuerit, & altitudinem cum ipsa portione eandem. Esto itaq; portio a d b e c comprehensa à recta, & à sectione rectanguli coni: & a b c sit triangulus qui eandem basim habeat, & altitudinem cum portione eandem: ipsius uero trianguli esto k spacium sesquitertiū. Ostendendum est, ipsum k esse æquale portioni a d b e c. Nam si non, erit aut maius, aut minus eadē. Esto prius, si esse potest, portio a d b e c maior ipso k spacio: inscribam iam triangulos a d b, & b e c, uti supradictum fuit. Et



item

item in residuis portionibus inscribam alios triangulos eandem basim, & altitudinem cum portionibus eandem habentes: & similiter in residuis portionibus inscribam duos triangulos, basim & altitudinem cum portionibus eandem habentes, donec residuæ portiones sint tandem minores excessu, quo portio a d b e c excedit spacium k. Quare figura multiangula ipsi portioni inscripta, maior erit spacio k, quod esse non potest. Cum sint quædam spacia in proportione quadrupla disposita, quorum primum est triãgulus a b c, quadruplus triãgulis a d b, & b e c: deinde ipsi trianguli sunt quadrupli triangulis, qui in portionibus sequentibus sunt descripti, & reliqui identidem. Quare constat omnia simul triangulorũ spacia minus quàm sesquitertia esse triangulo a b c, maximi eorum: & positum est, k spacium esse sesquitertiũ eidẽ maximo. Non erit igitur portio a d b e c maior k spacio. Esto item si esse potest, minor eodem. Ponatur autem triangulus a b c æqualis spacio f, & sit g quarta pars ipsius f, et sit h quarta pars ipsius g: & cõtinuæ semper ponantur consequenter ita, donec ultimum sumptum sit minus excessu quo spacium k excedit portionem, & sit ipsum minus i spacium. sunt iam f g h i spacia simul cum tertia parte ipsius i, sesquitertia ipsius f. Est autem & k spacium sesquitertium ipsius f. quare spacium k erit æquale spacijs f g h i simul, cum tertia parte i. Cum igitur spacium k excedit spacia f g h i minori quantitate quàm sit i, portionem uero excedit maiori quàm sit idem i, colligitur spacia f g h i simul maiora esse portione: quod esse non potest. Ostensum namq; est, quod si sint spacia quotcunq; in quadrupla proportione consequenter posita, & maximum eorum æquale fuerit triangulo portioni inscripto, spacia illa simul omnia esse minora portione. Non est igitur a d b e c portio minor spacio k. Ostensum quoq; est, eam non posse ipso esse maiorem. Quare eidem æqualem esse necesse est. At uero spaciũ k sesquitertium existit trianguli a b c, portio igitur a d b e c, eiusdem trianguli a b c sequitertia existet.

FINIVNT ARCHIMEDIS INVENTA DE QVAdratura Parabolæ, hoc est portionis contentæ à linea recta, & sectione rectanguli coni.

ARCHIMEDIS TRACTATVS DE ARENAE NVMERO.

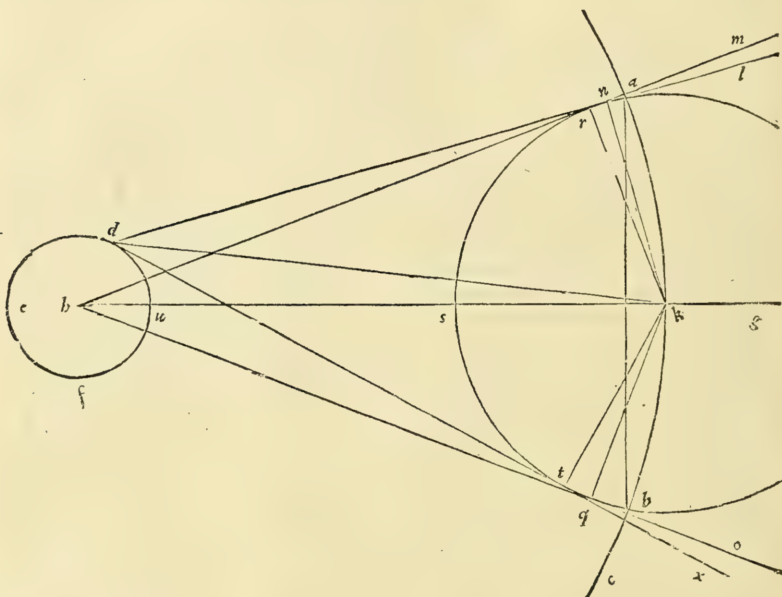


EXISTIMANT quidam, rex Gelon, arenam esse multitudine infinitam. Ego autem dico, non eam solum quæ circa Syracusas, & circa reliquã Siciliam existit, uerumetiã illam quę in uniuersa habitabili simul et inhabitabili regione ubiq; cõtinetur, certo quodam numero comprehensam esse. Nonnulli uero infinitam eam minime opinantur: nullum autem tantum excogitari posse numerũ credũt, quẽ illius multitudo nõ superet. Igitur qui hac opinione ducuntur, si eiusmodi cumulum arenæ concepissent, qualis esset si uniuersę terræ tumor repleto mari, & omnibus canalibus usque ad cuiusq; altissimi montis uerticem arena collectus haberetur, huius quoq; tanti alter præterea multiplex excogitaretur, eos minimè dubiũ est sensuros fore, huiusmodi cumuli multitudinem nullo prorsus numero posse contineri. Ego autem hoc declarare experiar demonstrationibus Geometricis, quib. te assensurũ minimè dubitarim, quod ex illis qui

à nobis expreſſi, & in his quæ ad Zeuxippũ ſcripſimus, expoſiti ſunt numeri, nõ nulli excellunt non ſolum arenę magnitudinem quæ fuerit tumori terræ ęqualis, quæ quidem terra uti diximus ubiq; repleta fuiſſet: uerum quæ toti mundo par haberetur. Non autem te fugit, quod mundus à quàm plurimis Aſtrologis appelletur ſphæra, cuius centrum eſt centrum terræ: quæ uero ex centro linea æqua eſt lineæ rectæ quæ à centro ſolis ad centrum terræ ſit ducta. Hæc itaq; quæ apud Aſtrologos conſcripta inueniuntur, refutãs & cõmutans Ariſtarchus Samius ſuppoſitionibus quibuſdam, ſcripta quædam tradidit, in quibus id perſpicitur, ex his quæ illic ſuppoſita ſunt, euenire mundum, dicto nuper mundo eſſe multiplicem. Nam apud eum ſupponitur ſtellas, quæ non errant, & ſolem immobilẽ permanere, terram uero circa ſolem ferri in circuli circumferẽtia, qui eſt in medio curſu ſitus. Sphæram uero ſtellarum fixarum circa idem centrum cum ſole ſitam eſſe: ea uero magnitudine haberi, ut circulus circa quem poſitum eſt terram ferri, eam habeat proportionem ad ſtellarum fixarum diſtãtiam, quam habet centrum ſphęræ ad circumferentiam. Hoc utiq; conſtat, eſſe non poſſe. Nam cum ſphæræ centrum nullam habeat magnitudinem, non utiq; ullam habere poſſe ad ſuperficiẽ ſphæræ proportionem, eſt opinandum. Oſtendendum eſt autem, Ariſtarchum hoc intellexiſſe & ſenſiſſe. Quoniam itaq; opinantur terram ueluti circa centrum mundi conſtitutam, quam proportionem habet terra ad mundum à nobis dictũ, eam habere ſphæram in qua circulus exiſtit, in cuius circumferentia ſupponitur, terram ferri ad ſphæram ſtellarum fixarum. Nam demonſtrationes eorum quæ apparent, id quod ſic ſuppoſitum eſt accõmodat, & maxime apparet magnitudo ſphęræ, in qua ponit terram moueri, æqualiter ſupponi ei qui à nobis dicitur mũdus. Dicimus utiq;, ſi fieret ſphera ex arena, quæ tanta eſſet quantam Ariſtarchus ſphæram ſtellarum fixarum ſupponit eſſe, etiã ſic quaſdam haberi, & oſtendi poſſe ex his quæ in principijs habentur numerorum denominationibus, quæ hanc ipſam arenam multitudine ſuperarent, quæ magnitudinem dictæ ſphæræ haberet æqualem his quæ dicam ſuppoſitis. Primum quidem ambitum terræ eſſe ueluti ter mille milia ſtadiorum, uel etiam maiorem, cum tu quoq; illis aſſentias, qui experientia oſtenderunt eum eſſe trecentorum milium ſtadiorum. Ego autem exuberans, & ponens terræ magnitudinẽ decuplã eius quam ſuperiores poſuerũt, & opinati ſunt, ambitum eius pono eſſe ter mille milia ſtadiorum. Poſt hoc, diametrum terræ maiorem eſſe diametro lunæ, & diametrum ſolis maiorem eſſe diametro terræ, ſimiliter eadem ſumens quæ plurimi ſuperiorum Aſtrologorum poſuerunt. Poſt hoc, diametrum ſolis eſſe triceſies diametrum lunæ, & magis. & à prioribus aſtrologis, ab Eudoxo quidem uti nonuplum, Phidia uero uti duodecuplum: ab Ariſtarcho, qui demõſtrare conatus eſt diametrum ſolis diametro lunæ maiorem eſſe, quàm octo et decies ipſam: minorem uero quàm uigeſies eandem. Ego autem & hunc excedens, ut ſuppoſitum cum oſtenſum fuerit ſit minime ambiguum, ſuppono diametrum lunæ ueluti trigeſies tantum quantum nunc ponitur, uel etiam maiorem. Ad hæc quoq; diametrum ſolis maiorem eſſe latere figuræ mille angulorum, inſcriptæ maximo circulo mundi. Hoc autem ſuppono, cũ Ariſtarchus dicat ſolem uideri eſſe uigeſimãſeptimam partẽ circuli zodiaci. Ipſe enim hoc modo perſcrutatus, conatus eſt inſtrumentis depræhendere angulum cui ſol aptatur, qui uerticem habeat in oculo. Simile uero non facile eſt ſumere, cum neq; uiſus, neq; manus, neq; inſtrumenta, per quæ experiri oportet, ſatis habeant fidei ad declarandum id quod certum eſt. De his autem in pręſentiarũ non expedit diſceptare: alioquin cum hæc ſæpe ſuum errorem declarent. Sufficit autem mihi ad propoſitum demonſtrandum, angulum ſumere, qui maior ſit angulo illo cui ſol accommodatur, qui uerticem habeat in uiſu. Et item alterum ſumere angulum, qui non ſit minor eo cui ſol accommodatur, quiq; uerticem habeat in eam

eam partem in quam uisus. Posita igitur longa regula super planum erectum, in loco unde sol oriri debet, & sol aspici possit, deinde cylindro per tornum facto, & longo posito super canonem erecte illico post ortum solis, deinde procedente ipso uersus horizontem & possit contra solem inspicere, uertatur canon in solem, et uisus constitutus sit in extremo regulæ, & cylindrus in medio positus solis & uisus, ita ut occultetur sol uisui, separans autem cylindrum à uisu donec incipiat ex utraq; parte cylindri solis extremū quid & minimū lymbi inspicere: cōstituatur illic cylindrus. Siquidem similiter contingit uisum ab uno puncto inspicere, & uidere ductis lineis rectis ab extremo regulæ, ubi uisus in inspiciendo fuerat constitutus quæ contingant cylindrum, angulus, compræhensus à lineis ductis maior est uno quodā ex his angulis, quibus sol accōmodatur, qui uerticem habeat in uisu propterea, quod sol utriq; ex cylindro uidet. Quoniā uero uisus nō à pūcto uidet, sed à magnitudine quadā, sumatur magnitudo quædā uolubilis non minor uisu, & hac magnitudine posita in extremo regulę ubi uisus fuerat cōstitutus, ducantur lineæ rectæ contingentes magnitudinē & cylindrū: angulus itaq; à lineis ductis cōpræhensus minor est angulo cui sol accōmodatur, qui uerticem habeat uersus uisum. Magnitudo uero quæ nō sit minor uisu, hoc modo reperitur. Duo cylinduli sumantur leues, tersi, æque crassi inter se, unus albus, alter non: & sic disponātur ad uisum, ut albus à uisu remotior sit: nō albus iuxta uisum proximus, ita ut attingat faciem. Siquidem igitur cylinduli leuissimi & tersissimi fuerint, aspectu proximus uisui ab ipso uisu præteritur, & albus conspicitur: siquidem ipsi admodum tersi, et qui iuxta est fuerit omnino leuior. sin autem non supra modū, partes quædā uidebūtur cylindruli albi, ex utraq; parte cylindruli ad uisum admoti. Sumptis deinde his ipsis cylindris, & positis, ita ut crassitudine alterius alter uisui occultetur, & ampliori loco. Tanta igitur magnitudo, quanta est crassitudo cylindrulorū hoc facientium maximè quodam modo est non minor uisu. Angulus autem non est minor angulo cui sol accommodatur, qui uerticem habet in uisu, Sic ergo sumatur, & remoto per regulam ab ipso uisu, ita ut à cylindro sol occultetur totus, & ducantur lineæ rectæ ab extremo regulæ, ubi uisus est constitutus, cōtingentes cylindrum, angulus ab ipsis ductis compræhensus non est minor angulo cui sol accommodatur, qui uerticem habet in uisu. Istis angulis sic sumptis, dimetiatur angulus rectus, & fiat puncto & aculeo, ut angulo recto in centum & sexagintaquatuor partes diuiso, unus angulus qui sit minor quàm una pars illarum: & ipse angulus minor factus sit recto angulo diuiso in ducentas partes, maior una illarum partium. Constat igitur, quod angulus cui sol accommodatur, qui uerticem habet in uisu minor est, quàm una pars recti diuisi in centum quatuor & sexaginta partes: minor autē angulo solis dicto est maior, quàm una pars anguli recti diuisi in ducentas partes. Constat item quod angulus cui sol accōmodatur, qui uerticem habet in uisu, minor est quàm una pars anguli recti diuisi in centum quatuor & sexaginta partes, maior autem quàm una pars recti diuisi in ducentas partes. Istis autem sic concessis, ex quibus sequitur solis diametrū latere figuræ maiorem esse, quæ figura mille angulis constet, atq; inscripta sit circulo qui in mundo maximus habetur. Intelligatur planum per centrum terræ eductum, & per centrum uisus minimo solis, uel ferè illico cum sol super horizontem steterit. Diuidat autem planum eductum mundum secūdum circulum a b c, terram uero secundum d e f, & solem secundum f g circulum. sit autem centrum terræ h, & solis centrum k, & centrum uisus d. Et ducantur lineæ rectæ contingentes circulū f g à puncto d, quæ sint d l, d x, & contingant in punctis n & t. & à puncto h ducantur h m, h o cōtingentes eundem in pūctis q & r. Circulum uero a b c diuidant lineæ h m, h o, in punctis a & b. Est itaq; o k maior quàm d k, cum sol ponatur super horizontem esse. Quare angulus contentus lineis d l, d x, maior exi-

ſtet angulo contento lineis h n,h o. Angulus autem contentus lineis d l,d x,maior eſt quàm ducenteſima pars anguli recti, minor uero quàm una pars anguli recti diuiſi in centum quatuor & ſexaginta partes. Huic autem angulo æqualis eſt an-



gulus cui ſol accommodatur, qui uerticem habet in uiſu. Quare angulus contentus lineis h m,h o, minor eſt quàm una pars anguli recti, diuiſi in centum quatuor & ſexaginta partes: linea uero a b recta, minor eſt quàm linea quæ ſubtẽditur uni portioni circumferentiæ circuli a b n, diuiſę in ſexcentas ſex & quinquaginta partes. ambitus uero dictæ figuræ multorum angulorum, ad ſemidiametrum circuli a b c, minorem habet proportionem, quàm quatuor & quadraginta ad ſeptem: propterea quod cuiuſcunque figuræ multorum angulorum circulo inſcriptæ, ambitus habet ad ſemidiametrum proportionem minorem, quàm quatuor & quadraginta ad ſeptem. Noſti enim à nobis demonſtratum eſſe, cuiuſcunq; circuli circumferentiam maiorem eſſe, quàm triplam ſeſquioctauam diametri: minorem uero, quàm triplam ſeſquiſeptimam eiuſdem. Minorem uero habet proportionem b h ad h k, quàm undecim ad mille centum octo & quadraginta. Quare linea b a minor eſt, quàm centeſima pars lineæ h k. Ipſi uero b a æquatur diametros circuli e g. quoniam eius dimidia u a eſt æqualis k r, cum h k ſit æqualis ipſi h a, cum ſint perpendiculares ductæ ab eiſdem angulis iunctæ. Cõſtat igitur, diametrum circuli a b c minorem eſſe quàm centeſimam partẽ lineæ h k. & e h y angulus minor eſt diametro circuli a b g, cum d e f circulus ſit minor circulo e g. Minores igitur utræq; erunt h y, k f lineæ, quàm centeſima pars lineæ h k. Quare h k ad y f minorem habet proportionem, quàm centum ad nouem & nonaginta. Et quoniam linea h k y minor eſt quàm h r, & linea f y minor linea d c: minorem igitur proportionem habebit h r ad d e, quàm centum ad nouem & nonaginta. Cũ uero h k r, d k t trianguli ſint rectanguli, latera k r, k t æqualia erũt: lineæ uero h r, d t inæquales: & angulus maior contentus lineis d t, d k, ad angulum contentum lineis

lineis h r,h k, maiorem habet proportionem, quàm h k ad d k: minorem uero, quàm h r ad d t. Si enim sint duo trianguli rectanguli, & altera duorum laterum cõtinẽtia angulum rectum sint æqualia, altera uero inęqualia, maior angulus ex his qui eruntapud latera inæqualia, ad minorem habet maiorem proportionem, quàm maior linea subtensa angulo recto ad minorem subtentũ: & habet minorẽ, quàm maior linea earum quæ circa angulos rectos sunt ad minorem. Quare angulus cõtentus lineis d l, d x, ad angulum contentum lineis h n, h m, minorẽ habet proportionem, quàm h r ad d t: quæ minorem habet proportionem, quàm centũ ad nouem & nonaginta. Quare angulus contentus d l, d x lineis, ad angulum contentũ lineis h m, h o, minorẽ proportionem habet quàm centum ad nouem & nonaginta. Et quoniam angulus contentus lineis d l, d x, est maior quàm ducentesima pars recti, erit & angulus contentus lineis h m, h o maior quàm nouem & nonaginta partes anguli recti diuisi in uigintimilia partiũ. Quare maior est quàm una pars anguli recti diuisi in ducentas partes & tertia. Igitur b a maior est, quàm subtenta uni portioni circumferentiæ circuli a b c, diuisæ in partes quadringẽtas duodecim: ipsi uero a b æqualis est solis diametros. Constat igitur, diametrum solis maiorem esse latere figuræ, quæ sit mille angulis constituta.

Istis suppositis demonstrãtur & ista, uidelicet diametrum mundi minorem esse diametro terræ, quàm decies milies. Item diametrũ mundi minorem esse, quàm decies miles decem milia centies stadiorum. Quoniam igitur suppositum est, diametrum solis minorem esse diametro lunæ, quàm tricesies, & diametrũ terræ maiorem esse diametro lunæ: constat diametrũ solis minorem esse diametro terræ, quàm tricesies. Rursus autem, quoniam ostensum est, diametrum solis maiorem esse latere figuræ quæ mille angulis constet, maximo mundi circulo inscriptæ: constat ambitum dictę mille angulorum figuræ diametrum solis minus quàm milies cõtinere. Solis autem diametros diametrum terræ minus quàm tricesies continet. Quare ambitus figuræ mille angulorum, diametrum terræ minus quàm tricesies milies continebit. Diametro uero mundi maior est quàm triplus. Nam ostensum est, diametrum cuiuscunque circuli minorem esse tertia parte ambitus cuiuscunque figuræ multorum angulorum circulo inscriptæ, quæ plus quàm sex lateribus constet: cum hexagono inscripto in circulo, diametros circuli est tertia pars ambitus ipsius hexagoni, erit ut diametros mundi diametrũ terræ contineat minus decies milies. Quod aũt diametros mundi minor sit decies milies decem milibus centies stadiorum, hinc cõstat. Quoniam enim supponitur, ambitum terræ maiorem esse quàm trecentorum decem milium stadiorum, & ambitus terræ maior est diametro quàm tripla, propterea quod cuiuscunque circuli circumferentia est plus quàm tripla diametro, constat diametrũ terræ minorem esse quàm centies decẽ milia stadiorum. Quoniam autem diametros mundi diametrum terræ minus continet, quàm decies milies: constat diametrum mundi minorem esse quàm decies decem milia centies stadiorum. Circa distantiam igitur magnitudinũ hæc suppono. Verum de arena ista ponantur. Si fuerit aliqua magnitudo ex arena composita, quę non sit papauere maior, eius arenæ numerũ nõ maiorem decem milib. esse: & diametrum papaueris esse non minorem quadragesima parte digiti. Suppono autẽ hoc cõsiderans hoc modo: posita in regula tersa & leui fuerũt papauera in eadem linea recta constituta, aptata inter se, & trigintaquinque papauera plus loci occupabant quàm digiti lõgitudo existat. Minorem itaque diametrũ papaueris ponens statuo, ut sit pars quadragesima digiti, & nõ minor: uolens etiã per hęc nõ ambiguè, indubitatissimè demonstrare propositũ. Hæc aũt sunt quæ suppono. At uero utile esse arbitror, denominationes numerorũ enumerare, ut in his qui cõpositi sunt à me in libro quẽ ad Zeuxippũ scripsi, nõ curẽt qui hic legẽt, propterea quod nil hic præter ea quæ in eo libro dicta sunt, additũ habetur. Cõtingit aũt nomina nu

merorum à nobis tradita in decẽ milib. collecta, & suprà decem milia perfectè, et satis intelligimus numerũ miliũ decem referentes eũ in reliquos superiores. Sunto itaque qui à nobis dicti sunt numeri in milies decem milia primi nominati. horum itaq; qui primi dicũtur decies milies decem milia, uocetur unitas eorum qui secundi sunt, & numerorum secundorum unitates, & unitatum decem, & centeni & milleni & decies milies erunt unitatum, quæ dicuntur decies milies decẽ milia: & itẽ decies milies decem milia secũdorum numerorũ, uocetur unitas tertiorũ numerorum, et numerentur tertiorum numerorum unitates, & unitatum deceni & centeni, & milleni, & decies milleni, erunt decies milies decem milium unitatũ dictarum. Eodem autem modo & tertiorum numerorum decies milies decẽ milia uocentur unitates quartorum numerorum: & decies milies decem milia quartorum numerorũ similiter uocent̃ unitates quintorũ numerorũ: et hoc modo procedentes numeri huiusmodi nomina habentes, erunt decies milies denorum milium decies milies decem milia. Sufficiũt quidem, & ex tantis hi numeri cognoscũtur. Licet autẽ & in plus producere. Sunto igit̃ hi qui nuper dicti sunt numeri primæ periodi uocati. Vltimus aũt numerus periodi unitas uocetur secundæ periodi primorum numerorum, & rursus decies milies decem milia secundę periodi secundorũ numerorũ: similiter et horũ ultimus unitas uocetur secũdę periodi tertiorum numerorum: & sic semper numeri procedentes nomina habeãt secũdæ periodi, erunt decies milies decem milia denorum milium decem milia decies milies. Rursus ultimus secũdæ periodi numerus decies milies decem milia uocetur unitas tertiæ periodi primorum numerorum decies milies decem milium. Et hoc modo procedentib. erũt decies milies denorũ milium decies milies dena milia decies milies decem milia. Istis hoc modo denominatis, erũt numeri ab unitate proportionales effecti. qui uero iuxta unitatẽ ad decẽ procedũt, hi octo primi cũ unitate primorũ decies milies decẽ miliũ uocatorũ erũt primi. Octo autem qui post eos sequũtur, numeri uocentur secundorũ, & alij eodẽ modo istis erunt synonymorũ uocati: & erũt distantiæ octoni decies milies denũ miliũ. Octauus enim numerus est milies dena milia, q secũdi octoni erit primus: quoniã decuplus est eius qui eũ præcedit, decies milies decẽ milia erit secundorũ numerorũ. hic aũt est unitas tertiarũ myriadũ. Constat igit̃ plures esse octoni, ut dictũ est. Cõfert aũt et hoc cognoscere, si sint numeri ab unitate proportionales, & quidã ex eadẽ proportionalitate sese multiplicauerint, q producet̃, erit ex eadẽ proportionalitate, tantũ distãs à maiore multiplicantiũ, quantũ minor multiplicantiũ ab unitate discesserit secundũ proportionalitatis rationẽ, & productus idẽ ab unitate in ordine proportionis distabit uno minus ex numero illo qui sit collectus ex duobus numeris, dictos multiplicãtes in ordine proportionis denominãtibus. Esto itaq; quotcũq; numeri ab unitate proportionales a b c d e f g h i k l: sit a unitas, & d multiplicet h, & proueniat q. Sumat̃ aũt in ea proportionalitate ex eo ordine unus, qui tãtos in ea proportione inter se & h habeat, quãti sunt inter d & unitatem, & hic sit l. Ostendendũ est, quod q est ęqualis ipsi l. Cum igit̃ sint proportionales, & totidẽ d distat ab unitate sicut l ab ipso h, eandẽ proportionẽ habet d ad unitatẽ, quã l ad ipsum h. Verũ d est multiplex unitatis secundũ seipsum d. igitur l erit multiplex ipsius h secundũ ipsum d. Quare l est æqualis ipsi q. Cõstat igit̃, productũ esse ex eius proportionalitatis ordine unũ, & à maiore multiplicantiũ tãtis distabit, quãtis minor ab unitate discedit. Constat quoq; eum in ordine proportionis tantis ab unitate distare uno minus, quãtus est numerus ex numeris ordinis multiplicãtium collectus. nã a b c d e f g h tanti sunt, quantis h distat ab unitate. sed i k l uno paucio res, quàm quibus d distat ab unitate. Cum h ergo tanti erunt.

Istis ita dispositis, quibusdã suppositis, quibusdã demõstratis, id quod propositũ est demonstrabitur. Quoniã itaq; supponitur, diametrũ papaueris nõ esse mi norem

norem quadragesima parte digiti, constat sphæram quæ diametrum digito æqualem habeat, maiorem esse regione quã occupat papauer, sexagesies quater milies. nam ipsa est secundum dictum numerum multiplex eius sphęræ, quæ habeat diametrum quadragesimam partem digiti. Nam ostẽsum est, quod sphæra habet ad sphæram proportionem diametro suæ ad diametrum alterius triplicatam. Quoniam aũt suppositũ est, numerũ arenæ ad magnitudinem papaueris nõ maiorem esse decem milibus, constat si arenæ sphæra multiplicetur ad magnitudinem sphęræ quæ diametrum digito æqualem habeat, nõ maior erit arenæ numerus quàm decies milies ipse sexagesies quater mille. Hic enim numerus est unitates sex secundorum numerorum, & primorum myriades quatuor milia. Minor est igitur, quàm decem myriades secundorũ numerorũ. Sphęra uero quæ centum digitorũ diametrũ habuerit, sphæræ quæ diametrum digitalem habuerit, multiplex est ad hæc centum myriadibus, quia habet ad aliam sphæram proportionem suæ diametri ad diametrũ illius triplicatam. Si igitur ex arena fiat sphæra, quæ habeat diametrũ centum digitorũ, cõstat quod minor erit arenæ numerus, quàm numerus ex decẽ unitatib. secũdorũ numerorũ, in centũ myriades ductis collectus. Quoniã aũt numerus decem unitatũ secundorũ numerorũ decimus est in ordine proportionis ab unitate, in decuplis quoq; centũ est proportionalis, centũ uero myriadũ numerus septimus est ab unitate in eodẽ proportionis ordine, cõstat quod factus inde sextus erit ex eodẽ proportionis ordine sextusdecimus ab unitate. Nam ostensum est, productũ uno paucioribus ab unitate distare, quàm sint illi qui ex utroq; multiplicantiũ numero collecto notatur. Ipsorũ uero sexdecim octo primi simul cũ unitate primorũ uocati sunt, reliqui uero post istos octo secundorũ, & eorũ ultimus est mille myriades secundorũ numerũ. Cõstat igitur multitudinem arenæ, quæ habeat magnitudinẽ æqualẽ sphæræ, cuius sit diametros centũ digitorũ, minorẽ esse quàm mille myriades secundorũ numerorũ. Rursus sphæra quæ diametrum decem miliũ digitorũ habuerit, multiplex est sphæræ habentis diametrum centum digitorũ myriadib. centũ. Si igitur fiat sphæra ex arena tantã habens magnitudinẽ, quantã habet sphæra cuius diametros est decem miliũ digitorũ, cõstat numerũ arenæ inde prouenientem esse minorem quàm mille myridas secundorũ numerorũ multiplicatæ in centum myriades: quoniam mille myriades secundorum numerorum est sextusdecimus ab unitate numerus in ordine proportionis, & centũ myriades est septimus ab unitate in eodem eiusdẽ proportionis ordine. Constat igitur, quod numerus inde factus erit uigesimussecundus ab unitate in eodem proportionis eiusdem ordine. Istorum uero duorũ et uigintiprimi octo cũ unitate primorũ uocati sunt: octo secũdi post illos secundorũ, reliqui uero sex tertiorum uocabuntur, & eorũ ultimus est decem myriades tertiorũ numerorũ. Constat igitur arenæ multitudinẽ habentis magnitudinẽ æqualem sphæræ, cuius diametros est decem milium digitorũ, minorẽ esse quàm decem myriades tertiorum numerorum. & quoniã sphæra, cuius diametros æqualis stadio, est minor sphæra, quæ habeat diametrum decem milium digitorũ: constat arenæ multitudinem habentis magnitudinem æqualem sphęræ cuius diametros est æqualis stadio, minorem esse quàm decem myriades tertiorũ numerorũ. Rursus sphęra quæ diametrum habet centum stadiorum, multiplex est sphæræ habentis diametrum unius stadij centum myriadibus. Si igitur fiat sphæra ex arena, quæ tantam habeat magnitudinẽ quantã habeat sphæra cuius diametros est centum stadiorum: constat eius arenæ numerum minorem esse numero qui fit multiplicatis decem myriadibus tertiorum numerorum per centũ myriadas. Et quoniam tertiorum numerorum decem myriades uigesimus secundus est ab unitate in uno proportionis ordine, centum uero myriades septimus est ex eodem eiusdem proportionis ordine: constat collectum inde numerum fore uigesimumoctauum ab unitate in eodem

eiusdem

eiuſdem proportionis ordine. Horũ aũt uigintiocto numerorum, primi octo cum unitate primorum uocati ſunt, ſecundi octo poſt illos ſecundorum, tertij octo tertiorum, & reliqui quatuor quartorum uocabuntur, & eorum ultimus eſt mille unitates quartorum numerorum. Manifeſtum eſt igitur, arenæ multitudinem, cuius magnitudo fuerit æqualis, ſphæræ habenti diametrum centum ſtadiorum, minorẽ eſſe quàm mille unitates quartorũ numerorum. Rurſus ſphæra habens diametrum decem milium ſtadiorum, multiplex eſt ſphęræ habentis diametrũ centũ ſtadiorum centum myriadibus. Si igitur fiat ex arena ſphæra, habens tantam magnitudinem, quantam habet ſphæra cuius diametros eſt decem milium ſtadiorũ, conſtat huius arenæ multitudinem fore minorem numero producto ex mille unitatibus quartorum numerorum per centum myriadas multiplicatis. Quoniam enim quartorum numerorum mille unitas eſt uigeſimusoctauus ab unitate in eodem eiuſdem proportionis ordine: conſtat productum inde numerũ fore in eodem eius proportionis ordine triceſimũquartum: horum uero quatuor & triginta numerorum primi octo cum unitate primorum uocati ſunt, ſecundi octo poſt illos ſecundorum, tertij octo tertiorum, & quarti octo quartorum, & reliqui duo erunt quintorum: quorum ultimus erit decem unitates quintorum numerorum. Conſtat igitur arenæ multitudinem habentis magnitudinem æqualem ſphæræ, cuius diametros eſt decem milium ſtadiorum, minorem fore, quàm decem unitates quintorum numerorum. Rurſus ſphæra quæ habeat diametrum centum myriadibus ſtadiorum æqualem, multiplex eſt ſphæræ habentis diametrum decẽ milium ſtadiorum. Si igitur fiat ex arena ſphæra, habens tantam magnitudinẽ, quãtam habet ſphæra cuius diametros eſt centum myriadum ſtadiorum, conſtat numerũ arenæ iſtius minorem fore eo numero, qui producitur ex decem unitatibus quintorum numerorum, per centum myriadas multiplicatis. nam quia decem unitates quintorum numerorum eſt triceſimusquartus proportionalis ab unitate, & centum myriades eſt ſeptimus ab unitate in eodem eiuſdem proportionis ordine, conſtat numerũ inde productũ, ex eodem eiuſdem proportionis fore quadrageſimum ab unitate: horum uero quadraginta primi octo cum unitate primorũ uocati ſunt, ſecundi poſt illos octo ſecundorum, tertij octo tertiorum, quarti octo quartorum, & quinti octo quintorum numerorum, & eorum ultimus eſt mille unitates quintorum numerorum. Conſtat igitur multitudinem arenæ, cuius magnitudo fuerit æqualis ſphęræ habenti diametrum centum myriadas ſtadiorum, minorẽ eſſe quàm mille unitates quintorum numerorum. Sphæra uero quæ diametrum habeat decies mille myriadas ſtadiorum, multiplex eſt ſphæræ, cuius diametros eſt centum myriades ſtadiorum centum myriadibus. Si aũt fiat ſphæra ex arena, tantam habens magnitudinem, quãtam habet ſphæra cuius diametros eſt decies mille myriades ſtadiorum, manifeſtum eſt, quod eius arenæ multitudo minor erit numero qui producetur ex mille unitatib. quintorum numerorum, multiplicatis per centum myriadas. Nam cum mille unitates quintorum numerorum ſit quadrageſimus ab unitate proportionalis, & centum myriades ſit ſeptimus ab unitate in eodem eiuſdem proportionis ordine, manifeſtũ eſt, numerũ inde productum fore quadrageſimũſextum ab unitate proportionalem: horũ ſex & quadraginta numerorum, octo primi cum unitate primorum uocati ſunt, octo ſecũdi poſt illos ſecundorũ, octo poſt ſecundos tertiorum, octo poſt tertios quartorum, octo poſt quartos quintorum, reliqui poſt quintos ſextorum ſunt uocati, & eorũ ultimus eſt decem myriades ſextorum numerorum. Conſtat igitur arenæ multitudinem, quæ magnitudinem habeat æqualem ſphæræ, diametrum habenti decem milium myriadum ſtadiorum, minorẽ eſſe ꝙ decem myriades ſextorũ numerorũ. Sphæra uero, quæ diametrũ habeat ſtadiorũ centũ myriadas myriadũ, multiplex eſt ſphæræ habenti diametrũ decẽ miliũ myriadũ ſtadiorũ centũ myriadibus. Si igi-

igitur fiat ſphæra ex arena, quæ magnitudinem habeat tantam, quantam habet ſphæra cuius diametros eſt centum myriades myriadum ſtadiorum: cõſtat huius arenæ numerum minorē fore numero producto ex decē myriadib. ſextorū numerorum, per cētum myriadas multiplicatis. Nam quoniā decē myriades ſextorum numerorum, quadrageſimusſextus eſt ab unitate proportionalis, & centū myriades ſeptimus in eodem eiuſdem proportionis ordine ab unitate, conſtat numerum inde productum fore quinquageſimumſecundum, ab unitate in eodem eiuſdem proportionis ordine. Horum aūt duorum & quinquaginta octo, primi cum unitate primorum uocati ſunt, octo ſecundi poſt primos ſecundorum, octo deinde tertij tertiorum, octo quarti quartorum, octo quinti quintorum, octo ſexti ſextorum. reliqui uero quatuor, ſeptimorum uocabuntur: quorum ultimus eſt mille unitates ſeptimorum numerorum. Conſtat igitur arenę dictæ multitudinē, quæ habeat magnitudinem æqualem ſphæræ habenti diametrum centum myriadas myriadum ſtadiorum, minorē eſſe ꝙ mille unitates ſeptimorū numerorum. Cum itaqꝫ oſtenſum ſit, diametrum mundi minorem eſſe centum myriadib. myriadum, conſtat multitudinē arenæ habentis magnitudinem æqualem mundo, minorem eſſe mille unitatibus ſeptimorum numerorum. quod quidem propoſitum fuerat. Quemadmodum autem probatum eſt, arenæ multitudinē, quæ fuerit æqualis mūdi, illi qui à plurimis Aſtrologis poſitus eſt, minorē eſſe mille unitatibus ſeptimorū numerorum: ſimiliter oſtēdetur, multitudinē arenę magnitudinē habentis æqualem ſphæræ tātæ, quantā Ariſtarchus ſupponit eſſe ſphærā ſtellarum fixarum, eſſe minorem ꝙ mille myriades octauorū numerorū. Quoniā enim ſupponit, terrā habere proportionē illā ad mūdū à nobis dictū, quā habet dictus mūdus ad ſphærā ſtellarū fixarū, quā Ariſtarchus ſupponit: & diametri ſphęrarū eādem habent inter ſe proportionē: & oſtenſum eſt diametrū mundi minorē eſſe diametro terræ, ꝙ decies milies: conſtat diametrū ſphęræ ſtellarū fixarum minorē eſſe, ꝙ decies milies diametrū mūdi. Quoniā uero ſphæræ habēt inter ſe proportionem diametrorum ſuarū triplicatā, manifeſtum eſt ſphæram ſtellarum fixarū quā Ariſtarchus ponit, minorē eſſe ꝙ decies milies decē milia mundos. Oſtēſum uero eſt multitudinē arenę, habētis magnitudinē æqualem mūdo, minorē eſſe, ꝙ mille unitates ſeptimorū numerorum. Manifeſtum eſt igit̄, quod ſi fiat ſphæra ex arena, tantā habens magnitudinē, quantā habere ponit Ariſtarchus ſphęrā ſtellarum fixarū, huius arenæ numerus minor erit eo numero qui producitur ex mille unitatib. ſeptimorum numerorū, multiplicatis per decē milia decies milies myriadas. Nam quoniam mille unitates ſeptimorum numerorū eſt quinquageſimus ſecundus ab unitate proportionalis, & decem milia decies milies myriades eſt tertiusdecimus ab unitate proportionalis in eodē eiuſdem proportionis ordine ſumptus, conſtat productum inde numerum fore ſexageſimūquartū ab unitate, proportionalem ex eodem eiuſdem proportionis ordine: iſte uero eſt octauorū octauus, & quinqꝫ myriades octauorū numerorū. Cōſtat itaqꝫ quod multitudo arenę magnitudinē habentis æqualem ſphæræ ſtellarum fixarū, quam Ariſtarchus ponit, minor eſt ꝙ mille myriades octauorū numerorū. Hæc aūt rex Gelon, ꝙ plurimis quidē qui in diſciplinis uerſati non ſunt, non admodū creditū iri arbitror: illis uero qui diſciplinis imbuti ſunt, & circa diſtātias & magnitudines terræ, & ſolis, & lunæ, totiuſqꝫ mundi ſanam inſtitutionē acceperunt, credibilia prorſus propter demonſtrationem uidebuntur. Quare nonnullos exiſtimarim ad hæc inſpicienda nullo pacto poſſe accommodari.

FINIT ARCHIMEDIS RATIO
de Arenæ dimenſione.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑ ΛΩΝΙΤΟΥ ΕΙΣ ΤΑ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ καὶ κυλίνδρου, καὶ τὰ ἄλλα, ὑπομνήματα.

EVTOCII ASCALONITAE IN ARCHIMEDIS LIBROS DE SPHAERA ET cylindro, atq; alios quosdam, Commentaria, nunc primum & Græce & Latine in lucem edita.

Cum Cæs. Maiest. gratia & priuilegio, ad quinquennium.

BASILEAE,
Ioannes Heruagius excudi fecit.
An. MDXLIIII.

MAGNIFICO DOMINO SEVERINO *BONERO A BALITZ, IN CAMIENETZ* AC OGRODZENETZ HÆREDI, CASTELLANO BYERENSI, *Burgrauio Zuppario, ac magno Procuratori Cracouienſi, &c. Domino & patrono ſuo obſeruandiſsimo, Thomas Venatorius ſeſe commendat.*



Mnes, qui ad ſummos honeſtarum artium gradus uſq; aſcendere ſtudent, ordinis cum primis rationem ut habeant, contendunt: quòd nimirũ contempta ordinis ratione, omnia paſsim confundi ſit neceſſe. Non minus autem in literarum ſtudijs, quàm in alijs rebus uniuerſis, ipſa parens rerum, ordinẽ eſſe uoluit, Natura. Vt enim à ſummo tecto domum ædificare qui cœperit, neglecta fundamenti ratione, fruſtra & oleum, quod autem, & operam inſumit: ſic qui ueræ philoſophiæ campos ſpacioſiſsimos ingreſſi, unius duntaxat agri floribus contenti, pedes ſiſtunt, nec ipſam ſegetem ac meſſem integrè legerint, aut ſaltem apis in morem deguſtauerint, doctos inter uerè quomodo recenſeri poſſint, non equidẽ uideo. Sed ad hæc gradatim, ſuſpenſisq; interim pedibus concedendum eſſe, iampridem à maioribus noſtris accepimus. Neque temere ſibi quiſquam docendi prouinciã uſurpet hac in parte, quòd periculo non caret doctor. Non rarò enim arrogantia comitatur doctorem, ſæpe etiam ſui complacẽtia, Græcis φιλαυτία uocata. Quæ duo, maxime ubi doctoris animum occuparint, ipſum ſtatim non tam periculo uanæ gloriæ, quàm ludibrio uulgi exponere conſueuerunt. Diſcipulus etſi abiectus uideatur mundo, ipſum tamẽ quia humilitas animi commẽdat Deo, ſecurè & extra periculum ambulat. Et quidem hæc omnia, ut ordinis decorum, ſiue ut Græci loquuntur, τὸ καλὸν καὶ τὸ πρέπον, à noſtris ſtudijs minime cupiam excludi, ſed potius conſtantiſsimè ſeruandam eſſe nobis moderationem illam in decoro ordinis, quæ & ipſa à Græcis ob id uocatur εὐταξία. Et recte profectò hæc ita eſſe à doctis cenſentur. In elementis enim, ubi ordinis ratio ſibi minus conſtare contigerit, ſequi uidemus in aëre fulmina, in terra commotiones, in mari inundationes: deniq; contempto ordine, experimur in urbibus & familijs ſeditiones, in corporibus ægritudines: & ut uno uerbo compræhendam multa, in animabus noſtris regnabunt peccata. Cum tanta ſit in rerum omnium natura, illa ordinis obſeruatio, in rectis ſtudijs abſoluendis cur ordinis ratio à nobis conturbaretur? Conturbaretur autẽ, ſi ſecus quàm à fundamentis ad ſumma contenderemus. Neq; enim ſacrum illum omniũ diſciplinarum circulũ abſoluerit unquã, qui minutas aliqui faſtidiẽs, ſummas tantum aſſequi conatur artes. Ad ſumma cõtemplanda, niſi per

gradus quosdam, non admittitur animus. Sensisse hoc idem Plato uidetur, cum uestibulo Scholæ suæ inscriberet, Αγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσίτω. Qua utique sententia significare uoluit, inutiles esse ad percipiendas liberales disciplinas, qui nulla Musices præsertim, & Geometriæ principia posuissent. nempe quòd hæ disciplinæ, imagines rerũ, quæ humanis saltem studijs capi possunt, oculis mundi subijcere & possint & ualeant. Ipsa certè γεωμετρία mentem nostram, suo ordine quàm longissimè tandem à rebus caducis abducit, ut iam non in terra infernè, sed cœlo potius supernè, inhærere cupiat, ac rebus ipsis delectari, quæ ut summè bona sunt, ita nullam unquam permutationem admittũt. Quid quod magna pars Sacræ scripturæ obscura nobis erit, nisi Geometrica proportione expendat ea pius lector. Templi Hierosolymitani fabrica, nonne maxima cura & diligentia traditur? quæ omnia, nisi Geometrica proportione seruata, imparati & inculti uulgi cognitionem remorentur oportet. Præter alia, quanto studio præcipit diuinus sermo, de construendis columnis? adeò ut omnia Geometrica ratione constarent, stylobastagmata, bases quoque, & spiræ: scapus deinde, ac plinthus ipsa qualis esse deberent, cum ipsis cymacijs, fascijs, scotijs, strijs, canaliculis, epistilijs, quæ omnia quàm longa & lata, quàm alta & profunda essent, per Geometricas rationes spiritus diuinus sapientissimè commonstrauit: quæ res animum hominis non tantum in admirationem, sed etiam in cognitionem Opificis rerum, inducere equidem euidentissimè queant. Claruit in hisce disciplinis apud Syracusas olim Archimedes, qui nescias an doctior, an patriæ salutis fuerit amantior. Is quia scripserat quædam, quæ acutiora cum essent, quàm ut rudes statim capere possent, Eutocius Ascalonita, homo sua tempestate ut doctus, ita ingenio fœcũdus et fuit, & habitus est ab omnibus, ut iam nõ immerito de eo dixerit quidam, εὔτοκιος ἦν ὄνομα αὐτοῦ. Verè enim est fœcũdus in omnibus illis explanãdis, in quibus obscurior alioqui uideri poterat Archimedes. Eius scripta uiri, nunquam antehac in lucẽ edita, sub tui nominis potissimũ tutela publicare placuit: cũ quòd dignus tu quidem es, cuius uirtuti hæc quoque laus accedat, ut nominis tui fama, per se profectò clarissima, accessione tanti scriptoris longè reddatur clarior: tũ quòd mei erga te, atque adeò erga familiã tuã uniuersam, synceri palàm argumẽtũ extaret amoris. Habes rationẽ huius facti mei. Soleo enim nõ infrequẽter admirari, in magnis rebus obeundis prudentiã tuam, in periculis propulsandis animi fortitudinẽ, fidem in promissis, industriã & ingenij acrimoniã in consilijs, in conficiundis autẽ negocijs celeritatẽ. Quæ cum uerè excellẽtes sint in uno homine, uirtutes, nisi à doctissimo quopiã, pro dignitate explicari nõ possunt: eas in præsentia attigisse saltẽ, mihi uisum est satis. Itaque uiue diu fœlix, æuo superante Sibyllas, annisque annosum

Nestora uince. Vale. ex Norimberga, ad Calend. Ianuarij. Anno Salutis nostræ MDXLIIII.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ, ΕΙΣ ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ ΤΩΝ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου.

Εἰς τὰ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἀρχιμήδους οὐδενὶ τῶν πρὸ ἡμῶν ἀξίαν εὑρὼν σύνταξιν καταβεβλημένην, καὶ κατανοήσας μὴ διὰ δυσμάρειαν τῶν θεωρημάτων τοῦτο παρεωραθῆναι, ἐπιστάσεως γὰρ ἀκριβοῦς, ὡς ἴστε, καὶ εὐεπιβόλου δεῖται φαντασίας, ὠρέχθην κατὰ τὴν ἐμὴν δύναμιν σαφῶς ἐκθέσθαι τὰ ἐν αὐτοῖς † θεωρήματα, προαχθεὶς μᾶλλον εἰς τοῦτο τῷ μηδένα πωδηκα θεῖναι εἰς ταύτην τὴν ὑπόθεσιν, ἢ διὰ τὴν δυσκολίαν ὀκνήσας, καὶ ἅμα τὸ σωκρατικὸν λογισάμενος, ὡς τοῦ θεοῦ συλλαμβάνοντος πάνυ εἰκὸς καὶ ἐπὶ τέλος ἡμᾶς τῆς σπουδῆς ἐλθεῖν. ἐκ τρίων δὲ διανοηθείς, ὡς εἴ τι καὶ παραμένος διὰ νεότητα φθέγξομαι τοῦτο ὑπὸ τῆς σῆς περί τε τὴν ἄλλην φιλοσοφίαν ἐπιστημονικῆς θεωρίας καὶ διαφερόντως περὶ τὰ μαθήματα ἐπανορθώσεως τεύξεται, ἀνέθηκά σοι κράτιστε φιλοσόφων ἀμμώνιε. πρέπειν δ᾽ ἂν σοι τῇ ἐμῇ σπουδῇ συνάρασθαι. καὶ εἰ μὲν ἀνεμιαῖον δόξῃ τὸ γράμμα, αὐτόθεν μηδὲ εἰς ἄλλον ἐλθεῖν συγχωρήσῃς. εἰ δὲ τοῦ σκοποῦ μὴ πάντη διαμαρτάνον, δήλωσον ἣν ἔχεις περὶ αὐτοῦ γνώμην, ὡς εἴγε τῇ ὑμετέρᾳ κρίσει βεβαιωθῇ, πειράσομαι καὶ ἄλλο τυχὸν τῶν ἀρχιμηδείων συντάξεων ἑρμηνεῦσαι. † δυσθεώρητα

ΕΙΣ ΤΟΥΣ ΟΡΟΥΣ.

Προειπὼν τὰ μέλλοντα ἐκτίθεσθαι ὑπ᾽ αὐτοῦ θεωρήματα, τὸ συνήθως πᾶσι γεωμέτραις ἐν τῇ ἐκθέσει τηρῶν, τάς τε ὀνομασίας αἷς αὐτὸς κατ᾽ ἐξουσίαν ἐχρήσατο, καὶ τοὺς ὅρους τῶν ὑποθέσεων, καὶ αὐτὰς τὰς ὑποθέσεις διὰ τῆς ἀρχῆς τοῦ συγγράμματος διασαφῆσαι βούλεται. καὶ φησὶ πρῶτον εἶναι τινὰς ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλας γραμμάς, αἳ τινὲς τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰ πέρατα αὐτῶν εὐθειῶν ἢ πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτά εἰσιν, ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα. σαφὲς δ᾽ ἂν εἴη τὸ λεγόμενον, εἰ γνωσόμεθα τίνας καλεῖ τὰς ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλας γραμμάς. ἰστέον οὖν ὅτι καμπύλας γραμμὰς καλεῖ οὐχ ἁπλῶς τὰς κυκλικάς, ἢ κωνικάς, ἢ ἄκλαστον ἐχούσας τὴν συνέχειαν, ἀλλὰ πᾶσαν ἐν ἐπιπέδῳ γραμμὴν παρὰ τὴν εὐθεῖαν, καμπύλην ὀνομάζει. μίαν δὲ γραμμὴν ἐν ἐπιπέδῳ τὴν ὁποσοῦν συναπτομένην, ὥστε κἂν ἐξ εὐθειῶν σύγκειται * τῇ α β γ δ. ἀλλ᾽ ἐπειδὴ ὡς καὶ ἀνωτέρω εἴρηται, καμπύλας γραμμὰς οὐ τὰς περιφερεῖς μόνον καλεῖ, ἀλλὰ καὶ τὰς ἐξ εὐθειῶν συγκειμένας, ἐκ δὲ τούτων ἣν ἡ ἐπιλογὴ τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλων, ἐνδεχόμενον ἂν εἴη λαβεῖν ἐπί τινος ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλης γραμμῆς δύο τυχόντα σημεῖα, ὥστε τὴν ἐπ᾽ αὐτὰ ἐπιζευγνυμένην εὐθεῖαν, ἐπὶ μηδέτερα μὲν μέρη πίπτειν τῆς γραμμῆς, ἐπ᾽ αὐτῆς ἐφαρμόζειν. διό φησιν ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλην καλεῖν γραμμήν, ἐν ᾗ αἱ διὰ δύο ὁποιωνοῦν σημείων ἀγόμεναι εὐθεῖαι, ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη πίπτουσι τῆς γραμμῆς, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ᾽ αὐτῆς. ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μέρη οὐδὲ μία. τὰ δὲ αὐτὰ ἔξεστιν ἐπινοεῖν καὶ ἐπὶ ἐπιφανειῶν.

Εἶτα ἑξῆς ὀνομάζει τομέα στερεόν, καὶ ῥόμβον στερεόν, σαφῶς ἐμφανίζων τὴν ἔννοιαν τῶν ὀνομάτων. μετὰ δὲ ταῦτα αἰτήματα τινὰ λαμβάνειν ἀξιοῖ, χρησιμεύοντα αὐτῷ εἰς τὰς ἑξῆς ἀποδείξεις, καὶ ὄντα μὲν καθ᾽ αὑτὰ τῆς αἰσθήσεως ὡμολογημένα, οὐδὲν δὲ ἧττον δυνατὰ καὶ ἀποδειχθῆναι ἔκ τε τῶν κοινῶν ἐννοιῶν, καὶ ἐκ τῶν δεδειγμένων ἐν τοῖς στοιχείοις. ἔστι δὲ πρῶτον αἰτημάτων τὸ τοιόνδε, πασῶν τῶν ταὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν. ἔστω γὰρ ἐν ἐπιπέδῳ εὐθεῖα μέν τις πεπερασμένη ἡ α β, ἑτέρα δέ τις γραμμὴ ἡ α γ β. τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσα τὰ α, β. φησὶ δὴ δεδόσθαι αὐτῷ τὴν α β ἐλάττονα εἶναι τῆς α γ β. λέγω οὖν, ὅτι τοῦτο ἀληθὲς ὀρθῶς ᾐτήσατο. εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς α γ β τυχὸν σημεῖον τὸ γ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α γ, γ β. φανερὸν δή, ὅτι αἱ α γ, γ β τῆς α β μείζους εἰσί. πάλιν δὴ εἰλήφθωσαν ἐπὶ ταῖς α γ β γραμμαῖς ἄλλα τυ

χόντα σημεῖα τὰ δ, ε. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, δγ, γε. ὁμοίως δὴ καὶ ἐνταῦθα δῆλον, ὅτι δύο μὲν αἱ αδ, δγ τῆς αγ μείζους εἰσί. δύο δὲ αἱ γε, εβ τῆς γβ. ὥστε αἱ αδ, δγ, γε, εβ πολλῷ μείζους εἰσὶ τῆς αβ. ὁμοίως δὴ κἂν ἄλλα σημεῖα λαβόντες μεταξὺ τῶν εἰλημμένων ἐπιζεύξωμεν ἐπὶ τὰ νῦν ληφθέντα, εὐθείας εὑρήσομεν αὐτὰς ἔτι μείζους τῆς αβ. καὶ τοῦτο συνεχῶς ποιοῦντες τὰς μᾶλλον συνεγγιζούσας τῇ αγβ γραμμῇ, εὐθείας ἔτι μείζους εὑρήσομεν. ὥστε ἐκ τούτου συμφανὲς εἶναι, αὐτὴν τὴν γραμμὴν μείζονα εἶναι τῆς αβ, δυνατοῦ ὄντος καὶ κατὰ πᾶν αὐτῆς σημεῖον ἐπιζεύξαντας εὐθείας λαβεῖν ἐξ εὐθειῶν συγκειμένην τὴν οἷον αὐτὴν οὖσαν γραμμήν, μείζονα δεικνυμένην διὰ τῶν αὐτῶν τῆς αβ. οὐ γὰρ ἄτοπον ἐν ταῖς τῶν ὁμολογουμένων ἀποδείξεσι καὶ τοιαύτας ἐννοίας παραλαβεῖν.

Μετὰ δὴ τοῦτο φησὶν, λαμβάνειν καὶ τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐκείνας ἀνίσους εἶναι, τὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας οὔσας, κατὰ τὸν ἀνωτέρω εἰρημένον τρόπον. οὐ μόνον δὲ ἤρκεσεν εἰς τὸ ἀνίσους εἶναι τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας εἶναι, ἀλλὰ καὶ ὅταν ἡ ἑτέρα τὴν ἑτέραν, ἢ ὅλην περιλαμβάνῃ, ἢ μέρος μὲν περιλαμβάνῃ, μέρος δὲ καὶ κοινὸν ἔχει, καὶ μείζονα εἶναι τὴν περιλαμβάνουσαν τῆς περιλαμβανομένης. νενοήσθωσαν γὰρ πρὸς τὸ καὶ τοῦτο καταδῆλον γενέσθαι, ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμαὶ αἱ αβγδεζ, καὶ αηθζ, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι τὰ αζ. καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι. καὶ ἔτι περιλαμβανομένη ὅλη ἡ αηθζ ὑπὸ τῆς αβγδεζ γραμμῆς, καὶ τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐταῖς, τῆς αζ εὐθείας. φημὶ δὴ ὅτι καὶ ἄνισοι εἰσὶν αἱ προκείμεναι γραμμαί. καὶ μείζων ἡ περιλαμβάνουσα. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βθ, γζ, δζ. ἐπεὶ οὖν ἐὰν νοηθῇ ἐπιζευγνυμένη ἡ θα, ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ αβθ, ἐντὸς συνεσταμέναι εἰσὶ αἱ αη, ηθ. καὶ ἐλάττους εἰσὶ αἱ αη, ηθ τῶν αβ, βθ. κοινὴ προσκείσθω ἡ θζ. αἱ ἄρα αη, ηθ, θζ ἐλάττους εἰσὶ τῶν αβ, βθ, θζ. ἀλλ' αἱ βθ, θζ ἐλάττους εἰσὶ τῶν βγζ. ἐντὸς γὰρ πάλιν ἐπὶ μιᾶς τοῦ βγζ συνεσταμέναι εἰσί. πολλῷ ἄρα αἱ αβ, βγ, γζ τῶν αη, ηθ, θζ. μείζους εἰσίν. ἀλλὰ τῆς γζ μείζονες αἱ γδ, δζ. τῆς δὲ δζ, αἱ δε, εζ. ἔτι πολλῷ ἄρα αἱ αβγ, δεζ μείζους εἰσὶ τῶν αηθζ.

Σαφηνείας δὲ χάριν ὑποκείσθωσαν καὶ ἕτεραι γραμμαὶ ὁμοίως ταῖς προειρημέναις, ὡς αἱ αβγδε, αζηθκε. λέγω ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ περιλαμβάνουσα. νενοήσθωσαν γὰρ ἐκβεβλημέναι αἱ αζ, ηθ, ἐπὶ τὸ λ. ἐπεὶ οὖν πάλιν δύο αἱ ζλ, λη μείζους εἰσὶ τῆς ζη, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ αζ, ηθ. αἱ ἄρα αλ, λθ μείζους εἰσὶ τῶν αζ, ηζ, ηθ. ἀλλ' αἱ αλ, λθ, ἐλάττους τῆς αβθ, πολλῷ ἄρα αἱ αβθ μείζους τῆς αζηθ.

κοινὴ

κοινὴ προσκείσθω ἡ θκ. μείζους ἄρα αἱ αβ θκ τῶν αζη θκ. ἀλλ' αἱ βθ κ ἐλάττους τῶν βγκ. πολλῷ ἄρα μείζους αἱ αβγκ τῆς αξη θκ. κοινὴ προσκείσθω ἡ κε. αἱ ἄρα αβγ κε μείζους τῆς αζηθκε. ἀλλ' αἱ γκε ἐλάττους τῶν γδε, πολλῷ ἄρα αἱ αβγδε μείζους εἰσὶ τῶν αζηθκε.

Κἂν περιφέρειαι δὲ ὦσιν, ἤτοι αἱ περιλαμβάνουσαι, ἢ αἱ περιλαμβανόμεναι, ἢ καὶ ἀμφότεραι, τὸ αὐτὸ γίνεται νοεῖν. συνεχῶν γὰρ σημείων ἐπ' αὐτῶν λαμβανομένων, καὶ οὕτω αὐτὰ ἐπιζευγνυμένων εὐθειῶν, ληφθήσονται γραμμαὶ ἐξ εὐθειῶν συγκείμεναι, ἐφ' ὧν ἁρμόσει ἡ προειρημένη ἀπόδειξις τῶν ἐξ εὐθειῶν συγκειμένων, οἷον αὐτῶν γινομένων τῶν προτεθεισῶν, διὰ τὸ καὶ πᾶσαν γραμμὴν κατὰ συνέχειαν σημείων τὴν ὕπαρξιν ἔχουσαν † νοείσθω. ὅτι δὲ εἰκότως τὴν ἀνισότητα τῶν γραμμῶν οὐ μόνον τῷ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας εἶναι ἐχαρακτήρισεν, ἀλλὰ καὶ † ἔθηκεν τὸ καὶ δεῖν περιλαμβάνεσθαι τὴν ἑτέραν ὑπὸ τῆς ἑτέρας, καὶ τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης εὐθείας. τούτου γὰρ μὴ ὄντος, οὐδὲ τὸ ἀνίσους εἶναι τὰς γραμμὰς, πάντη ἀληθὲς ὑπῆρχεν, ὡς ἔστι κατανοῆσαι ἐκ τῶν ὑποκειμένων καταγραφῶν. ἡ γὰρ αβγδ γραμμὴ, καὶ ἡ αεζδ, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι εἰσὶ, καὶ ἄδηλον ὁποτέρα αὐτῶν μείζων ἐστί. δυνατὸν γὰρ καὶ ἴσας εἶναι. δυνατὸν δὲ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλην ἑτέραν νοεῖν, καὶ τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσας ἀμφοτέρας, κατ' ἐναντίαν δὲ θέσιν ἀλλήλαις κειμένας, ὡς ὁποτέρα τῶν εἰρημένων τῇ αηθκδ. καὶ οὕτως γὰρ ἄδηλος, ἥτε ἰσότης καὶ ἀνισότης αὐτῶν. διὸ καλῶς πρόκειται, τὸ αὐτὸ δεῖν ἢ ὅλην τὴν ἑτέραν ὑπὸ τῆς ἑτέρας περιλαμβάνεσθαι, καὶ τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης εὐθείας. ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνεσθαι, τινὰ δὲ καὶ κοινὰ ἔχειν, ὡς ἐπὶ τῶν αηθκδ, καὶ αλμνξδ. ἐπὶ γὰρ τούτων τινὰ μὲν περιλαμβάνεται, τινὰ δὲ κοινά ἐστι, ὡς τὰ αλ, μν.

† νοεῖσθαι

† ἐπέθηκεν

Δεόντως δὲ πάνυ κἀκεῖνο πρὸς κρίσιν τῆς ἀνισότητος παρελήφθη, τὸ δεῖν τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχειν τὰς γραμμάς. τούτου γὰρ μὴ ὄντος, οὐδ' ἂν περιλαμβάνοιντο ὑπὸ ἀλλήλων, οὐδὲ οὕτως ἄνισοι εἰσί, ἀλλ' ἐνίοτε ἴσαι. ἢ καὶ ἡ περιλαμβανομένη μείζων. ὅπερ ἵνα σαφῶς γένηται, νενοήσθωσαν ἐν ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ αβγ, ἀμβλεῖαν τὴν πρὸς τῷ β γωνίαν περιέχουσαι, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς βγ τυχὸν σημεῖον τὸ δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, αγ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ αδ τῆς αβ, κείσθω τῇ αβ ἴση ἡ δε. καὶ τετμήσθω ἡ αε δίχα κατὰ τὸ ζ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζγ. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ αζγ τῆς αγ μείζους εἰσί, ἴση δὲ ἡ αζ τῇ ζε. καὶ αἱ εζγ ἄρα τῆς αγ μείζους εἰσί, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ αβ, δε. αἱ ἄρα δζγ τῶν βαγ μείζους εἰσίν. ὥστε μιᾶς γραμμῆς νοουμένης τῆς βαγ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλης, ἑτέρας δὲ τῆς δζγ περιλαμβανομένης ὑπὸ τῆς ἑτέρας, μὴ ἐχούσης δὲ τὰ αὐτὰ πέρατα, οὐ μόνον ὅτι οὐ μείζων ἡ περιλαμβάνουσα, ἀλλὰ καὶ ἐλάττων ἐδείχθη.

Καὶ ἐπὶ γραμμῶν δὲ ἐκ πλειόνων εὐθειῶν συγκειμένων τὸ αὐτὸ ἔστι θεωρῆσαι. νενοήσθωσαν γὰρ ἐν ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, καὶ τυχὸν σημεῖον τὸ δ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αδ. πάλιν δὴ κείσθω τῇ αβ ἴση ἡ δε. καὶ ἡ εα δίχα τετμήσθω τῷ ζ. καὶ τῇ αδ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ αη, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζη. καὶ κείσθω τῇ αη ἴση ἡ ζθ. καὶ πάλιν δίχα τετμήσθω ἡ θκ κατὰ τὸ

κ,

κ, καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ ζη ἤχθω ἡ κλ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κλ. καὶ πάλιν τῇ κλ ἴση ἡ κμ. καὶ δίχα τετμήσθω ἡ μλ τῷ ν. καὶ πάλιν πρὸς ὀρθὰς τῇ κδ ἤχθω ἡ λγ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ νγ. φανερὸν οὖν διὰ τὰ προδεδειγμένα, ὅτι μείζων ἡ μὲν δζ τῆς αβ. ἡ δὲ ζκ τῆς αη, ἡ δὲ κν τῆς κλ. ἡ δὲ νγ τῆς λγ. ὥστε καὶ ὅλη ἡ γραμμὴ ἡ δζκνγ μείζων τῆς αβηλγ. καλῶς ἄρα προσετέθη τὸ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχειν τῶν ἀνίσων. τὰ αὐτὰ δὲ δυνατὸν ἐπινοοῦντα * αἱ λαμβανόμεναι ἐπιφάνειαι τὰ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἐπιπέδοις.

ΕΙΣ ΤΟ Β ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ δὴ αγ ἑαυτῷ ἐπισυντιθέμενον ὑπερέξει τοῦ δ, δηλαδὴ ὡς τοῦ αβ, ἤτοι ἐπιμορίου ἢ τοῦ ἐπιμέρους τυγχάνοντος τοῦ δ. εἰ δὲ εἴη τὸ αβ τοῦ δ, ἤτοι πολλαπλάσιον ἢ πολλαπλασιεπιμόριον, ἢ καὶ πολλαπλασιεπιμερές, ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τοῦ αβ, ἴσου τῷ δ τοῦ βγ, τὸ λοιπὸν τὸ γα ὑπερέξει τοῦ δ. ὥστε μηκέτι πολλαπλασιάζεσθαι αὐτό, ἀλλὰ αὐτόθεν δεῖν τῷ αγ ἴσον ἀποτίθεσθαι τὸ αθ, καὶ τὴν αὐτὴν ἀπόδειξιν ἁρμόζειν. καὶ συνθέντι τὸ ζη πρὸς ζε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αβ πρὸς βγ. ὅτι γὰρ ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ, ἤπερ τρίτον πρὸς τέταρτον. καὶ συνθέντι ὁ αὐτὸς λόγος ἀκολουθεῖ. δειχθήσεται οὕτως. ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη τὰ αβ, βγ, δε, εζ. τὸ δὲ αβ πρὸς τὸ βγ μείζονα λόγον ἐχέτω, ἤπερ τὸ δε πρὸς τὸ εζ. λέγω ὅτι καὶ συνθέντι τὸ αγ πρὸς τὸ γβ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς τὸ ζε. γεγονέτω γὰρ ὡς τὸ γβ πρὸς τὸ βα, οὕτως τὸ ζε πρὸς τὸ ζθ. ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ αβ πρὸς τὸ βγ, οὕτως τὸ θζ πρὸς τὸ ζε. μείζονα δὲ λόγον ἔχει τὸ αβ πρὸς τὸ βγ, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ. καὶ τὸ ζθ ἄρα πρὸς ζε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ. μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ζθ τοῦ εδ, καὶ ὅλον τὸ θε τοῦ δζ. καὶ διὰ τοῦτο τὸ θε πρὸς εζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς ζε. ἀλλ᾽ ὡς τὸ θε πρὸς εζ, τὸ αγ πρὸς γβ. διὰ τὸ συνθέντι, καὶ τὸ αγ ἄρα πρὸς γβ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς εζ. ἀλλὰ δὴ τὸ αγ πρὸς γβ μείζονα λόγον ἐχέτω, ἤπερ τὸ δζ πρὸς ζε. λέγω ὅτι καὶ διελόντι τὸ αβ πρὸς βγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ. πάλιν γὰρ ὁμοίως ἐὰν ποιήσωμεν, ὡς τὸ βγ πρὸς γα, οὕτως τὸ ζε, καὶ τὸ θε μεῖζον τοῦ δζ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ εζ, ἔσται μεῖζον τὸ θζ τοῦ δε. καὶ διὰ τοῦτο τὸ θζ πρὸς ζε, τουτέστι τὸ αβ πρὸς βγ, διὰ τὸ διελόντι μείζονα λόγον ἕξει, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ. φανερὸν δὲ διὰ τῶν ὁμοίων, ὅτι κἂν τὸ αβ πρὸς τὸ βγ ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ, καὶ συνθέντι, καὶ πάλιν διελόντι ὁ αὐτὸς λόγος ἔσται. ἐκ δὲ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ τοῦ ἀναστρέψαντος λόγος ἐμφανής ἐστιν. ἐχέτω γὰρ τὸ αγ πρὸς βγ μείζονα λόγον, ἤπερ τὸ δζ πρὸς ζε. λέγω ὅτι καὶ ἀναστρέψαντι τὸ γα πρὸς αβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς δε. ἐπεὶ γὰρ τὸ αγ πρὸς γβ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς ζε, καὶ διελόντι τὸ αβ πρὸς βγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ,

ἀνα-

ἀνάπαλιν τὸ β γ πρὸς β α ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ζ ε πρὸς ε δ, καὶ συνθέντι τὸ γ α πρὸς α β ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δ ζ πρὸς δ ε.

ΕΙΣ ΤΟ Γ.

Καὶ ἀπὸ τοῦ κ, τῇ θ ἴση κατήχθω ἡ κ μ, δυνατὸν γὰρ τοῦτο. καὶ ἐκβληθείσης τῆς κ λ ὡς ἐπὶ τὸ χ, καὶ τεθείσης τῆς θ ἴσης τῇ κ χ. καὶ κέντρῳ τῷ κ, διαστήματι δὲ τῷ κ χ κύκλου γραφέντος ὡς τοῦ χ μ ν. ἔστι γὰρ ἡ κ μ ἴση τῇ κ χ, τουτέστι τῇ θ.

Η ἄρα ν γ πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου καὶ ἀρτιοπλεύρου πλευρά. τῆς γὰρ μιᾶς ὀρθῆς ἤδη τεταρτημορίου βεβηκυίας, καὶ τῆς τομῆς κατὰ ἀρτίαν διαίρεσιν ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γινομένης, δῆλον ὅτι καὶ ἡ τοῦ τεταρτημορίου περιφέρεια εἰς ἀρτιάκις ἀρτίους τὸν ἀριθμὸν ἴσας διαιρεθήσεται περιφερείας. ὥστε καὶ ἡ ὑποτείνουσα εὐθεῖα μίαν τῶν περιφερειῶν, πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου καὶ ἀρτιοπλεύρου πλευρά. ὥστε καὶ ἡ ο π πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου πλευρά. ἐὰν γὰρ τῇ ὑπὸ ξ κ ν γωνίᾳ ἴσην ποιήσαντες τὴν ὑπὸ π κ δ, ἀπὸ τοῦ π ἐπὶ τὸ δ ἐπιζεύξωμεν καὶ προσεκβάλωμεν ἄχρι τῆς κ θ ἴσην τῇ ὑπὸ π κ δ, ἔσται ἴση ἡ π θ τῇ π ο, ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου. ἐπεὶ γὰρ ἡ ξ κ ἴση ἐστὶ τῇ κ δ, κοινὴ δὲ ἡ κ π καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, καὶ βάσις ἄρα ἡ ξ π τῇ π δ ἴση ἐστί. καὶ ἡ ὑπὸ π ξ κ ὀρθὴ οὖσα, τῇ ὑπὸ π δ κ. ὥστε ἐφάπτεται ἡ δ π. ἐπεὶ οὖν αἱ πρὸς τὸ δ ὀρθαί εἰσιν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ π κ δ, δ κ θ ἴσαι, καὶ ἡ πρὸς ταῖς ἴσαις κοινὴ ἡ δ κ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ π δ τῇ θ δ. ἀλλ' ἡ ξ π τῇ π δ ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ θ π ἄρα τῇ π ο ἐστὶν ἴση, καὶ πάσαις ταῖς ὁμοίως ἐφαπτομέναις, ὥστε ἡ θ π πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου καὶ ἀρτιοπλεύρου πλευρὰ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου. ὅτι δὲ καὶ ὅμοιον τῷ ἐγγραφομένῳ αὐτόθεν δῆλον. ἴσης γὰρ οὔσης τῆς μὲν θ κ τῇ κ π, τῆς δὲ γ κ τῇ κ ν, παράλληλος γάρ ἐστιν ἡ ο π τῇ γ ν, διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ π θ τῇ ν κ. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ γ ν κ τῇ ὑπὸ ο π θ ἴση ἐστί. καὶ διὰ τοῦτο ὅμοιον ἐστὶ τὸ περιγεγραμμένον τῷ ἐγγεγραμμένῳ.

Η ἄρα μ κ πρὸς κ λ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ κ πρὸς κ τ. μείζονος γὰρ οὔσης τῆς πρὸς τὸ κ γωνίας τῆς ὑπὸ γ κ τ, ἐὰν τῇ ὑπὸ γ κ τ ἴσην συστησόμεθα τὴν ὑπὸ λ κ ρ τοῦ ρ μεταξὺ τῶν λ μ νοουμένου τὸ λ κ ρ τρίγωνον τῷ γ κ τ ὅμοιον ἐστίν, ὡς ἡ ρ κ πρὸς κ λ, οὕτως ἡ γ κ πρὸς κ τ, ὥστε καὶ ἡ μ κ πρὸς κ λ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ κ πρὸς κ τ.

ΕΙΣ ΤΟ ς

Διὰ δὴ τοῦτο ἔλασσον ἐστὶ τὸ περιγραφόμενον τοῦ συναμφοτέρου. ἐπεὶ γὰρ τὸ περιγραφόμενον πρὸς τὸ ἐγγραφόμενον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ συναμφότερον πρὸς τὸν κύκλον, πολλῷ ἄρα τὸ περιγραφόμενον πρὸς τὸν κύκλον. ὥστε τὸ περιγραφόμενον ἔλασσον ἐστὶ τοῦ συναμφοτέρου. καὶ κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ κύκλου, λοιπὰ τὰ περιλείμματα ἐλάσσονα ἐστὶ τοῦ β χωρίου.

ΕΙΣ ΤΟ Η.

Αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὰς α, β, γ ἐπιζευγνύμεναι κάθετοι εἰσὶν ἐπ' αὐτάς. νοείσθω γὰρ χωρεὶς ὁ κῶνος. καὶ ἔστω κορυφὴ μὲν αὐτοῦ τὸ η, κέντρον δὲ τῆς βάσεως αὐτοῦ τὸ θ. καὶ ἀπὸ τοῦ θ ἐπὶ τὸ α ἐπεζεύχθω ἡ θα. ἀπὸ δὲ τοῦ η, ἡ ηα. λέγω ὅτι ἡ ηα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν δε. ἐπεὶ γὰρ ἡ ηθ κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα, ὥστε καὶ τὸ ηθα τρίγωνον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὴν βάσιν, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῇ θα πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων ἡ δε. ἡ ἄρα δε τῷ ηθα ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ὥστε καὶ πρὸς τὴν ηα. ὁμοίως δὲ δειχθήσονται καὶ αἱ ἐπὶ τὰς γ, β ἐπιζευγνύμεναι ἀπὸ τῆς κορυφῆς κάθετοι ἔσονται ἐπὶ τὰς δζ, εζ. ἐπιστῆσαι δὲ χρή, ὅτι ἐπὶ μὲν τοῦ πρὸ τούτου καλῶς πρόκειται, τὸ δεῖν πάντως τὴν ἐγγραφομένην πυραμίδα ἰσόπλευρον ἔχειν τὴν βάσιν. οὐ καλῶς γὰρ αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὰς τῆς βάσεως πλευρὰς ἴσαι ἠδύναντο εἶναι. ἐπὶ δὲ τοῦ προκειμένου οὐ προσέθηκεν τὸ εἶναι ἰσόπλευρον τὴν βάσιν, διὰ τὸ δύνασθαι, κἂν ὁποιαδήτις ᾖ, τὸ αὐτὸ ἀκολουθεῖν.

ΕΙΣ ΤΟ Θ.

Μείζονα ἄρα ἐστὶ τὰ αβδ, βδγ τρίγωνα, τοῦ αδγ τριγώνου. ἐπεὶ γὰρ στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ δ, αἱ ὑπὸ αδβ, βδγ μείζους εἰσὶ τῆς ὑπὸ αδγ. καὶ ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἐπιζεύξωμεν, ὡς τὴν δε κάθετον γινομένην ἐπὶ τὴν αγ, ἔσται ἡ ὑπὸ αδβ μείζων τῆς ὑπὸ αδε. συνεστάτω οὖν τῇ ὑπὸ αδβ ἴση ἡ ὑπὸ αδζ. καὶ τεθείσης τῆς δζ ἴσης τῇ δγ, ἐπεζεύχθω ἡ αζ. ἐπεὶ οὖν δύο δυσὶν ἴσαι, ἀλλὰ καὶ γωνία γωνίᾳ, καὶ τὸ αβδ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ αδζ τριγώνῳ, μείζονι ὄντι τοῦ αδε. καὶ τὸ αβδ ἄρα τρίγωνον τοῦ αδε μεῖζόν ἐστιν. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ δβγ, τοῦ δεγ. δύο ἄρα τὰ αδβ, δβγ, τοῦ αδβ μείζονά ἐστιν.

ΕΙΣ ΤΟ Ι.

Ἤχθω γὰρ ἡ ηζ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, καὶ παράλληλος οὖσα τῇ αγ, δίχα τμηθείσης τῆς αβγ περιφερείας κατὰ τὸ β. ὅτι γὰρ ἡ οὕτως ἀγομένη παράλληλός ἐστι τῇ αγ, δειχθήσεται ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ θ, ἐπιζευχθεισῶν τῶν θα, θδ, θγ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ αδ τῇ δγ, καὶ κοινὴ ἡ δθ, δύο δυσὶν ἴσαι, ἀλλὰ καὶ βάσις ἡ αθ βάσει τῇ θγ, καὶ γωνία ἄρα γωνίᾳ ἐστὶν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ηβδ, βδζ γωνίαι ὀρθαί.

θαι. ἀπὸ γὰρ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπεζεύχθω ἡ θβ. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ δηβ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ δζβ ἐστὶν ἴση. καὶ διὰ τοῦτο ἡ ηδ τῇ δζ ἴση ἐστίν. ὥστε παράλληλός ἐστιν ἡ ζη τῇ αγ.

Περιγραφομένων δὴ πολυγώνων περὶ τὸ τμῆμα, ὁμοίως δίχα τεμνομένων τῶν περιλειπομένων περιφερειῶν, καὶ ἀγομένων ἐφαπτομένων, λείψομέν τινα ἀποτμήματα ἐλάσσονα τοῦ θ χωρίου. ἐπὶ μὲν τῶν ἐγγραφομένων δέδεικται ἐν τῇ στοιχειώσει, ὅτι τὰ ἐγγραφόμενα τρίγωνα εἰς τμήματα μείζονά ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τῶν καθ' ἑαυτὰ τμημάτων. καὶ διὰ τοῦτο δυνατόν ἐστι, τέμνοντας τὰς περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντας εὐθείας, καταλείπειν τινὰ ἀποτμήματα ἐλάσσονα τοῦ δοθέντος χωρίου. ἐπὶ δὲ τῆς περιγραφῆς, οὐκέτι. τοῦτο δέδεικται ἐν τῇ στοιχειώσει. ἐπεὶ οὖν ἐν τῷ προκειμένῳ τοῦτό φησι, ὃ καὶ ἔστιν αὐτὸ συλλογίσασθαι διὰ τοῦ ϛ θεωρήματος, δεικτέον ὅτι ἡ ἐφαπτομένη ἀφαιρεῖ τρίγωνον, μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ περιλείμματος, οἷον ὡς ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς, ὅτι τὸ ηδζ τρίγωνον μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ περιλείμματος τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν αδ, δγ, καὶ τῆς αβγ περιφερείας. τῶν γὰρ αὐτῶν ἐπεζευγμένων, ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ δβζ, μείζων ἐστὶν ἡ δζ τῆς βζ. ἡ δὲ ζβ τῇ ζγ ἴση. ἐφάπτεται γὰρ ἑκατέρα αὐτῶν. καὶ ἡ δζ ἄρα τῆς ζγ μείζων, ὥστε καὶ τὸ δβζ τρίγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ βζγ τριγώνου. ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσίν. πολλῷ ἄρα τοῦ βζγ περιλείμματος μεῖζόν ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ τὸ δβη τοῦ βηα μεῖζον. ὅλον ἄρα τὸ δηζ μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ αδγ περιλείμματος.

ΕΙΣ ΤΟ ΙΓ.

Νοείσθω δὴ εἰς τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον, καὶ περὶ τὸν α κύκλον περιγεγραμμένον, ὅμοιον τῷ περὶ τὸν β περιγεγραμμένῳ. ὅπως μὲν οὖν ἐστὶν εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πολύγωνον ἐγγράψαι, ὅμοιον τῷ ἑτέρῳ ἐγγεγραμμένῳ, δῆλον. εἴρηται δὲ καὶ Πάππῳ εἰς τὸ ὑπόμνημα τῶν στοιχείων, περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πολύγωνον περιγράψαι ὅμοιον τῷ περὶ ἕτερον κύκλον περιγεγραμμένῳ, οὐκ ἔτι ὁμοίως ἔχομεν εἰρημένον, ὅπερ νῦν λεκτέον. τῷ γὰρ εἰς τὸν β κύκλον ἐγγεγραμμένῳ, ὅμοιον εἰς τὸν α ἐγγεγράφθω, καὶ περὶ αὐτὸν τὸν α ὅμοιον τῷ εἰς αὐτόν, ὡς ἐν τῷ γ θεωρήματι. καὶ ἔσται ὅμοιον καὶ τῷ περὶ τὸν β περιγεγραμμένῳ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ εὐθύγραμμα τὰ περὶ τοὺς α, β κύκλους περιγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ὅνπερ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει. τὸ τοιοῦτον, ἐπὶ μὲν τῶν ἐγγεγραμμένων δέδεικται ἐν τῇ στοιχειώσει, ἐπὶ δὲ τῶν περιγεγραμμένων οὐκέτι. δειχθήσεται δὲ οὕτως. νενοήσθωσαν γὰρ χωρὶς τὰ περιγεγραμμένα καὶ ἐγγεγραμμένα εὐθύγραμμα. καὶ ἀπὸ τῶν κέντρων τῶν κύκλων ἐπεζευγμέναι αἱ κε, κμ, λθ, λν. φανερὸν δὴ ὅτι αἱ κε, λθ ἐκ τῶν κέντρων * τῶν περὶ τὰ περιγεγραμμένα πολύγωνα κύκλων. καὶ πρὸς ἀλλήλας * δυνάμει ὥστε τὰ περιγεγραμμένα πολύγωνα. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ κεμ, λθν ἡμίσειαι * τῶν ἐν τοῖς πολυγώνοις ὁμοίων ὄντων τῶν πολυγώνων, δῆλον ὅτι καὶ αὗται ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ αἱ πρὸς τοῖς μ, ν ὀρθαί. ἰσογώνια ἄρα τὰ κεμ, λθν τρίγωνα. καὶ ἔσται ὡς ἡ κε πρὸς λθ, ἡ κμ πρὸς λν. ὥστε καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν, ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ κε πρὸς τὸ ἀπὸ θλ, οὕτως τὰ περιγεγραμμένα πρὸς ἄλληλα. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κμ πρὸς τὸ ἀπὸ λν, οὕτως τὰ περιγεγραμμένα πρὸς ἄλληλα.

Τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον, τὸ περὶ τὸν β κύκλον, ὅνπερ τὸ κτδ τρίγωνον. ἐπεὶ γὰρ τὰ περὶ τοὺς α, β κύκλους εὐθύγραμμα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει, τουτέστιν ἡ τδ πρὸς η δυνάμει, τουτέστιν ἡ τδ πρὸς ρζ μήκει, τουτέστιν ὡς τὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ ζρλ, ἴσον δὲ τὸ κτδ τῷ περὶ τὸν α κύκλον περιγεγραμμένῳ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ κτδ πρὸς τὸ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον, οὕτως τὸ αὐτὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ ζρλ τρίγωνον. ἐναλλὰξ ἄρα ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ πρίσμα πρὸς τὸν κύλινδρον, ἤπερ τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν β κύκλον πολύγωνον πρὸς τὸν β κύκλον, ὅπερ ἄτοπον, ἐὰν ποιήσωμεν ὡς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πρίσματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, οὕτως τὸ ἐγγεγραμ-

μένον εἰς τὸν β κύκλον πρὸς ἄλλο τι, ἔσται πρὸς ἔλασσον τοῦ β κύκλου, πρὸς ὃ μείζονα λόγον ἔχει τὸ ἐγγεγραμμένον, ἤπερ πρὸς τὸν κύκλον. τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος, πρὸς τὴν τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνειαν, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὸν κύκλον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἔλασσον, ὅπερ ἄτοπον.

ΕΙΣ ΤΟ ΙΔ.

Η δὲ γ πρὸς τὴν δ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον. ἡ γὰρ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετος ἀγομένη ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου, πρὸς τὴν ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου κάθετον ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου. νοείσθω γὰρ χωρὶς ἡ ἐν τῷ ῥητῷ καταγραφή, καὶ εἰς τὸν α κύκλον ἐγγεγραμμένον πολύγωνον τὸ ζθκ. καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ α, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου τὴν θκ, κάθετος ἤχθω ἡ αη. φανερὸν δὴ ὅτι τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου, καὶ τῆς αη διπλάσιόν ἐστι τοῦ πολυγώνου. νενοήσθω δὴ καὶ ἡ τοῦ κώνου κορυφὴ τὸ λ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὸ η ἐπεζευγμένη ἡ λη κάθετος γίνεται, ἐπὶ τὴν θκ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ λήμματι τοῦ η θεωρήματος. ἐπεὶ οὖν ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον. ἔστι δὲ καὶ ἰσοσκελὴς ὁ κῶνος, αἱ ἀπὸ τοῦ λ ἐφ᾽ ἑκάστην τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου ἀγόμεναι κάθετοι, ἴσαι εἰσὶ τῇ λη. ἑκάστη γὰρ αὐτῶν δύναται τὸ ἀπὸ τοῦ ἄξονος καὶ τῆς ἴσης τῇ αη. διὰ δὲ τοῦτο καὶ τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς λη, διπλάσιόν ἐστι τῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος. τὸ γὰρ ὑφ᾽ ἑκάστης πλευρᾶς, καὶ τῆς ἀπὸ τῆς κορυφῆς καθέτου ἐπ᾽ αὐτὴν ἀγομένης ἴσης τῇ λη, διπλάσιόν ἐστι τοῦ καθ᾽ ἑαυτὴν τριγώνου. ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ αη πρὸς ηλ, τὸ πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος, κοινοῦ ὕψους τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου λαμβανομένου. ἀχθείσης δὴ τῆς ην παρὰ τὴν μλ, ἔσται ὡς ἡ αμ πρὸς μλ, ἡ αη πρὸς ην. ἡ δὲ αη πρὸς ην μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὴν ηλ. μείζων γὰρ ἡ λη τῆς ην. καὶ ἡ αμ ἄρα πρὸς μλ, τουτέστιν ἡ γ πρὸς τὴν δ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αη πρὸς ηλ, τουτέστιν ἤπερ τὸ πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος.

ΕΙΣ ΤΟ ΙϚ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν βα, αη, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν βδ, ζ, καὶ τῷ ὑπὸ τῆς αδ, καὶ συναμφοτέρου τῆς δζ αη, διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν δζ τῇ αη. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ δζ τῇ αη, ἔστιν ὡς ἡ βα πρὸς αη, ἡ βδ πρὸς δζ. καὶ διὰ τοῦτο τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῶν βα, δζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων τῶν βδ, αη. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν βα, δζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ βδ, δζ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν αδ, δζ. διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ β βιβλίου τῆς στοιχειώσεως. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν βδ, αη ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ βδ, δζ, καὶ τῷ ὑπὸ αδ, δζ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ δα, αη, ὅπερ ἐστὶ τὸ ὑπὸ βα, αη, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ βδ, δζ. καὶ τῷ ὑπὸ αδ, δζ. καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ αδ, αη.

ΕΙΣ ΤΟ ΚΓ.

Το δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου μετρείσθω ὑπὸ τετράδος. ὑπὸ τετράδος βούλεται μετρεῖσθαι τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου διὰ τὸ τοῦ κύκλου κινουμένου περὶ τὴν αγ διάμετρον. πάσας τὰς πλευρὰς ὑπὸ κωνικῶν φέρεσθαι ἐπιφανειῶν χρησίμου ἐσομένου αὐτῷ ἐν τοῖς ἑξῆς τοῦ τοιούτου, μὴ γὰρ ὑπὸ τετράδος μετρουμένων τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, κἂν ἀρτιόπλευρον ᾖ, οὐ πάσας δυνατὸν κατὰ κωνικῶν φέρεσθαι ἐπιφανειῶν, ὡς κατανοῆσαι ἔνεστιν ἐπὶ τῶν τοῦ ἑξαγώνου πλευρῶν. δύο γὰρ τὰς ἀπεναντίον αὐτοῦ παραλλήλους πλευρὰς κατὰ κυλινδρικῆς φέρεσθαι ἐπιφανείας συμβαίνει, ὅπερ ὡς εἴρηται οὐ χρήσιμον αὐτῷ πρὸς τὰ ἑξῆς.

ΕΙΣ ΤΟ ΚΘ.

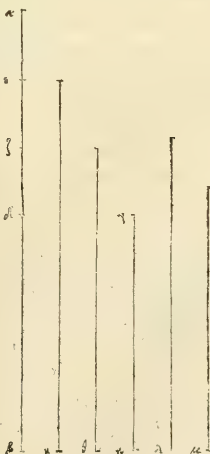
Η δὲ κθ, ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τοῦ αβγδ κύκλου. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ χ ἐπιζεύξωμεν ἐπὶ τὸ σημεῖον καθ᾽ ὃ ἐφάπτεται ἡ κξ τοῦ αβγδ κύκλου νοούμενον τὸ μ. ὁμοίως δὲ καὶ τὴν χκ, ἐπεὶ ἴση ὅτι μὲν ἡ χκ τῇ χζ. εἰσὶ δὲ καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τῷ μ. ἴση γὰρ καὶ ἡ κμ τῇ μζ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ζχ τῇ χθ ἴση. παράλληλος ἄρα ἡ χμ τῇ κθ. καὶ διὰ τοῦτο ἔσται ὡς ἡ θζ πρὸς ζχ, οὕτως ἡ κθ πρὸς χμ. διπλῆ δὲ ἡ θζ τῆς χζ. διπλῆ ἄρα καὶ ἡ κθ τῆς χμ ἐκ τοῦ κέντρου οὔσης τοῦ αβγδ κύκλου.

ΕΙΣ ΤΟ Λ.

Ἔχει δὲ καὶ ἡ διάμετρος τοῦ μ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ελ πρὸς ακ. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῶσιν αἱ ηλ, γη, ὀρθῶν γωνιῶν τῶν πρὸς τοῖς η, λ. καὶ παραλλήλου τῆς αη τῇ λε. ἰσογώνιον γὰρ τὸ ηλε τρίγωνον, τῷ γηα τριγώνῳ. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ ηλ πρὸς λε, οὕτως ἡ γη πρὸς ηα. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ηλ πρὸς λε, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ περιγεγραμμένου γωνίας, πρὸς τὴν τοῦ περὶ τὸ περιγεγραμμένον κύκλου διάμετρον. ὡς δὲ ἡ γη πρὸς ηα, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου γωνίας πρὸς τὴν τοῦ αβγδ κύκλου διάμετρον. ὡς ἄρα πᾶσαι, αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ περιγεγραμμένου γωνίας, πρὸς τὴν τοῦ περὶ αὐτὸ κύκλου διάμετρον, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου γωνίας, πρὸς τὴν τοῦ αβγδ κύκλου διάμετρον. ὡς δὲ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν, οὕτως ἡ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν. ἐπεὶ καὶ ὡς ἡ με πρὸς ελ, οὕτως ἡ μα πρὸς ακ. καὶ δι᾽ ἴσου ἄρα, ὡς πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι πρὸς τὴν ελ, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι πρὸς τὴν ακ, ἀλλ᾽ ὡς πᾶσαι πρὸς τὴν πλευρὰν τὴν ελ, οὕτως τὸ ὑπὸ πασῶν καὶ τῆς ελ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ πρὸς τὸ ἀπὸ ελ, τῆς ελ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. ὡς δὲ πᾶσαι πρὸς τὴν ακ, οὕτως τὸ ὑπὸ πασῶν καὶ τῆς ακ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ακ. κοινοῦ ὕψους πάλιν λαμβανομένης τῆς ακ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ, πρὸς τὸ ἀπὸ ελ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν, πρὸς τὸ ἀπὸ ακ. καὶ ὡς ἄρα αὐτὴ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ πρὸς τὴν ελ, οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν πρὸς τὴν ακ. ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ τοῦ κέντρου τοῦ μ, πρὸς τὴν ἐκ κέντρου τοῦ ν, οὕτως ἡ ελ πρὸς ακ. καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια, ὡς ἡ διάμετρος τοῦ μ πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ν, ἡ ελ πρὸς ακ.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΒ.

Αἱ δὲ ι, θ εἰλημμέναι, ὥστε τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχειν, τὴν η τῆς ι, καὶ τὴν ι τῆς θ, καὶ τὴν θ τῆς η. τὸ προκείμενον ἐστί, δύο δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν ἀριθμητικῇ ἀναλογίᾳ, ὅταν τὸν ἔστι τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχειν. ποιεῖται δὲ τοῦτο οὕτως, ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, γκ ἄνισοι. καὶ ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τῆς αβ ἴσης τῇ γκ, τῆς βδ, ἡ λοιπὴ ἡ αδ τετμήσθω τριχῇ κατὰ τὰ ε, ζ. καὶ τῇ μὲν εβ ἴση κείσθω ἡ η, τῇ δὲ βζ ἴση ἡ θ. ἔσονται δὴ αἱ θ, ι, η ποιοῦσαι τὸ προκείμενον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἡ αβ πρὸς τὴν γκ μείζονα ἢ τριπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ αβ πρὸς τὴν η. γεγονέτω γὰρ ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν η, οὕτως ἡ η πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν λ. καὶ ἐπεὶ ᾧ μέρει ἑαυτῆς ἡ αβ ὑπερέχει τῆς η, τούτῳ καὶ ἡ η ἑαυτῆς ὑπερέχει τῆς λ. τὸ δὲ αὐτὸ μέρος τῆς αβ μεῖζόν ἐστι τοῦ μέρους τοῦ η. μείζονι ἄρα ὑπερέχει ἡ αβ τῆς η, ἤπερ ἡ η τῆς λ. τῷ δὲ αὐτῷ ὑπερέχει ἡ αβ τῆς η, καὶ ἡ η τῆς θ. μείζονι ἄρα ὑπερέχει ἡ η τῆς θ, ἤπερ ἡ η τῆς λ, ὥστε μείζων ἡ λ τῆς θ. ἐὰν δὴ πάλιν ποιήσωμεν ὡς τὴν η πρὸς τὴν λ, οὕτως τὴν λ πρὸς μ, πολλῷ μείζων ἔσται τῆς γκ. καὶ ἐπεὶ τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ αβ, η, λ, μ, ἑξῆς ἀνάλογον εἰσὶν ἡ αβ πρὸς τὴν μ, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ αβ πρὸς η. ὥστε ἡ αβ πρὸς τὴν γκ μείζονα ἢ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν η.



ΕΙΣ ΤΟ ΛΕ.

Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ΕΘ, καὶ τῶν ΕΖ, ΓΔ, ΚΑ δέδεικται ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΕΛ, ΚΘ. ἐν γὰρ τῷ δευτέρῳ καὶ εἰκοστῷ θεωρήματι δέδεικται, ὅτι αἱ ΕΖ, ΓΔ, ΚΑ, πρὸς τὴν ΘΚ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν ἡ ΛΕ πρὸς ΕΘ. ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. τῷ δὲ ὑπὸ ΕΛ, ΚΘ ἔλασσόν ἐστι τὸ ἀπὸ ΘΑ. καὶ γὰρ τῷ ὑπὸ ΛΘ, ΘΚ, ἴσον ὄντος τῷ ἀπὸ ΘΑ. ὥς ἐστι δῆλον ἐπιζευγνυμένης τῆς ΑΛ. καὶ διὰ τὸ ὁμοίου γινομένου τοῦ ΘΑΚ τριγώνου τῷ ΘΑΛ. ἔστι γὰρ ὡς ἡ ΛΘ πρὸς ΘΑ, ἡ ΑΘ πρὸς ΘΚ. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς μέσης.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΖ.

Ἕξει δὴ καὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ ΑΒΓ κύκλῳ. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι ἐπὶ τὰ Θ, Ε, Λ, ἴσαι ἔσονται, διὰ τὸ καὶ τὰς ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυμένας εὐθείας καθέτους εἶναι ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας. καὶ αὐτὰς δὲ τὰς ἐφαπτομένας δίχα τέμνεσθαι πρὸς τῇ ἁφῇ. ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ, μείζων ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΜΖ κατὰ κωνικῆς ἐπιφανείας φέρεται καὶ κολούρου ἐπιφανείας ἠθήσεται, ᾗ ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗτος ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς τε ΖΜ, καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρου τῆς ΖΗ καὶ τῆς ΜΝ. ὁμοίως δὴ καὶ τῇ ὑπὸ τῆς ΜΑ γινομένῃ κολούρου κώνου ἐπιφανείᾳ, ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗτος ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς ΜΑ καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρου τῆς ΑΒ καὶ ΜΝ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΖΜ μείζων τῆς ΜΑ, ἡ δὲ ΖΗ τῆς ΑΒ. μείζων ἄρα καὶ ἡ μέση τῆς μέσης, ὥστε καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας. ἡ ἄρα ὑπὸ ΖΜ, ΝΗ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΜΑ, ΝΒ ἐπιφανείας.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΗ.

Ἡ ἄρα τοῦ σχήματος τοῦ ΗΖΛ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς. ἀσαφέστερον δοκεῖ συνῆχθαι τὸ εἰρημένον. λέγοις δ' ἂν σαφῶς οὕτως. ἐπειδὴ ὁ Ν κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ν δύναται τὸ ὑπὸ ΜΘ, ΖΗ, τὸ δὲ ὑπὸ ΜΘ, ΖΗ, μεῖζον τοῦ ὑπὸ ΓΔ, ΔΞ. ἡ μὲν γὰρ ΜΘ ἴση δέδεικται τῇ ΓΔ. ἡ δὲ ΖΗ μείζων τῆς ΔΞ. ὁ Ν ἄρα κύκλος μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΓΔ, ΔΞ. τὸ δὲ ὑπὸ ΓΔ, ΔΞ, ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΑ. ὁ ἄρα Ν κύκλος, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου, μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΔΑ.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΘ.

Ἀλλὰ τὰ εἰρημένα χωρία πρὸς ἄλληλα ἐστὶν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΚ πλευρᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΛ πλευρᾶς. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῇ ἡ ΔΛ, ΔΚ, παραλλήλου οὔσης τῆς ΕΚ τῇ ΑΛ, ἐστὶν ὡς ἡ ΕΚ πρὸς ΑΛ. ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΑ, ἡ ΕΖ πρὸς ΑΓ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΚ πρὸς ΑΛ, ἡ ΕΖ πρὸς ΑΓ. καὶ ἡμίσεια τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΑΓ. ὁμοίως δὴ καὶ ἐπὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας τῶν πολυγώνων δειχθήσεται, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον πρὸς ἀλλήλας, ὃν ἡ ΕΚ πρὸς ΑΛ. καὶ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα. ὡς ἄρα ἡ ΕΚ πρὸς ΑΛ, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ περιγεγραμμένου γωνίας μετὰ τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως τοῦ μείζονος τμήματος, πρὸς πάσας τὰς ἐπιζευγνυούσας μετὰ τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΛ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς ΕΚ καὶ πασῶν, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ΑΛ καὶ πασῶν. τὰ γὰρ ὅμοια εὐθύγραμμα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. καὶ τοῦ μὲν τῆς ΕΚ πρὸς ΑΛ λόγου διπλασίων ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΛ. τῶν δὲ ἐπιζευγνυουσῶν τὰς τοῦ μείζονος, πρὸς τὰς ἐπιζευγνυούσας τὰς τοῦ ἐλάσσονος, διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ὑπὸ τῆς ΕΚ, καὶ πασῶν, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ΑΛ καὶ πασῶν. ὅμοια γὰρ καὶ ταῦτα, διὰ τὸ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχειν.

Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, οὕτως ἡ ΑΛ πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ΑΛ κάθετον ἠγμένην. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζεύξωμεν εὐθεῖαν, ἔσται ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἐπ' ἀμφοτέρας τὰς ΕΚ, ΑΛ. καὶ ἔσται ὡς ἡ ΕΛ πρὸς ΔΑ, τουτέστιν ἡ ΕΚ πρὸς ΑΛ, ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ΑΛ κάθετον.

Ἐδείχθη δὲ ὡς ἡ ΕΚ πρὸς ΑΛ, οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Μ κύκλου, πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ν κύκλου. ἐπεὶ δέδεικται ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, οὕτως ὁ Μ κύκλος πρὸς τὸν Ν. τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Μ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ν.

ΕΙΣ ΤΟ Μ.

Ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων διπλάσιός ἐστι τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου. ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ πρὸ τούτου, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ἴσου τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου, πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ἴσου τῇ ἐπιφανείᾳ

ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου, οὕτως ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου. οἱ δὲ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐκ τῶν κέντρων. καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἄρα πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

ΕΙΣ ΤΟ ΜΒ.

Τὸ ἄρα περιγεγραμμένον στερεὸν πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ στερεὸς τομεὺς πρὸς τὸν θ κῶνον. εἰ γὰρ τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα ἢ τριπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ β πρὸς ζ, ἡ δὲ δ πρὸς ε μείζονα ἢ τριπλασίονα, τὸ ἄρα περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ δ πρὸς ε. ἡ δὲ δ πρὸς ε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον. καὶ τὸ περιγεγραμμένον ἄρα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον.

Εὐτοκίου Ἀσκαλωνίτου ὑπόμνημα εἰς τὸ πρῶτον τῶν Ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἐκδόσεως, παραναγνωσθείσης τῷ Μιλησίῳ μηχανικῷ Ἰσιδώρῳ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ
ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΟ Β. ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ καὶ κυλίνδρου.

Σαφῶς ἡμῖν τῶν ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ θεωρημάτων γεγραμμένων, ἀκόλουθος καὶ ἡ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐν τοῖς δευτέροις θεωρήμασι σπουδή. φησὶ δὲ πρῶτον ἐν τῷ α θεωρήματι. εἰλήφθω τοῦ δοθέντος κώνου, ἢ κυλίνδρου ἡμιόλιος κύλινδρος. τοῦτο δὲ διχῶς δυνατόν ἐστιν εἰπεῖν. ἤτοι τῆς βάσεως τῆς αὐτῆς σωζομένης ἐν ἀμφοτέροις, ἢ τοῦ ὕψους. καὶ ἵνα σαφέστερον γένηται τὸ λεγόμενον, νενοήσθω κῶνος, ἢ κύλινδρος, οὗ βάσις μὲν ὁ α κύκλος, ὕψος δὲ ἡ αγ. καὶ δέον ἔστω αὐτοῦ ἡμιόλιον κύλινδρον εὑρεῖν. ὑποκείσθω δὲ πρότερον ὁ αγ κύλινδρος, καὶ προσεκβεβλήσθω τὸ αγ ὕψος τοῦ κυλίνδρου, καὶ κείσθω τῆς αγ ἡμίσεια ἡ γδ, ἡ ἄρα αδ ἡμιόλια ἐστὶ τῆς αγ. ἐὰν δὴ νοήσωμεν κύλινδρον, βάσιν μὲν ἔχοντα τὸν α κύκλον, ὕψος δὲ τὴν αδ εὐθεῖαν, ἡμιόλιος ἔσται τοῦ προτεθέντος τοῦ αγ. οἱ γὰρ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι, πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ὕψη. Εἰ δὲ κῶνος εἴη ὁ αγ, τμηθείσης τῆς αγ δίχα ὡς κατὰ τὸ ε. ἐὰν πάλιν νοηθῇ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν α κύκλον, ὕψος δὲ τὴν αε, ἔσται ἡμιόλιος τοῦ αγ. ὁ γὰρ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν α κύκλον, ὕψος δὲ τὴν αγ εὐθεῖαν, τοῦ μὲν αγ κώνου τριπλάσιός ἐστι, τοῦ δὲ αε κυλίνδρου διπλάσιος. ὥστε δῆλον, ὅτι καὶ ὁ αε κύλινδρος ἡμιόλιός ἐστι τοῦ αγ κώνου. οὕτως μὲν οὖν τῆς αὐτῆς βάσεως σωζομένης, ἔν τε τῷ προτεθέντι, καὶ ἐν τῷ λαμβανομένῳ γενήσεται τὸ πρόβλημα. ἔνεστι δὲ καὶ τῆς βάσεως διαφόρου τυγχανούσης, τοῦ δὲ ἄξονος τοῦ αὐτοῦ μένοντος τὸ αὐτὸ ποιεῖν. ἔστω γὰρ πάλιν κῶνος ἢ κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ ζη κύκλος, ὕψος δὲ ἡ θκ εὐθεῖα. οὗ δέον ἔστω ἡμιόλιον κύλινδρον εὑρεῖν, ὕψος ἔχοντα ἴσον τῇ θκ. ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ζη διαμέτρου τοῦ κύκλου τετράγωνον τὸ ζλ, καὶ προσεκβληθείσης τῆς ζη, κείσθω αὐτῆς ἡμίσεια ἡ ημ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ζν

παραλλη

παραλληλόγραμμον. τὸ ἄρα ζν ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ ζλ, καὶ ἡ μζ τῆς ζκ. συνεστάτω δὴ τῷ ζν παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον τὸ ξπ. καὶ περὶ διάμετρον μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τὴν ξο κύκλος περιγεγράφθω. ἔσται δὴ ὁ ξο ἡμιόλιος τοῦ ζη. οἱ γὰρ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. καὶ ἐὰν πάλιν νοηθῇ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν ξο κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ θκ, ἔσται ἡμιόλιος τοῦ κυλίνδρου οὗ βάσις μὲν ὁ ζη κύκλος, ὕψος δὲ ἡ θκ. εἰ δὲ κῶνος εἴη, ὁμοίως τὰ αὐτὰ ποιήσαντες, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ζν παραλληλογράμμου ἴσον συστησάμενοι τετράγωνον, ὡς τὸ ξπ. καὶ περὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ τὴν ξο κύκλον γράψαντες, νοήσωμεν ἀπ' αὐτοῦ κύλινδρον ὕψος ἔχοντα τὴν θκ. ἕξομεν αὐτὸν ἡμιόλιον τοῦ προτεθέντος κώνου. ἐπεὶ γὰρ τὸ ζν παραλληλόγραμμον τοῦ ξπ τετραγώνου τριπλάσιον, τοῦ δὲ ζλ ἡμιόλιον, τὸ ζλ τοῦ ξπ ἔσται διπλάσιον. καὶ διὰ τοῦτο καὶ ὁ κύκλος τοῦ κύκλου διπλάσιος, καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κυλίνδρου. ἀλλ' ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὴν ζη κύκλον, ὕψος δὲ τὴν θκ, τριπλάσιός ἐστι τοῦ περὶ τὴν αὐτὴν βάσιν, καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ κώνου. ὥστε καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν ξο κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ θκ, ἡμιόλιός ἐστι τοῦ προκειμένου κώνου. εἰ δέοι μήτε τὸν ἄξονα τὸν αὐτὸν εἶναι, μήτε τὴν βάσιν, γενήσεται τὸ πρόβλημα πάλιν διχῶς. ἢ γὰρ τὴν βάσιν ἕξει ἴσην τῇ δοθείσῃ, ἢ τὸν ἄξονα ὁ ποριζόμενος κύλινδρος. ἔστω γὰρ πρότερον ἡ βάσις δεδομένη, ὡς ὁ ξο κύκλος. καὶ δέον ἔστω κύλινδρον εὑρεῖν ἡμιόλιον τοῦ δοθέντος κώνου, ἢ κυλίνδρου ἀπὸ βάσεως τῆς ξο, εἰλήφθω ὡς προείρηται τοῦ δοθέντος κώνου, ἢ κυλίνδρου ἡμιόλιος κύλινδρος, βάσιν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ προτεθέντι ὁ φυ. καὶ γεγονέτω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ξο, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τυ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ φυ πρὸς τὴν ρσ. ἔσται ἄρα ὁ κύλινδρος ὁ ἀπὸ τῆς ξο, βάσεως ὕψος ἔχων τὴν ρσ, ἴσος τῷ φυ. ἀντιπεπόνθασι γὰρ αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπίταγμα. εἰ δὲ μὴ ἡ βάσις ἡ δεδομένη, ἀλλὰ ὁ ἄξων τῷ αὐτῷ λόγῳ ποριθέντος τοῦ φυ, γενήσεται τὰ τῆς προτάσεως.

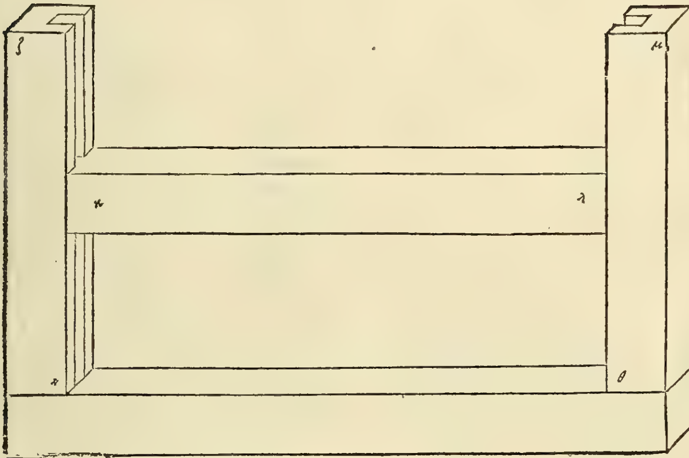
ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Α.

Τούτου ληφθέντος, ἐπεὶ δι' ἀναλύσεως αὐτοῦ προέβη τὰ τοῦ προβλήματος, ληξάσης τῆς ἀναλύσεως εἰς τὸ δεῖν δύο δοθεισῶν δύο μέσας ἀνάλογον προσευρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, φησὶν ἐν τῇ συνθέσει εὑρήσθωσαν. τὴν δὲ εὕρεσιν τούτων ἐπ' αὐτοῦ μὲν γεγραμμένην, οὐδὲ ὅλως εὑρίσκομεν. πολλῶν δὲ κλεινῶν ἀνδρῶν γραφαῖς ἐντετυχήκαμεν, τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐπαγγελλομέναις, ὧν τὴν Εὐδόξου τοῦ Κνιδίου παρῃτησάμεθα γράφειν. ἐπειδή φησι μὲν ἐν προοιμίοις διὰ καμπύλων γραμμῶν αὐτὴν ηὑρηκέναι. ἐν δὲ τῇ ἀποδείξει πρὸς τὸ μὴ κεχρῆσθαι καμπύλαις γραμμαῖς, ἀλλὰ καὶ διῃρημένην ἀναλογίαν εὑρὼν, ὡς συνεχεῖ χρῆται, ὅπερ ἦν ἄτοπον ὑπονοῆσαι. τί λέγω περὶ Εὐδόξου,

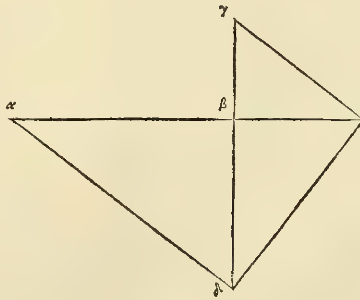
λόξου, ἀλλὰ περὶ τῶν καὶ μετρίως περὶ γεωμετρίαν ἀνεστραμμένων. ἵνα δὲ ἡ τῶν εἰς ἡμᾶς ἐληλυθότων ἀνδρῶν ἔννοια ἐμφανὴς γένηται, ὁ ἑκάστου τῆς εὑρέσεως τρόπος καὶ ἐνταῦθα γραφήσεται.

ΩΣ ΠΛΑΤΩΝ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις. ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὰ δ, ε, καὶ κατεσκευάσθω ὀρθὴ γωνία ἡ ὑπὸ ζηθ. καὶ ἐν ἑνὶ σκέλει οἷον τῷ ζη, κινείσθω κανὼν ὁ κλ ἐν σωλῆνί τινι ὄντι ἐν τῷ ζη, οὕτως ὥστε παράλληλον αὐτὸν διαμένειν τῷ ηθ. ἔσται δὲ τοῦτο, ἐὰν καὶ ἕτερον κανόνιον νοηθῇ συμφυὲς τῷ θη, παράλληλον δὲ τῷ ζη, ὡς τὸ θμ. σωληνισθεισῶν γὰρ τῶν ἄνωθεν ἐπιφανειῶν τῶν ζη, θμ σωλῆσι πελεκινοειδέσι, καὶ τύλων συμφυῶν γενομένων τῷ κλ, εἰς τοὺς εἰρημένους σωλῆνας, ἔσται ἡ κίνησις τοῦ κλ παράλληλος ἀεὶ τῷ ηθ. τούτων οὖν κατεσκευασμένων, κείσθω τὸ ἓν σκέλος τῆς γωνίας



τυχὸν τὸ ηθ, ψαῦον τοῦ γ, καὶ μεταφερέσθω ἥ τε γωνία καὶ ὁ κλ κανὼν ἐπὶ τοσοῦτον, ἄχρις ἂν οὗ τὸ μὲν η σημεῖον ἐπὶ τῆς βδ εὐθείας ᾖ, τοῦ ηθ σκέλους ψαύοντος τοῦ γ. ὁ δὲ κλ κανὼν κατὰ μὲν τὸ κ ψαύῃ τῆς βε εὐθείας, κατὰ δὲ τὸ λοιπὸν μέρος τοῦ α. ὥστε εἶναι ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς καταγραφῆς, τὴν μὲν ὀρθὴν γωνίαν θέσιν ἔχουσαν, ὡς τὴν ὑπὸ γδε. τὸν δὲ κλ κανόνα θέσιν ἔχειν, οἵαν ἔχει ἡ εα. τούτων γὰρ γενομένων ἔσται τὸ προκείμενον. ὀρθῶν γὰρ οὐσῶν τῶν πρὸς τοῖς δ, ε, ἔστιν ὡς ἡ γβ πρὸς βδ, ἡ δβ πρὸς βε, καὶ ἡ εβ πρὸς βα.



ΩΣ ΗΡΩΝ ΕΝ ΜΗΧΑΝΙΚΑΙΣ ΕΙΣΑΓΩΓΑΙΣ, καὶ ἐν τοῖς βελοποιικοῖς.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. κείσθωσαν ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν πρὸς τῷ β, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ βδ παραλλη-

λληλόγραμμον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, βδ. φανερὸν δή, ὅτι ἴσαι οὖσαι δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας. ὁ γὰρ περὶ μίαν αὐτῶν γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν περάτων τῆς ἑτέρας, διὰ τὸ ὀρθογώνιον εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ δγ, δα ἐπὶ τὰ ζ, η, καὶ νοείσθω κανόνιον ὡς τὸ ζβη, κινούμενον περί τινα τύλον, μένοντα πρὸς τῷ β, καὶ κινείσθω ἕως ἀποτέμνοι ἴσας τὰς ἀπὸ τοῦ ε, τουτέστι τὰς εη, εζ. καὶ νοείσθω ἀποτεμνόν, καὶ θέσιν ἔχον τὴν ζβη, ἴσων ὡς εἴρηται γινομένων τῶν εη, εζ. ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν γδ κάθετος ἡ εθ, δίχα δὴ τέμνει δῆλον ὅτι τὴν γδ. ἐπεὶ οὖν δίχα τέμνεται ἡ γδ κατὰ τὸ θ, καὶ πρόσκειται ἡ γζ, τὸ ὑπὸ δζγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γθ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ θζ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ εθ. τὸ ἄρα ὑπὸ δζγ μετὰ τῶν ἀπὸ γθ, θε, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ζθ, θε. καὶ ἔστι τοῖς μὲν ἀπὸ γθ, θε, ἴσον τὸ ἀπὸ γε. τοῖς δὲ ἀπὸ ζθ, θε, ἴσον τὸ ἀπὸ εζ. τὸ ἄρα ὑπὸ δζγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γε, ἴσον τῷ ἀπὸ εζ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ δηα μετὰ τοῦ ἀπὸ αε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εη. καί ἐστιν ἴση ἡ μὲν αε τῇ εγ, ἡ δὲ ηε τῇ εζ. καὶ τὸ ὑπὸ δζγ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ δηα. ἐὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσι. ἔστιν ἄρα ὡς ζδ πρὸς δη, οὕτως ἡ αη πρὸς γζ. ἀλλ' ὡς ἡ ζδ πρὸς δη, οὕτως ἡ ζγ πρὸς γβ, καὶ ἡ βα πρὸς αη. τριγώνου γὰρ τοῦ ζδη παρὰ μίαν μὲν τὴν δη, ἦκται ἡ γβ. παρὰ δὲ τὴν δζ ἡ αβ. ὡς ἄρα ἡ βα πρὸς αη, οὕτως ἡ αη πρὸς γζ, καὶ ἡ γζ πρὸς γβ. τῶν ἄρα αβ, βγ, μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ αη, γζ. ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

ΩΣ ΦΙΛΩΝ Ο ΒΥΖΑΝΤΙΟΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν, κείσθωσαν, ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν πρὸς τῷ β. καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς αγ, γεγράφθω περὶ αὐτὴν ἡμικύκλιον τὸ αβεγ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν, τῇ μὲν βα, ἡ αδ. τῇ δὲ βγ ἡ γζ. καὶ παρακείσθω κανὼν κινούμενος πρὸς τὸ β, τέμνων τὰς αδ, γζ. καὶ κεκινήσθω περὶ τὸ β, ἄχρις ἂν ἡ ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὸ δ ἴση γένηται τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὸ ζ, τουτέστι τῇ μεταξὺ τῆς τε περιφερείας τοῦ κύκλου καὶ τῆς γζ. νενοήσθω οὖν ἔχον τὸ κανόνιον θέσιν, οἵαν ἔχει ἡ δβεζ, ἴσης οὔσης ὡς εἴρηται τῆς δβ τῇ εζ. λέγω ὅτι αἱ αδ, γζ μέσαι ἀνάλογόν εἰσι τῶν αβ, βγ. νενοήσθωσαν γὰρ ἐκβεβλημέναι αἱ δα, ζγ, καὶ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ θ. φανερὸν δὴ ὅτι παραλλήλων οὐσῶν τῶν βα, ζθ, ἡ πρὸς τῷ θ γωνία ὀρθή ἐστι. καὶ ὁ αεγ κύκλος ἀναπληρούμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ θ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ δβ τῇ εζ, καὶ τὸ ὑπὸ εδβ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ βζε. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ εδβ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θδα. ἑκάτερον γὰρ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ τοῦ δ. τὸ δὲ ὑπὸ βζε ἴσον τῷ ὑπὸ θζγ. ἑκάτερον γὰρ ὁμοίως ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ τοῦ ζ. ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ θδα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θζγ. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ δθ πρὸς θζ, οὕτως ἡ γζ πρὸς δα. ἀλλ' ὡς ἡ θδ πρὸς θζ, οὕτως ἥ τε βγ πρὸς γζ, καὶ ἡ δα πρὸς αβ. τριγώνου γὰρ τοῦ δθζ, παρὰ μὲν τὴν δθ, ἦκται ἡ βγ, παρὰ δὲ τὴν θζ ἡ βα. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βγ πρὸς ζγ, ἡ γζ πρὸς δα, ἡ δα πρὸς αβ, ὅπερ προέκειτο δεῖξαι.

ἰστέον δὲ, ὅτι ἡ τοιαύτη κατασκευὴ σχεδὸν ἡ αὐτή ἐστι τῇ ὑπὸ Ἥρωνος κατασκευῆς, καὶ αἱ περισκεβαλλόμεναι πλευραὶ αἱ θα, θγ. καὶ ὁ περὶ τῷ β κινούμενος κανών. ταύτῃ δὲ μόνον διαφέρει, ὅτι ἐκεῖ μὲν μέχρι τοσούτου ἐκινοῦμεν περὶ τὸ β τὸν κανόνα, ἄχρις ἂν αἱ ἀπὸ τῆς διχοτομίας τῆς αγ, τουτέστι τοῦ κ ἴσαι ὑπ' αὐτοῦ ἀποτέμνονται πρὸς ταῖς θδ, θζ προσπιπτούσαις, ὡς αἱ κδ, κζ, ἐνταῦθα δὲ ἄχρις ἂν ἡ δβ ἴση γένηται τῇ εζ. ἐφ' ἑκατέρας δὲ κατασκευῆς τὸ αὐτὸ ἀκολουθεῖ. τὸ δὲ νῦν εἰρημένον πρὸς χρῆσιν εὐθετώτερον. τὰς γὰρ δβ, εζ ἴσας τηρεῖν ἐνδέχεται διῃρημένου τοῦ δζ κανόνος εἰς ἴσα καὶ συνεχῆ. πολὺ γὰρ εὐκολώτερον τοῦ καρκίνῳ διαπειράζειν τὰς ἀπὸ τοῦ κ ἴσας πρὸς τὰ δ, ζ.

ΩΣ ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν αἱ αβ, αγ, ὀρθὴν περιέχουσαι γωνίαν τὴν πρὸς τῷ α, κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ αγ, κύκλου περιφέρεια γεγράφθω ἡ κθλ. καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ γ, καὶ διαστήματι τῷ αβ κύκλου περιφέρεια γεγράφθω ἡ μθν. καὶ τεμνέτω τὴν κθλ κατὰ τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θα, θβ, θγ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ αγ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ θα. τετμήσθω δίχα ἡ θα τῷ ξ, καὶ κέντρῳ τῷ ξ γεγράφθω κύκλος τέμνων τὰς αβ, αγ ἐκβληθείσας κατὰ τὰ δ, ε. ὥστε μέντοι τὰ δ, ε ἐπ' εὐθείας εἶναι τῷ θ, ὅπερ ἂν γένοιτο κανονίου κινουμένου περὶ τὸ θ, τέμνοντος τὰς αδ, αε. καὶ παραγομένου ἐπὶ τοσοῦτον ἄχρις ἂν αἱ ἀπὸ τοῦ ξ ἐπὶ τὰ δ, ε ἴσαι γένωνται. τούτου γὰρ γενομένου ἔσται τὸ ζητούμενον. ἡ γὰρ αὐτὴ κατασκευὴ ἐστὶ τῇ τε ὑπὸ Ἥρωνος καὶ Φίλωνος γεγραμμένῃ. καὶ δῆλον ὅτι καὶ ἡ ἀπόδειξις ἡ αὐτὴ ἁρμόσει.

ΩΣ ΔΙΟΚΛΗΣ ΕΝ ΤΩ ΠΕΡΙ ΠΥΡΙΩΝ.

Ἐν κύκλῳ ἤχθωσαν δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς αἱ αβ, γδ, καὶ δύο περιφέρειαι ἴσαι ἀπειλήφθωσαν ἐφ' ἑκάτερα τοῦ β αἱ εβ, βζ. καὶ διὰ τοῦ ζ παράλληλος τῇ αβ, ἤχθω ἡ ζη. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δε. λέγω ὅτι τῶν γη, ηθ δύο μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ζη, ηδ. ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ ε τῇ αβ παράλληλος ἡ εκ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν εκ τῇ ζη, ἡ δὲ κγ τῇ ηδ. ἔσται γὰρ τοῦτο δῆλον ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὰ ε, ζ ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν. ἴσαι γὰρ γίνονται αἱ ὑπὸ γλε, ζλδ. καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς κ, η. καὶ πάντα ἄρα πᾶσιν διὰ τὴν λε τῇ λζ ἴσην εἶναι, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ γκ τῇ ηδ, ἴση ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ δκ πρὸς κε, ἡ δη πρὸς ηθ, ἀλλ' ὡς ἡ δκ πρὸς κε, ἡ εκ πρὸς κγ. μέση γὰρ ἀνάλογον ἡ εκ τῶν δκ, κγ. ὡς ἄρα ἡ δκ πρὸς κε, καὶ ἡ εκ πρὸς κγ, οὕτως ἡ δη πρὸς ηθ. καὶ ἐστὶν ἴση ἡ μὲν δκ τῇ γη, ἡ δὲ κε τῇ ζη. ἡ δὲ κγ τῇ ηδ. ὡς ἄρα ἡ γη πρὸς ηζ, ἡ ζη πρὸς ηδ, καὶ ἡ δη πρὸς ηθ. ἐὰν δὴ παρ' ἑκάτερα τοῦ β ληφθῶσι περιφέρειαι ἴσαι μβ, βν. καὶ διὰ μὲν τοῦ ν παράλληλος ἀχθῇ τῇ αβ ἡ νξ. ἐπιζευχθῇ δὲ ἡ δμ. ἔσονται πάλιν τῶν γξ, ξο μέσαι ἀνάλογον αἱ νξ, ξδ. πλειόνων οὖν οὕτως καὶ συνεχῶν παραλλήλων ἐκβληθεισῶν μεταξὺ

ξὺ τῶν β, δ. καὶ ταῖς ἀπολαμβανομέναις ὑπ' αὐτῶν περιφερείαις πρὸς τῷ β, ἴσων τεθεισῶν ἀπὸ τοῦ β ὡς ἐπὶ τὸ γ, καὶ ἐπὶ τεταγμένα σημεῖα ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν ἀπὸ τοῦ δ, ὡς τῶν ὁμοίως ταῖς δε, δμ, τμηθήσονται αἱ παράλληλοι αἱ μεταξὺ τῶν β, δ κατά τινα σημεῖα, ὡς ἐπὶ τῆς προκειμένης καταγραφῆς τὰ ο, θ. ἐφ' ἃ κανόνος παραθέσει ἐπιζεύξαντες εὐθείας, ἕξομεν καταγεγραμμένην ἐν τῷ κύκλῳ τινὰ γραμμήν. ἐφ' ἧς ἐὰν ληφθῇ τυχὸν σημεῖον, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλος ἀχθῇ τῇ λβ. καὶ ἡ ἀχθεῖσα, καὶ ἡ ἀπολαμβανομένη ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῷ δ. μέσαι ἀνάλογον ἔσονται τῆς τε ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῷ γ σημείῳ, καὶ τοῦ μέρους αὐτῆς τοῦ ἀπὸ τοῦ ἐν τῇ γραμμῇ σημείου ἐπὶ τὴν γδ διάμετρον.

Τούτων προκατεσκευασμένων, ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν, αἱ α, β. καὶ ἔστω κύκλος ἐν ᾧ δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ γδ, εζ. καὶ γεγράφθω ἐν αὐτῷ ἡ διὰ τῶν συνεχῶν σημείων γραμμή, ὡς προείρηται, ἡ δθζ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, ἡ γη πρὸς ηκ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γκ, καὶ ἐκβληθεῖσα τεμνέτω τὴν γραμμὴν κατὰ τὸ θ, καὶ διὰ τοῦ θ τῇ εζ παράλληλος ἤχθω ἡ λμ. διὰ ἄρα τὰ προγεγραμμένα τῶν γλ, λθ μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ μλ, λδ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ γλ πρὸς λθ, οὕτως ἡ γη πρὸς ηκ. ὡς δὲ ἡ γη πρὸς ηκ, οὕτως ἡ α πρὸς τὴν β. ἐὰν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ταῖς γλ, λμ, λδ, λθ παρεμβάλωμεν μέσας τῶν α, β ὡς τὰς ν, ξ, ἔσονται εἰλημμέναι τῶν α, β μέσαι ἀνάλογον αἱ ν, ξ. ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

ΩΣ ΠΑΠΠΟΣ ΕΝ ΜΗΧΑΝΙΚΑΙΣ ΕΙΣΑΓΩΓΑΙΣ.

Προέθετο μὲν ὁ Πάππος κύβον εὑρεῖν πρὸς τὸν δοθέντα κύβον, λόγον ἔχοντα δεδομένον. καὶ ὡς πρὸς τὴν τοιαύτην πρότασιν καὶ τὰ ἀπὸ τῆς ἀποδείξεως αὐτῷ προέρχεται. δῆλον δὲ ὅτι τούτου εὑρισκομένου, καὶ τὸ προκείμενον εὑρίσκεται. δύο γὰρ δοθεισῶν εὐθειῶν, ἐὰν ὀφειλουσῶν μέσων εὑρεθῆναι, ἡ δευτέρα εὑρεθῇ, καὶ ἡ τρίτη αὐτόθεν δοθήσεται. γεγράφθω γάρ, ὥς φησιν αὐτὸς κατὰ λέξιν, ἡμικύκλιον τὸ αβγ. καὶ ἀπὸ τοῦ δ κέντρου πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ δβ, καὶ κινείσθω κανόνιον περὶ τὸ α σημεῖον, ὥστε τὸ μὲν ἓν πέρας αὐτοῦ περικεῖσθαι τυλίῳ τινὶ κατὰ τὸ α σημεῖον. τὸ δὲ λοιπὸν μέρος ὡς περὶ κέντρον τὸ τυλάριον κινείσθω μεταξὺ τῶν β, γ. τούτων δὲ κατασκευασμένων ἐπιτετάχθω δύο κύβους εὑρεῖν, λόγον ἔχοντας πρὸς ἀλλήλους τὸν ἐπιταχθέντα, καὶ τῷ λόγῳ ὁ αὐτὸς πεποιήσθω ὁ τῆς βδ πρὸς δε.

δε. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γε ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ζ. παρακείσθω δὴ τὸ κανόνιον μεταξὺ τῶν β, γ, ἕως οὗ τὸ ἀπολαμβανόμενον αὐτοῦ μέρος μεταξὺ τῶν ζε, εβ εὐθειῶν, ἴσον γένηται τῷ μεταξὺ τῆς βε εὐθείας, καὶ τῆς βκγ περιφερείας. τοῦτο γὰρ πειράζοντες, καὶ μετάγοντες τὸ κανόνιον, ῥᾳδίως ποιήσομεν. γεγονέτω δὴ καὶ ἐχέτω θέσιν τὴν ακ, ὥστε ἴσας εἶναι τὰς κθ, θκ. λέγω ὅτι ὁ ἀπὸ τῆς βδ κύβος, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς δθ κύβον, λόγον ἔχει τὸν ἐπιταχθέντα, τουτέστι τὸν τῆς βδ πρὸς δε. νενοήσθω γὰρ ὁ κύκλος ἀναπεπληρωμένος, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ κδ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ λ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ λη. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ βδ τῇ λη, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν μὲν κθ τῇ ηθ, τὴν δὲ κδ τῇ δλ. ἐπεζεύχθω δὴ ἥ τε αλ καὶ ἡ λγ. ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ αλγ, ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ, καὶ κάθετος ἡ λμ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ λμ πρὸς τὸ ἀπὸ μα, τουτέστιν ἡ γμ πρὸς μα, οὕτως τὸ ἀπὸ αμ πρὸς τὸ ἀπὸ μη. κοινὸς προσκείσθω ὁ τῆς αμ πρὸς μη λόγος. ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος, ἔκ τε τοῦ τῆς γμ πρὸς μα, καὶ τοῦ τῆς αμ πρὸς μη, τουτέστιν ὁ τῆς γμ πρὸς μη λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἔκ τε τοῦ ἀπὸ τῆς αμ πρὸς τὸ ἀπὸ μη, καὶ τοῦ τῆς αμ πρὸς μη. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ἀπὸ τῆς αμ πρὸς τὸ ἀπὸ μη, καὶ τοῦ τῆς αμ πρὸς μη, ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ, ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ τῆς αμ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς μη. καὶ ὁ τῆς γμ ἄρα πρὸς μη λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ, ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ τῆς αμ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς μη. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ γμ πρὸς μη, οὕτως ἡ γδ πρὸς δε. ὡς δὲ ἡ αμ πρὸς μη, ἡ αδ πρὸς δθ. καὶ ὡς ἄρα ἡ βδ πρὸς δε, τουτέστιν ὡς ὁ δοθεὶς λόγος, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς βδ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς δθ κύβον. τῶν ἄρα ὀφειλουσῶν εὑρεθῆναι δύο μέσων ἀνάλογον τῶν βδ, δε, δευτέρα ἐστὶν ἡ δθ. καὶ ἐὰν ποιήσωμεν ὡς τὴν βδ πρὸς δθ, τὴν θδ πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται καὶ ἡ τρίτη εὑρημένη. προσέχειν δὲ χρὴ ὡς καὶ ἡ τοιαύτη κατασκευὴ ἡ αὐτή ἐστι τῇ ὑπὸ Διοκλέους εἰρημένῃ, τούτῳ μόνῳ διαφέρουσα τῷ ἐκεῖνον μὲν γραμμήν τινα καταγράφειν διὰ συνεχῶν σημείων μεταξὺ τῶν α, β. ἐφ᾽ ἧς ἐλαμβάνετο τὸ η, ἐκβαλλομένης τῆς γε, καὶ τεμνούσης τὴν εἰρημένην γραμμήν. ἐνταῦθα δὲ τὸ η πορίζεται, διὰ τοῦ ακ κανόνος κινουμένου περὶ τὸ α. ὅτι γὰρ τὸ η τὸ αὐτό ἐστι, εἴτε ὡς ἐνταῦθα διὰ τοῦ κανόνος ληφθῇ, εἴτε ὡς ἔφη Διοκλῆς, μάθοιμεν ἂν οὕτως. ἐκβληθείσης τῆς μη κατὰ τὸ ν, ἐπεζεύχθω ἡ κν. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ κθ τῇ θη, καὶ παράλληλος ἡ ην τῇ θβ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ κξ τῇ ξν, καὶ κοινὴ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ξβ. ἡ γὰρ κν δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνεται ὑπὸ τῆς διὰ τοῦ κέντρου, καὶ βάσις ἄρα βάσει ἴση, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ κβ περιφέρεια τῇ βν. τὸ ἄρα η ἐστὶ τὸ ἐπὶ τῆς γραμμῆς τοῦ Διοκλέους, καὶ ἡ ἀπόδειξις δὲ αὐτή ἐστιν. ἔφασκεν γὰρ ὁ Διοκλῆς, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ γμ πρὸς μν, οὕτως ἡ μν πρὸς μα. καὶ ἡ αμ πρὸς μη. ἴση δὲ ἐστὶν ἡ ημ τῇ μλ. ἡ γὰρ διάμετρος πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γμ πρὸς μλ, οὕτως ἡ λμ πρὸς μα, καὶ ἡ αμ πρὸς μη. τῶν ἄρα γμ, μη μέσαι ἀνάλογον εἰσὶ αἱ λμ, μα. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ γμ πρὸς μη, ἡ γδ πρὸς δε. ὡς δὲ ἡ γμ πρὸς μλ, ἡ αμ πρὸς μη, τουτέστιν ἡ γδ πρὸς δθ. καὶ τῶν δύο μέσων ἄρα τῶν γδ, δε, δευτέρα ἐστὶν ἡ δθ, ἥν τινα ἐπορίσατο καὶ ὁ Πάππος.

ΩΣ ΣΠΟΡΟΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ αβ, βγ. δεῖ δὴ τῶν αβ, βγ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ β τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἡ δβε, καὶ κέντρῳ τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ βα ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ δαε. καὶ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὸ γ εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα διήχθω ἐπὶ τὸ ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ δ διήχθω τις εὐθεῖα οὕτως, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ηθ τῇ θκ. τοῦτο γὰρ δυνατόν. καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν κ, η ἐπὶ τὴν δε κάθετοι αἱ κλ, ημν. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ κθ πρὸς θη, ἡ λβ πρὸς βμ. ἴση δὲ ἡ κθ τῇ θη, ἴση ἄρα καὶ ἡ μβ τῇ βλ, ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ με τῇ λδ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ δμ τῇ λε ἐστὶν ἴση. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ μδ πρὸς δλ, ἡ λε πρὸς εμ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ μδ πρὸς δλ, ἡ κμ πρὸς κλ. ὡς δὲ ἡ λε πρὸς εμ, ἡ κλ πρὸς νμ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ δμ πρὸς μη, ἡ ημ πρὸς με. ὡς ἄρα ἡ δμ πρὸς με, οὕτως τὸ ἀπὸ δμ πρὸς τὸ ἀπὸ μη, τουτέστι τὸ ἀπὸ δβ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ. τουτέστι τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ. ἴση γὰρ ἡ δβ

τῇ βα. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μδ πρὸς δβ, ἡ λε πρὸς εβ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ μδ πρὸς δβ, ἡ κμ πρὸς θβ. ὡς δὲ ἡ λε πρὸς εβ, ἡ κλ πρὸς γβ. καὶ ὡς ἄρα ἡ κμ πρὸς θβ, ἡ κλ πρὸς γβ. καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ κμ πρὸς κλ, ἡ θβ πρὸς γβ. ἀλλ' ὡς ἡ κμ πρὸς κλ, ἡ μδ πρὸς δλ, τουτέστιν ἡ δμ πρὸς με, τουτέστι τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, ἡ βθ πρὸς βγ. εἰλήφθω τῶν θβ, βγ μέση ἀνάλογον ἡ ξ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ, ἡ θβ πρὸς βγ, ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αβ πρὸς βθ. ἡ δὲ θβ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θβ πρὸς ξ. καὶ ὡς ἄρα ἡ αβ πρὸς βθ, ἡ βθ πρὸς ξ. ἀλλ' ὡς ἡ θβ πρὸς ξ, ἡ ξ πρὸς βγ. καὶ ὡς ἄρα ἡ αβ πρὸς βθ, ἡ θβ πρὸς ξ. καὶ ἡ ξ πρὸς βγ. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ αὐτὴ ἡ αὐτή ἐστιν, τῇ τε ὑπὸ πάππου καὶ διοκλέους γραμμῇ.

ΩΣ ΜΕΝΕΧΜΟΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ δ, ε. δεῖ δὴ τῶν δ, ε δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. γεγονέτω καὶ ἔστωσαν αἱ β, γ. καὶ ἐκκείσθω θέσει εὐθεῖα ἡ αη, πεπερασμένη κατὰ τὸ α. καὶ πρὸς τῷ α τῇ γ ἴση κείσθω ἡ αζ. καὶ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ ζθ. καὶ τῇ β ἴση κείσθω ἡ ζθ. ἐπεὶ οὖν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ δ, β, γ. τὸ ὑπὸ τῶν δ, γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β. τὸ ἄρα ὑπὸ δοθείσης τῆς δ καὶ τῆς γ, τουτέστι τῆς αζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ζθ. ἐπὶ παραβολῆς ἄρα τῆς θ, διὰ τοῦ α γεγραμμένης, ἤχθωσαν παράλληλοι αἱ θκ, ακ. καὶ ἐπεὶ δοθὲν τὸ ὑπὸ β, γ. ἴσον γάρ ἐστι τῷ ὑπὸ δ, ε. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ κθζ. ἐπὶ ὑπερβολῆς ἄρα τὸ θ ἐν ἀσυμπτώτοις ταῖς κα, αζ. δοθὲν ἄρα τὸ θ, ὥστε καὶ τὸ ζ. συντεθήσεται δὴ οὕτως. ἔστωσαν αἱ μὲν δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ δ, ε. ἡ δὲ τῇ θέσει ἡ αη πεπερασμένη κατὰ τὸ α, καὶ γεγράφθω διὰ τοῦ α παραβολή. ἧς ἄξων μὲν ἡ αη, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ δ. αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν αη ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ δυνάσθωσαν τὰ παρὰ τὴν δ παρακείμενα χωρία, πλάτη ἔχοντα τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῷ α σημείῳ. γεγράφθω, καὶ ἔστω ἡ αθ. καὶ ὀρθὴ ἡ ακ, καὶ ἐν ἀσυμπτώτοις ταῖς κα, αζ γεγράφθω ὑπερβολή, ἀφ' ἧς αἱ παρὰ τὰς κα, αζ ἀχθεῖσαι ποιήσουσι τὸ χωρίον ἴσον τῷ ὑπὸ δ, ε, τέμνει δὴ τὴν παραβολήν. τεμνέτω κατὰ τὸ θ, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ θκ, θζ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ ζθ, ἴσον τῷ ὑπὸ δ, γ, ἔστιν ὡς ἡ δ πρὸς τὴν ζθ, ἡ ζθ πρὸς ζα. πάλιν ἐπεὶ τὸ ὑπὸ δ, ε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θζα, ἔστιν ὡς ἡ δ πρὸς τὴν ζθ, ἡ ζα πρὸς τὴν ε. ἀλλ' ὡς ἡ δ πρὸς τὴν ζθ, ἡ ζθ πρὸς ζα, καὶ ἡ ζα πρὸς ε. κείσθω τῇ μὲν θζ ἴση ἡ β, τῇ δὲ αζ ἴση ἡ γ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ πρὸς τὴν β, ἡ β πρὸς τὴν γ, καὶ ἡ γ πρὸς ε. αἱ δ, β, γ, ε ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

ΑΛΛΩΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ αβ, βγ. καὶ γεγονέτωσαν αὐτῶν μέσαι αἱ δβ, βε. ὥστε εἶναι ὡς τὴν γβ πρὸς βδ, οὕτως τὴν βδ πρὸς βε, καὶ τὴν βε πρὸς βα. καὶ ἤχθωσαν πρὸς ὀρθὰς αἱ δζ, εζ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ δβ πρὸς βε. τὸ ἄρα ὑπὸ γβε, τουτέστι τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς βε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βδ, τουτέστι τῆς εζ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς βε. ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εζ, τὸ ζ ἄρα ἅπτεται παραβολῆς τῆς περὶ ἄξονα τὴν βε. πάλιν ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ αβ πρὸς βε, ἡ βε πρὸς βδ. τὸ ἄρα ὑπὸ αβδ, τουτέστι τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς βδ, ἴσον ἐστὶ

τῷ ἀπὸ ε β, τουτέστι παρὰ τὴν δ ζ. τὸ ζ ἄρα ἅπτεται παραβολῆς περὶ ἄξονα τὴν β δ. ἧπται δὲ καὶ θέσει δοθείσης περὶ τὴν β ζ. δοθὲν ἄρα τὸ ζ, καὶ κάθετοι αἱ ζ δ, ζ ε. καὶ δοθέντα τὰ δ, ε. συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ α β, β γ. καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' ἄπειρον ἀπὸ τοῦ β, β δ, β ε. καὶ γεγράφθω περὶ ἄξονα τὴν β ε παραβολή, ὥς τε τὰς καταγομένας ἐπὶ τὴν β ε, δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν β γ. πάλιν γεγράφθω περὶ ἄξονα τὴν δ β παραβολή, ὥς τε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν α β. τέμνουσι δὴ ἀλλήλας αἱ παραβολαί. τεμνέτωσαν κατὰ τὸ ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ ζ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ζ δ, ζ ε. ἐπεὶ οὖν ἐν παραβολῇ κατῆκται ἡ ζ ε, τουτέστιν ἡ δ β, τὸ ἄρα ὑπὸ γ β ε ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ β δ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γ β πρὸς β δ, ἡ δ β πρὸς β ε. πάλιν ἐπεὶ ἐν παραβολῇ κατῆκται ἡ ζ δ, τουτέστιν ἡ ε β, τὸ ἄρα ὑπὸ δ β α ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ε β. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ β πρὸς β ε, ἡ β ε πρὸς β α. ἀλλ' ὡς ἡ δ β πρὸς β ε, οὕτως ἡ γ β πρὸς β δ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γ β πρὸς β δ, ἡ β δ πρὸς β ε, καὶ ἡ ε β πρὸς β α. ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

Γράφεται δὲ ἡ παραβολὴ διὰ τοῦ εὑρεθέντος διαβήτου τῷ μιλησίῳ μηχανικῷ Ἰσιδώρῳ τῷ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ, γραφέντος δὲ ὑπ' αὐτοῦ εἰς τὸ γενόμενον αὐτῷ ὑπόμνημα τῶν Ἥρωνος καμαρικῶν.

Η ΑΡΧΙΤΟΥ ΕΥΡΕΣΙΣ, ΩΣ ΕΥΔΗΜΟΣ ΙΣΤΟΡΕΙ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ α δ, γ. δεῖ δὴ τῶν α δ, γ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. γεγράφθω περὶ τὴν μείζονα τὴν α δ κύκλος, ὁ α β δ ζ. καὶ τῇ γ ἴση ἐνηρμόσθω ἡ α β. καὶ ἐκβληθεῖσα συμπιπτέτω τῇ ἀπὸ τοῦ δ, ἐφαπτομένῃ τοῦ κύκλου κατὰ τὸ π. παρὰ δὲ τὴν π δ ο ἤχθω ἡ β ε ζ. καὶ νενοήσθω ἡμικυλίνδριον ὀρθὸν ἐπὶ τοῦ α β δ ἡμικυκλίου. ἐπὶ δὲ τῆς α δ ἡμικύκλιον ὀρθὸν, ἐν τῷ τοῦ ἡμικυλινδρίου παραλληλογράμμῳ κείμενον. τοῦτο δὴ τὸ ἡμικύκλιον περιαγόμενον ὡς ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὸ β, μένοντος τοῦ α πέρατος τῆς διαμέτρου, τέμνει τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν ἐν τῇ περιαγωγῇ, καὶ γράψει ἐν αὐτῇ γραμμήν τινα. πάλιν δὲ ἐὰν τοῦ α δ μενούσης τὸ α π δ τρίγωνον περιενεχθῇ τὴν ἐναντίαν τῷ ἡμικυκλίῳ κίνησιν, κωνικὴν ποιήσει ἐπιφάνειαν τῇ α π εὐθείᾳ, ἣ δὴ περιαγομένη συμβαλεῖ τῇ κυλινδρικῇ γραμμῇ κατά τι σημεῖον. ἅμα δὲ καὶ τὸ β περιγράψει ἡμικύκλιον ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ. ἐχέτω δὴ θέσιν κατὰ τὸν τόπον τῆς συμπτώσεως τῶν γραμμῶν τὸ κινούμενον ἡμικύκλιον, ὡς τὴν τοῦ δ κ α. τὸ δὲ

αὐτὸ

αὐτῇ περιαγόμενον τρίγωνον τὴν τοῦ δλα. τὸ δὲ τῆς εἰρημένης συμπτώσεως σημεῖον ἔστω τὸ κ. ἔστω δὲ καὶ τὸ διὰ τοῦ β γραφόμενον ἡμικύκλιον τὸ βμζ, κοινὴ δὲ αὐτοῦ τομὴ καὶ τοῦ βδζα κύκλου ἔστω ἡ βζ. καὶ ἀπὸ τοῦ κ ἐπὶ τὸ τοῦ βδα ἡμικυκλίου ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω. πεσεῖται δὴ ἐπὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, διὰ τὸ ὀρθὸν ἑστάναι τὸν κύλινδρον. πιπτέτω, καὶ ἔστω ἡ κι. καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ ι ἐπὶ τὸ α ἐπιζευχθεῖσα συμβαλλέτω τῇ βζ κατὰ τὸ θ. ἡ δὲ αλ τῷ βμζ ἡμικυκλίῳ κατὰ τὸ μ. ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ κδ, μι, μθ. ἐπεὶ οὖν ἑκάτερον τῶν δκα, βμζ ἡμικυκλίων ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ ἡ κοινὴ ἄρα αὐτῶν τομὴ ἡ μθ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ. ὥστε καὶ πρὸς τὴν βζ ὀρθή ἐστιν ἡ μθ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν θβ, θζ, τουτέστι τὸ ὑπὸ θα, θι, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ μθ. ὅμοιον ἐστὶν ἄρα τὸ αμι τρίγωνον ἑκατέρῳ τῶν μιθ, μαθ. καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ιμα. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δκα ὀρθή. παράλληλοι ἄρα εἰσὶν αἱ κδ, μι. καὶ ἔσται ἀνάλογον ὡς ἡ δα πρὸς ακ, τουτέστιν ἡ κα πρὸς αι, οὕτως ἡ ια πρὸς αμ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων. τέσσαρες ἄρα αἱ δα, ακ, αι, αμ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι. καὶ ἔστιν ἡ αμ ἴση τῇ γ. ἐπεὶ καὶ τῇ αβ. δύο ἄρα δοθεισῶν τῶν αδ, γ, δύο μέσαι ἀνάλογον ηὕρηνται αἱ ακ, αι.

ΩΣ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΣ.

Βασιλεῖ Πτολεμαίῳ Ἐρατοσθένης χαίρειν.

Τῶν ἀρχαίων τινὰ τραγῳδοποιῶν φασὶν, εἰσαγαγεῖν τὸν Μίνω τῷ Γλαύκῳ κατασκευάζοντα τάφον. πυθόμενον δὲ ὅτι πανταχοῦ ἑκατόμπεδος εἴη, εἰπεῖν, μικρόν γ᾽ ἔλεξας βασιλικοῦ σηκὸν τάφου, διπλάσιος ἔστω. τοῦ δὲ κύβου μὴ σφαλῇς, διπλασιάζων ἕκαστον κῶλον ἐν τάχει τάφου, ἐδόκει διημαρτηκέναι. τῶν γὰρ πλευρῶν διπλασιασθεισῶν, τὸ μὲν ἐπίπεδον γίνεται τετραπλάσιον, τὸ δὲ στερεὸν ὀκταπλάσιον. ἐζητεῖτο δὴ καὶ παρὰ τοῖς γεωμέτραις, τίνα ἄν τις τρόπον τὸ δοθὲν στερεὸν διαμένον ἐν τῷ αὐτῷ σχήματι διπλασιάσειεν. καὶ ἐκαλεῖτο τὸ τοιοῦτον πρόβλημα, κύβου διπλασιασμός. ὑποθέμενοι γὰρ κύβον, ἐζήτουν τοῦτον διπλασιάσαι. πάντων δὲ διαπορούντων ἐπὶ πολὺν χρόνον, πρῶτον Ἱπποκράτης ὁ Χῖος ἐπενόησεν, ὅτι ἐὰν εὑρεθῇ δύο εὐθειῶν γραμμῶν, ὧν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονός ἐστι διπλασία, δύο μέσας ἀνάλογον λαβεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, διπλασιασθήσεται ὁ κύβος, ὥστε τὸ ἀπόρημα αὐτοῦ εἰς ἕτερον οὐκ ἔλασσον ἀπόρημα κατέστρεφεν. μετὰ χρόνον δέ τινά φασιν Δηλίους ἐπιβαλομένης νόσου κατὰ χρησμὸν διπλασιάσαι τινὰ τῶν βωμῶν ἐπιταχθέντας, ἐμπεσεῖν εἰς τὸ αὐτὸ ἀπόρημα. διαπεμψαμένοις δὲ τοὺς παρὰ τῷ Πλάτωνι ἐν Ἀκαδημίᾳ γεωμέτρας, ἀξιοῦν αὐτοῖς εὑρεῖν τὸ ζητούμενον. τῶν δὲ φιλοπόνως ἐπιδιδόντων ἑαυτοὺς, καὶ ζητούντων, δύο δοθεισῶν δύο μέσας λαβεῖν, Ἀρχύτας μὲν ὁ Ταραντῖνος λέγεται διὰ τῶν ἡμικυλίνδρων εὑρηκέναι, Εὔδοξος δὲ διὰ τῶν καλουμένων καμπύλων γραμμῶν. συμβέβηκε δὲ πᾶσιν αὐτοῖς ἀποδεικτικῶς γεγραφέναι. χειρουργῆσαι δὲ, καὶ εἰς χρείαν πεσεῖν μὴ δύνασθαι, πλὴν ἐπὶ βραχύ τι τοῦ Μεναίχμου, καὶ ταῦτα δυσχερῶς. ἐπινενόηται δέ τις ὑφ᾽ ἡμῶν ὀργανικὴ ῥᾳδία, δι᾽ ἧς εὑρήσομεν, δύο τῶν δοθεισῶν οὐ μόνον δύο μέσας, ἀλλ᾽ ὅσας ἄν τις ἐπιτάξῃ. τούτου δὲ εὑρισκομένου δυνησόμεθα καθόλου τὸ δοθὲν στερεὸν παραλληλογράμμοις περιεχόμενον εἰς κύβον καθιστάναι, ἢ ἐξ ἑτέρου εἰς ἕτερον σχηματίζειν, καὶ ὅμοιον ποιεῖν καὶ ἐπαύξειν διατηροῦντας τὴν ὁμοιότητα. ὥστε καὶ βωμοὺς, καὶ ναούς. δυνησόμεθα δὲ καὶ τὰ τῶν ὑγρῶν μέτρα, καὶ ξηρῶν, λέγω δὲ οἷον μετρητὴν μεδίμνων εἰς κύβον καθιστάναι, καὶ διὰ τῆς τούτου πλευρᾶς ἀναμετρεῖν τὰ τούτων δεκτικὰ ἀγγεῖα πόσον χωρεῖ. χρήσιμον δὲ ἔσται τὸ ἐπινόημα, καὶ τοῖς βουλομένοις ἐπαύξειν καταπαλτικὰ καὶ λιθοβόλα ὄργανα. δεῖ γὰρ ἀνάλογον ἅπαντα αὐξηθῆναι, καὶ τὰ πάχη καὶ τὰ μεγέθη, καὶ τὰς κατατρήσεις, καὶ τὰς χοινικίδας, καὶ τὰ ἐμβαλλόμενα νεῦρα, εἰ μέλλει καὶ ἡ βολὴ ἀνάλογον ἐπαυξηθῆναι. ταῦτα δὲ οὐ δυνατὰ γενέσθαι ἄνευ τῆς τῶν μέσων εὑρέσεως.

σεως. τὴν δὲ ἀπόδειξιν καὶ τὴν κατασκευὴν τοῦ λεχθέντος ὀργάνου ὑπογέγραφά σοι. δεδόσθωσαν δύο ἄνισοι εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, αἱ αε, δθ. καὶ κείσθω ἐπί τινος εὐθείας τῆς εθ πρὸς ὀρθὰς ἡ αε. καὶ ἐπὶ τῆς εθ τρία συνεστάτω παραλληλόγραμμα ἐφεξῆς, τὰ αζ, ζι, ιθ. καὶ ἤχθωσαν διάμετροι ἐν αὐτοῖς, αἱ αζ, λη, ιθ. ἔσονται δὴ αὗται παράλληλοι, μένοντος δὴ τοῦ μέσου παραλληλογράμμου τοῦ ζι συνωσθήτω, τὸ μὲν αζ ἐπάνω τοῦ μέσου, τὸ δὲ ιθ ὑποκάτω, καθάπερ ἐπὶ τοῦ δευτέρου σχήματος, ἕως οὗ γένηται τὰ α β γ δ κατ' εὐθεῖαν. καὶ διήχθω διὰ τῶν α, β, γ, δ σημείων εὐθεῖα. καὶ συμπιπτέτω τῇ εθ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ κ. ἔσται δὴ ὡς ἡ ακ πρὸς κβ, ἐν μὲν ταῖς αε, ζβ παραλλήλοις, ἡ εκ πρὸς κζ. ἐν δὲ ταῖς αζ, βη παραλλήλοις ἡ ζκ πρὸς κη. ὡς ἄρα ἡ ακ πρὸς κβ, ἡ εκ πρὸς κζ, καὶ ἡ κζ πρὸς κη. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ βκ πρὸς κγ, ἐν μὲν ταῖς βζ, γη παραλλήλοις ἡ ζκ πρὸς κη. ἐν δὲ ταῖς βη, γθ παραλλήλοις ἡ ηκ πρὸς κθ. ὡς ἄρα ἡ βκ πρὸς κγ, ἡ ζκ πρὸς κη, καὶ ἡ ηκ πρὸς κθ. ἀλλ' ὡς ἡ ζκ πρὸς κη, ἡ εκ πρὸς κζ. καὶ ὡς ἄρα ἡ εκ πρὸς κζ, ἡ ζκ πρὸς κη, καὶ ἡ ηκ πρὸς κθ. ἀλλ' ὡς ἡ εκ πρὸς κζ, ἡ αε πρὸς βζ. ὡς δὲ ἡ ζκ πρὸς κη, ἡ βζ πρὸς γη. ὡς δὲ ἡ ηκ πρὸς κθ, ἡ γη πρὸς δθ. καὶ ὡς ἄρα ἡ αε πρὸς βζ, ἡ βζ πρὸς γη, καὶ ἡ γη πρὸς δθ. ηὕρηνται ἄρα τῶν αε, δθ δύο μέσαι, ἥτε βζ καὶ ἡ γη.

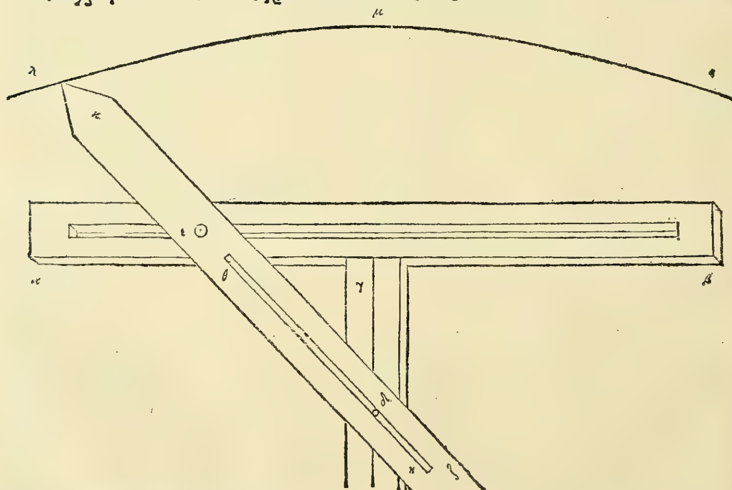
Ταῦτα οὖν ἐπὶ τῶν γεωμετρουμένων ἐπιφανειῶν ἀποδέδεικται. ἵνα δὲ καὶ ὀργανικῶς δυνώμεθα τὰς δύο μέσας λαμβάνειν, διαπήγνυται πλινθίον ξύλινον, ἢ ἐλεφάντινον, ἢ χαλκοῦν ἔχον τρεῖς πινακίσκους ἴσους ὡς λεπτοτάτους. ὧν ὁ μὲν μέσος ἐνήρμοσται, οἱ δὲ δύο ἐπωστοί εἰσιν ἐν χολέδραις, τοῖς δὲ μεγέθεσι καὶ ταῖς συμμετρίαις ὡς ἕκαστοι ἑαυτοὺς πείθουσι. τὰ μὲν γὰρ τῆς ἀποδείξεως ὡσαύτως συντελεῖται. πρὸς δὲ τὸ ἀκριβέστερον λαμβάνεσθαι τὰς γραμμὰς φιλοτεχνητέον, ἵνα ἐν τῷ συνάγεσθαι τοὺς πινακίσκους παράλληλα διαμένῃ πάντα καὶ ἄσχιστα, καὶ ὁμαλῶς συναπτόμενα ἀλλήλοις. ἐν δὲ τῷ ἀναθήματι, τὸ μὲν ὀργανικὸν χαλκοῦν ἐστι, καὶ καθήρμοσται ὑπ' αὐτὴν τὴν στεφάνην τῆς στήλης προσμεμολυβδοχημένον, ὑπ' αὐτοῦ δὲ ἡ ἀπόδειξις συντομώτερον φραζομένη καὶ τὸ σχῆμα, μετ' αὐτὸ δὲ ἐπίγραμμα. ὑπογεγράφθω οὖν σοι καὶ ταῦτα, ἵνα ἔχῃς καὶ ὡς ἐν τῷ ἀναθήματι, τῶν δὲ δύο σχημάτων τὸ δεύτερον γέγραπται ἐν τῇ στήλῃ.

Δύο τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. δεδόσθωσαν αἱ αε, δθ. συνάγω δὴ τοὺς ἐν τῷ ὀργάνῳ πίνακας, ἕως ἂν κατ' εὐθεῖαν γένηται τὰ α, β, γ, δ σημεῖα. νοείσθω δὴ ὡς ἔχει ἐπὶ τοῦ δευτέρου σχήματος. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ακ πρὸς κβ, ἐν μὲν ταῖς αε, βζ παραλλήλοις ἡ εκ πρὸς κζ. ἐν δὲ ταῖς αζ, βη, ἡ ζκ πρὸς κη. ὡς ἄρα ἡ εκ πρὸς κζ, ἡ κζ πρὸς κη. ὡς δὲ αὗται πρὸς ἀλλήλας, ἥτε αε πρὸς βζ, καὶ ἡ βζ πρὸς γη. ὡσαύτως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ὡς ἡ ζβ πρὸς γη, ἡ γη πρὸς δθ. ἀνάλογον ἄρα αἱ αε, βζ, γη, δθ. ηὕρηνται ἄρα δύο τῶν δοθεισῶν δύο μέσαι. ἐὰν δὲ αἱ δοθεῖσαι μὴ ἴσαι ὦσι ταῖς αε, δθ, ποιήσαντες αὐταῖς ἀνάλογον τὰς αε, δθ, τούτων ληψόμεθα τὰς μέσας, καὶ ἐπανοίσομεν ἐπ' ἐκείνας, καὶ ἐσόμεθα πεποιηκότες τὸ ἐπιταχθέν. ἐὰν δὲ πλείους μέσας ἐπιταχθῇ εὑρεῖν, εἰ ἐν ἱ πλείους πινακίσκους κατασκευασόμεθα ἐν τῷ ὀργανίῳ τῶν ληφθησομένων μέσων, ἡ δὲ ἀπόδειξις ἡ αὐτή.

Εἰ κύβον ἐξ ὀλίγου διπλάσιον ὦγαθὲ τεύχειν
    φράζεαι, τὴν στερεὴν πᾶσαν ἐς ἄλλο φύσιν.
Εὖ μεταμορφῶσαι, τό δὲ τοι πάρα, κἂν σύ γε μάνδρην
    Ἢ † σεῖρον, ἢ κοίλου φρέατος εὐρὺ κύτος. † σωρὸν
Τῇ δ' ἀναμετρήσαιο μέσας ὅτε τέρμασιν ἄκροις
    Συνδρομάδας δισσῶν ἐντὸς ἕλης κανόνων.
Μὴ δὲ σύ γ' ἀρχύτεω δυσμήχανα ἔργα κυλίνδρων,
    Μὴ δὲ μεναιχμείους κωνοτομεῖν τριάδας
Δίζηαι. μὴ δ' εἴ τι θεοῦ δέος εὐδόξοιο,
    Καμπύλον ἐν γραμμαῖς εἶδος ἀναγράφεται.
Τοῖς δὲ γὰρ ἐν πινάκεσσι μεσόγραφα μυρία τεύχοις,
    Ῥεῖα κεν ἐκ παύρου πυθμένος ἀρχόμενος.
Εὐαίων πτολεμαῖε πατὴρ ὅτι παιδὶ συνηβῶν
    Πάνθ' ὅσα καὶ μούσαις καὶ βασιλεῦσι φίλα.
Αὐτὸς ἐδωρήσω τὸ δ' ἐς ὕστερον οὐράνιε ζεῦ.
    Καὶ σκήπτρων ἐκ σῆς ἀντιάσειε χερός.
Καὶ τὰ μὲν ὡς τελέοιτο, λέγοι δέ τις ἄνθεμα λεύσσων
    Τοῦ κυρηναίου τοῦτ' ἐρατοσθένεος.

ΩΣ ΝΙΚΟΜΗΔΗΣ ΕΝ ΤΩ ΠΕΡΙ ΚΟΓΧΟΕΙΔΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ.

Γράφει δὲ καὶ νικομήδης ἐν τῷ ἐπιγεγραμμένῳ πρὸς αὐτοῦ περὶ κογχοειδῶν συγγράμματι ὀργάνου κατασκευὴν τὴν αὐτὴν ἀποπληροῦντος. ἐφ' ὃ καὶ μεγάλα μὲν σεμνυνόμενος φαίνεται ὁ ἀνήρ, πολλὰ δὲ τοῖς ἐρατοσθένους ἐπεγγελῶν εὑρήμασιν, ὡς ἀμηχάνοις τε ἅμα καὶ γεωμετρικῆς ἕξεως ἐστερημένοις, τοῦτ' ἐὰν ἐλλείποις. τῶν τοίνυν περὶ τὸ πρόβλημα πεπονηκότων διά τε πρὸς ἐρατοσθένην συγκρίσεως ἕνεκα, καὶ αὐτὸν τοῖς ἤδη γεγραμμένοις, συνάπτομεν δυνάμει γράφοντα οὕτως. Νοεῖν χρὴ κανόνας δύο πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις συμβεβλημένους οὕτως,



ὥστε μίαν ἀποσώζειν αὐτοὺς ἐπιφάνειαν, καθάπερ εἰσὶν οἱ α β, γ δ. ἐν δὲ τῷ α β σωλῆνα πελεκινοειδῆ, εἰς ὃν χελώνιον διατρέχειν δυνήσεται. ἐν δὲ τῷ γ δ κατὰ τὸ μέρος τὸ πρὸς τὸ δ, καὶ μέσην τὴν διαιροῦσαν εὐθεῖαν τὸ πλάτος αὐτοῦ κυλίνδριον συμφυὲς τῷ κανόνι, καὶ βραχὺ

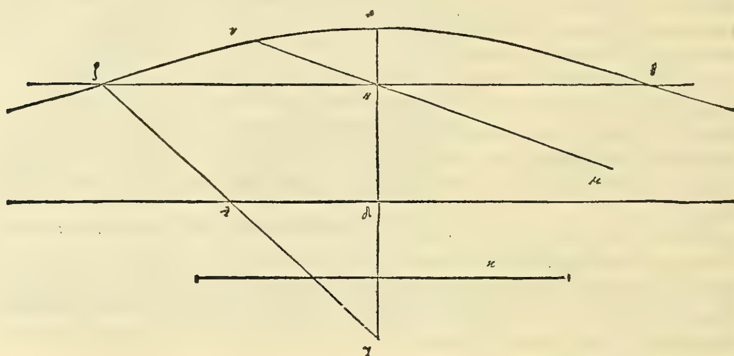
ὑπερέχον

ὑπερέχον τῆς ἄνωθεν ἐπιφανείας αὐτοῦ τοῦ κανόνος. ἄλλον δὲ κανόνα ὡς τὸν ε ζ μετὰ βραχύ τι διάστημα τοῦ πρὸς τὸ ζ πέρατος ἀνατομὴν ἔχοντα, ὡς τὴν η θ, δυναμένην περιβαίνειν τῷ πρὸς τῷ δ κυλινδρίῳ. πρὸς δὲ τῷ ε ὀπὴν στρογγύλην, ἥτις ἐγκείσεται εἰς τὸν ἀξόνιον, συμφυὲς τῷ διατρέχοντι χελωναρίῳ ἐν τῷ πελεκινοειδεῖ σωλῆνι, τῷ ὄντι ἐν τῷ α β κανόνι. ἐναρμοσθέντος τοίνυν τοῦ ε ζ κανόνος, κατὰ μὲν τὴν η θ ἀνατομὴν, ἐν τῷ πρὸς τὸ ζ κυλινδρίῳ, κατὰ δὲ τὴν ε ὀπὴν ἐν τῷ ἀξονίῳ τῷ συμφυεῖ τῷ χελωναρίῳ, ἐάν τις ἐπιλαβόμενος τοῦ κ ἄκρου τοῦ κανόνος κινῇ αὐτὸν ἐπὶ τὰ πρὸς τὸ α μέρη, ἔπειτα πρὸς τὸ β, τὸ μὲν ε σημεῖον ἀεὶ ἐπὶ τοῦ α β κανόνος ἐνεχθήσεται. ἡ δὲ η θ ἀνατομὴ ἐπὶ τῷ πρὸς τὸ δ κυλινδρίῳ κινηθήσεται, ἀεὶ τῆς μέσης τοῦ ε ζ κανόνος εὐθείας ἐν τῇ κινήσει διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ πρὸς τῷ δ κυλίνδρῳ νοουμένης. τῆς δὲ ε κ ὑπεροχῆς τοῦ κανόνος ἀεὶ τῆς αὐτῆς μενούσης. ἐὰν τοίνυν πρὸς τὸ κ ἐπινοήσωμεν τι γραφεῖον ἐφαπτόμενον τοῦ ἐδάφους, γραφήσεταί τις γραμμὴ, οἵα ἐστὶν ἡ α μ ν, ἥν τινα καλεῖ Νικομήδης κογχοειδῆ πρώτην γραμμὴν, καὶ διάστημα μὲν τῆς γραμμῆς τὸ ε κ μέγεθος τοῦ κανόνος, πόλον δὲ τὸ δ.

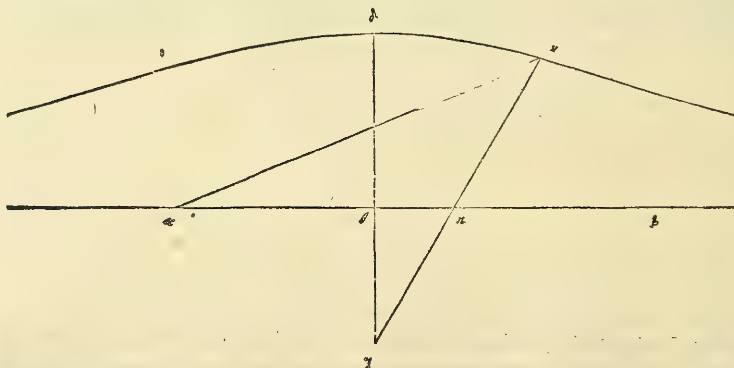
Ταύτῃ δὴ τῇ γραμμῇ συμβαῖνον δείκνυσι τὸ ἀεὶ ἐπ' ἔλαττον μὲν συμπορεύεσθαι τῷ α β κανόνι. καὶ ἐάν τις εὐθεῖα διαχθῇ μεταξὺ τῆς τε γραμμῆς καὶ τοῦ α β κανόνος, ὅτι πάντως τέμνει τὴν γραμμὴν, καὶ τὸ μὲν πρότερον τῶν συμβαινόντων ἐστὶν εὐκατανόητον, ἐφ' ἑτέρας καταγραφῆς, κανόνος τε νοουμένου τοῦ α β. πόλου δὲ τοῦ γ, διαστήματος δὲ τοῦ δ ε, γραμμῆς δὲ κογχοειδοῦς τῆς ζ ε η. προσπιπτέτωσαν ἀπὸ τοῦ γ δύο αἱ γ θ, γ ζ ἴσων, δῆλον ὅτι γινομένων τῶν κ θ, λ ζ. λέγω ὅτι ἡ ζ μ κάθετος ἐλάττων τῆς θ ν καθέτου. μείζονος γὰρ οὔσης τῆς ὑπὸ μ λ γ γωνίας τῆς ὑπὸ ν κ γ, λοιπὴ ἡ λοιποῦσα εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ἡ ὑπὸ μ λ ζ λοιπῆς τῆς ὑπὸ ν κ θ ἐστὶν ἐλάσσων, καὶ διὰ τοῦτο ὀρθῶν οὐσῶν τῶν πρὸς τοῖς μ, ν, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ πρὸς τὸ ζ τῆς πρὸς τῷ θ. καὶ ἐὰν τῇ πρὸς τὸ θ ἴσην συστησόμεθα τὴν ὑπὸ μ ζ ξ, ἡ κ θ, τουτέστιν ἡ λ ζ πρὸς θ ν τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν ἡ ξ ζ πρὸς ζ μ. ὥστε ἡ ζ λ πρὸς τὴν θ ν ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὴν ζ μ. καὶ διὰ τοῦτο μείζων ἡ θ ν τῆς ζ μ.

Τὸ δὲ δεύτερον ἦν τὸ τὴν διαγομένην εὐθεῖαν μεταξὺ τοῦ τε α β καὶ τῆς γραμμῆς τέμνειν τὴν γραμμὴν, ἔστι τοῦτο δὲ οὕτω γίνεται γνώριμον. ἡ γὰρ διαγομένη, ἤτοι παράλληλος ἐστὶ τῇ α β ἢ οὔ. ἔστω πρότερον παράλληλος ὡς ἡ ζ η θ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ δ η πρὸς η γ, οὕτως ἡ δ ε πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν κ. καὶ κέντρῳ τῷ γ, διαστήματι δὲ τῇ κ περιφέρεια γραφεῖσα τεμνέτω τὴν ζ η κατὰ τὸ ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γ ζ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ η πρὸς η γ, οὕτως ἡ λ ζ πρὸς ζ γ. ἀλλ' ὡς ἡ δ η πρὸς η γ, οὕτως ἦν ἡ δ ε πρὸς τὴν κ, τουτέστι τὴν γ ζ. ἴση ἄρα ἡ δ ε τῇ λ ζ ἀδύνατον. δεῖ γὰρ εἶναι τὸ ζ πρὸς τῇ γραμμῇ. ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ἡ διαγομένη παράλληλος.

καὶ ἔστω ὡς ἡ μη ν. καὶ ἤχθω διὰ τοῦ η παράλληλος τῇ αβ, ἡ ζη. ἡ ἄρα ζη συμπεσεῖται τῇ γραμμῇ, ὥστε πολλῷ μᾶλλον ἡ μν. τούτων δὲ ὄντων τῶν παρακολουθημάτων διὰ τοῦ ὀργάνου τὸ χρήσιμον εἰς τὸ προκείμενον δείκνυται οὕτως.



Πάλιν γωνίας δοθείσης τῆς α, καὶ σημείου ἐκτὸς τοῦ γ, διάγειν τὴν γη, καὶ ποιεῖν τὴν κη ἴσην τῇ δοθείσῃ. ἤχθω κάθετος ἀπὸ τοῦ γ σημείου ἐπὶ τὴν αβ, ἡ γθ. καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ τῇ δοθείσῃ ἴση ἔστω ἡ δθ, καὶ πόλῳ μὲν τῷ γ, διαστήματι δὲ τῷ δοθέντι τῷ δθ, κανόνι



δὲ τῷ αβ, γεγράφθω κογχοειδὴς γραμμὴ πρώτη ἡ εδζ. συμβαλεῖ ἄρα τῇ αθ, διὰ τὸ προδειχθέν, συμβαλλέτω κατὰ τὸ η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γη. ἴση ἄρα ἡ κη τῇ δοθείσῃ.

Τούτων δειχθέντων, δεδόσθωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ γλ, λα πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον κατὰ τὸ συνεχὲς εὑρεῖν. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ αβγλ παραλληλόγραμμον, καὶ τετμήσθω δίχα ἑκατέρα τῶν αβ, βγ, τοῖς δ, ε σημείοις, καὶ ἐπιζευχθεῖσα μὲν ἡ δλ ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ γβ ἐκβληθείσῃ, κατὰ τὸ η. τῇ δὲ βγ πρὸς ὀρθὰς ἡ εζ, καὶ προσβεβλήσθω ἡ γζ ἴση οὖσα τῇ αδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζη. καὶ αὐτῇ παράλληλος ἡ γθ. καὶ γωνίας οὔσης τῆς ὑπὸ τῶν κγθ, ἀπὸ δοθέντος τοῦ ζ, διήχθω ἡ ζθκ, ποιοῦσα ἴσην τὴν θκ τῇ αδ, ἢ τῇ γζ. τοῦτο γὰρ ὡς δυνατόν, ἐδείχθη διὰ τῆς κογχοειδοῦς. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ κλ ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ αβ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ μ, λέγω ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ φλ πρὸς κγ, ἡ κγ πρὸς μα,

καὶ

καὶ ἡ μα πρὸς τὴν αλ. ἐπεὶ ἡ βγ τέτμηται δίχα τῷ ε. καὶ πρόσκειται αὐτῇ ἡ κγ. τὸ ἄρα ὑπὸ βκγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εκ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ εζ. τὸ ἄρα ὑπὸ βκγ μετὰ τῶν ἀπὸ γε, εζ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ γζ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ κε, εζ, τουτέστι τῷ ἀπὸ κζ. καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ μα πρὸς αβ, ἡ μλ πρὸς λκ, ὡς δὲ ἡ μλ πρὸς λκ, οὕτως ἡ βγ πρὸς γκ. καὶ ὡς ἄρα ἡ μα πρὸς αβ, οὕτως ἡ βγ πρὸς γκ. καὶ ἔστι τῆς μὲν αβ ἡμίσεια ἡ αδ, τῆς δὲ βγ διπλῆ ἡ γη. ἐπεὶ καὶ ἡ λγ τῆς αδ. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἡ μα πρὸς αδ, οὕτως ἡ ηγ πρὸς γκ. ἀλλ' ὡς ἡ ηγ πρὸς γκ, οὕτως ἡ ζθ πρὸς θκ, διὰ τὰς παραλλήλους τὰς ηζ, γθ. καὶ συνθέντι ἄρα ὡς ἡ μδ πρὸς δα, ἡ ζκ πρὸς κθ. ἴση δὲ ὑπόκειται καὶ ἡ αδ τῇ θκ, ἐπεὶ καὶ τῇ γζ ἴση ἐστὶν ἡ αδ. ἴση ἄρα καὶ ἡ μδ τῇ ζκ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ μδ, τὸ ἀπὸ ζκ. καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ μδ, ἴσον τὸ ὑπὸ βμα μετὰ τοῦ ἀπὸ δα. τῷ δὲ ἀπὸ ζκ, ἴσον ἐδείχθη τὸ ὑπὸ βκγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γζ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ βμα μετὰ τοῦ ἀπὸ λδ, τὸ ὑπὸ βκγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γζ, ὧν τὸ ἀπὸ αδ ἴσον τῷ ἀπὸ γζ. ἴση γὰρ ὑπόκειται ἡ αδ τῇ γζ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ βμα τῷ ὑπὸ βκγ, ὡς ἄρα ἡ μβ πρὸς βκ, ἡ κγ πρὸς αμ. ἀλλ' ὡς ἡ βμ πρὸς βκ, ἡ γλ πρὸς γκ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γλ πρὸς γκ, οὕτως ἡ γκ πρὸς αμ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ λγ πρὸς γκ, ἡ μα πρὸς αλ. καὶ ὡς ἄρα ἡ λγ πρὸς γκ, ἡ γκ πρὸς αμ, καὶ ἡ αμ πρὸς αλ.

ΕΙΣ ΤΟ Β. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Καὶ συνθέντι, ὡς ἡ δθ πρὸς θγ, ἡ γα πρὸς αε. τουτέστι τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. ὡς γὰρ ἐπὶ αὐτῆς τῆς ἐν τῷ ῥητῷ καταγραφῆς. ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ γβα, ἀπὸ τῆς ὀρθῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ βε, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ γα πρὸς αβ, ἡ βα πρὸς αε, καὶ ἡ γβ πρὸς βε. ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ γα πρὸς τὸ ἀπὸ αβ, οὕτως τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ γα πρὸς τὸ ἀπὸ αβ, οὕτως ἡ γα πρὸς αε. ὡς γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. ὡς ἄρα ἡ γα πρὸς αε, οὕτως τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. διὰ δὲ τῶν αὐτῶν δείκνυται, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ γα πρὸς γε, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ βε. διὰ γὰρ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ἐστὶ πάλιν, ὡς ἡ μὲν αγ πρὸς γβ, οὕτως ἡ βγ πρὸς γε. τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ, οὕτως ἡ αγ πρὸς γε, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. καὶ ὡς ἄρα ἡ αγ πρὸς γε, τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. εἶτα ἐφεξῆς δεικνύναι πειρώμενος τῷ βαζ τμήματι τῆς σφαίρας, ἴσον τὸν βκζ κῶνον. ἐκθέμενος κῶνον τὸν ν, βάσιν μὲν ἔχοντα ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ βαζ τμήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. φησὶν ὅτι ὁ ν κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ζαβθ στερεῷ τομεῖ, ὡς δέδεικται ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. ἰστέον δὲ ὅτι ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ οὐ τὸν τοιοῦτον τομέα ἀπεδείκνυεν ἴσον ὄντα τῷ οὕτως λαμβανομένῳ, ἀλλὰ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας, καὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἐλάττονος ἡμισφαιρίου, ὅν τινα καὶ κυρίως ἐν τοῖς ὅροις τομέα στερεὸν καλεῖν ἐφαίνετο. ἔφασκεν γάρ, τομέα δὲ στερεὸν καλέω. ἐπειδὰν σφαῖραν κῶνος τέμνῃ τὰν κορυφὰν ἔχων ποτὶ τῷ κέντρῳ τᾶς σφαίρας, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τοῦ κώνου ἐπιφανείας τᾶς ἐντὸς τοῦ κώνου. τὸ δὲ νῦν προκείμενον σχῆμα περιέχεται μὲν ὑπὸ κωνικῆς ἐπιφανείας, τὴν κορυφὴν ἐχούσης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας, καὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἀλλ' οὐ τῆς ἐντὸς ἀπολαμβανομένης τοῦ κώνου. ὅτι δὲ οὖν τὸ τοιοῦτον σχῆμα ἴσον γίνεται τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ

ἐπιφανείᾳ τῇ σφαιρικῇ τῇ περιεχούσῃ τὸ τμῆμα, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, δειχθήσεται οὕτως διὰ τῶν ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ δεδειγμένων.

Νενοήσθω χωρὶς σφαῖρα, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ τινὶ μὴ διὰ τοῦ κέντρου τῷ περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλῳ. κέντρον δὲ τῆς σφαίρας τὸ α. καὶ νενοήσθω κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ α σημεῖον. ἐκκείσθω δὲ κῶνος ὁ ε, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ὁ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τῇ σφαίρᾳ. τετραπλάσιος γάρ ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτό, ὅπερ ἡ σφαῖρα ἐδείχθη τετραπλασία. ἐκκείσθωσαν δὲ καὶ ἄλλοι δύο κῶνοι οἱ ζ, η, ὧν ὁ μὲν ζ βάσιν ἐχέτω ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κατὰ τὴν βγδ τμήματος, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ὁ δὲ η βάσιν μὲν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κατὰ τὴν βθδ τμήματος, ὕψος δὲ τὸ αὐτό. ὁ ζ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ τομεῖ, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ α, ἐπιφάνεια δὲ σφαιρικὴ ἡ κατὰ τὴν βγδ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ ε κώνου βάσις ταῖς τῶν ζ, η κώνων βάσεσι, καί εἰσιν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ε κῶνος, τουτέστιν ἡ σφαῖρα τοῖς ζ, η κώνοις. ἀλλ' ὁ ζ ἴσος ἐδείχθη τῷ κατὰ τὴν βγδ στερεῷ τομεῖ, κορυφὴν ἔχοντι τὸ α. λοιπὸς ἄρα ὁ η κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ λοιπῷ τμήματι, βάσιν ἔχων τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κατὰ τὴν βθδ τμήματος, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου.

Εἶτα πάλιν φησίν, ἴσος ἄρα ὁ ν κῶνος, τουτέστιν ὁ βθζα τομεύς, τῷ βθζκ σχήματι. ἐπεὶ γὰρ συνήχθη ὁ ν κῶνος, ἴσος ὢν κώνῳ οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ θκ. ὁ δὲ κῶνος οὗ βάσις μέν ἐστιν ἡ αὐτή, ὕψος δὲ ἡ εκ, ἴσος τῷ τε εἰρημένῳ κώνῳ, καὶ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν εθ. πρὸς ἀλλήλους γάρ εἰσιν ὡς τὰ ὕψη. κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν εθ. λοιπὸν τὸ βθζκ σχῆμα ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν θκ, τουτέστι τῷ ν κώνῳ, τουτέστι τῷ βαθζ τομεῖ.

Ἐπαγαγὼν δὴ τὸ ἐκ τῶν συναχθέντων πόρισμα ἐπὶ τέλει τοῦ θεωρήματος, ἑξῆς δι' ἑτέρας ἀποδείξεως συνάγει τὸ τελευταῖον μέρος τοῦ θεωρήματος, τουτέστιν ὅτι τὸ βαζ τμῆμα σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ βκζ κώνῳ. καὶ προϊὼν φησὶν ὡς ἄρα ἡ κθ πρὸς θγ, ἡ θδ πρὸς δγ. καὶ ὅλη ἡ κδ πρὸς δθ ἐστὶν ὡς ἡ δθ πρὸς δγ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θγ, ἡ θδ πρὸς δγ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, ἡ θγ πρὸς γδ. καὶ συνθέντι, ὡς ἡ κδ πρὸς δθ, ἡ θδ πρὸς δγ. τουτέστιν ἡ κθ πρὸς θα. ἦν γὰρ ὡς ἡ κθ πρὸς θγ, ἡ θδ πρὸς δγ. ἴση δὲ ἡ θγ τῇ θα. καὶ μετ' ὀλίγον, ὡς ἄρα ἡ κθ πρὸς δθ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ. ἔστιν ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κδ πρὸς τὸ ἀπὸ τῶν κθδ, οὕτως τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αεγ. νοείσθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι αἱ κδ, αγ. καὶ ἔστω ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ. λέγω ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ κδ, πρὸς τὸ ὑπὸ κθδ, οὕτως τὸ ἀπὸ αγ πρὸς

τὸ ὑπὸ

τὸ ὑπὸ αεγ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ. καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς ἡ κδ πρὸς δθ, οὕτως ἡ αγ πρὸς γε, ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ κδ πρὸς τὸ ἀπὸ θδ, ὡς τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ εγ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ. ἀλλ' ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτως τὸ ὑπὸ κθδ πρὸς τὸ ἀπὸ θδ, κοινοῦ ὕψους τῆς θδ λαμβανομένης. ὡς δὲ ἡ αε πρὸς εγ, οὕτως τὸ ὑπὸ αεγ πρὸς τὸ ἀπὸ εγ, κοινοῦ πάλιν ὕψους λαμβανομένης τῆς εγ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ κθδ πρὸς τὸ ἀπὸ θδ, οὕτως τὸ ὑπὸ αεγ πρὸς τὸ ἀπὸ εγ. ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ ἀπὸ θδ πρὸς τὸ ἀπὸ δκ, οὕτως τὸ εγ πρὸς τὸ ἀπὸ γα. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ κθδ πρὸς τὸ ἀπὸ κδ, οὕτως τὸ ὑπὸ αεγ πρὸς τὸ ἀπὸ αγ. καὶ ἀνάπαλιν, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΙΣ ΤΟ Γ.

ΩΣ δὲ οἱ εἰρημένοι κύκλοι πρὸς ἀλλήλους τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὸ ἀπὸ δβ, τουτέστιν ἡ αγ πρὸς γβ. ὡς γὰρ ἐν αὐτῇ τῇ τοῦ ῥητοῦ καταγραφῇ, ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ αδβ κάθετος ἦκται, καὶ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς ἡ δγ μέση, ἀνάλογόν ἐστι τῶν τῆς βάσεως τμημάτων. καὶ τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ βγ πρὸς δγ, ἡ βδ πρὸς δα. καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ἄρα. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ βγ πρὸς τὸ ἀπὸ γδ, οὕτως ἡ πρώτη ἡ βγ πρὸς τρίτην τὴν γα. καὶ ὡς ἄρα ἡ βγ πρὸς γα, οὕτως τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δα. δοθεὶς δὲ λόγος τῆς αγ πρὸς γβ, ὥστε δοθέν ἐστι τὸ γ σημεῖον. ἐπεὶ γὰρ ἡ σφαῖρα ὑπόκειται δεδομένη, δέδοται ἄρα καὶ ἡ διάμετρος αὐτῆς ἡ αγ. καὶ δέδοται ὁ λόγος τῆς αγ πρὸς γβ. ἐὰν δεδομένον μέγεθος εἰς δεδομένον λόγον διαιρεθῇ, δέδοται ἑκάτερον τῶν τμημάτων, ὥστε δοθεῖσά ἐστιν ἡ αγ, καὶ δοθὲν τὸ α. ἐπὶ γὰρ τῆς κοινῆς τομῆς ἐστι θέσει δεδομένων γραμμῶν, δέδοται ἄρα καὶ τὸ γ.

ΕΙΣ ΤΟ Δ.

ΚΑὶ διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον διὰ τῆς κατασκευῆς, ὡς ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ κβ πρὸς βρ, καὶ ἡ δχ πρὸς χβ. ἐν γὰρ τῷ πρὸ τούτου συνήγετο οὕτως. ἐπεί ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ κδ, δχ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ρχ πρὸς χβ. διελόντι ὡς ἡ κδ πρὸς δχ, ἡ ρβ πρὸς βχ. ἐναλλάξ, ὡς ἡ κδ, τουτέστιν ἡ κβ πρὸς βρ, ἡ δχ πρὸς χβ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ λχ πρὸς χδ, οὕτως συναμφότερος ἡ κβ, βχ πρὸς χβ. διελόντι καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ δχ πρὸς χβ. ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ δχ πρὸς χβ, ἡ κβ πρὸς βρ. ὡς ἄρα ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ δχ πρὸς χβ, καὶ ἡ κβ πρὸς βρ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ ρλ πρὸς ὅλην κλ, ἐστὶν ὡς ἡ κλ πρὸς λδ. ὡς γὰρ ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ὡς ἄρα ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ κλ πρὸς τὸ ἀπὸ κδ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ρλ πρὸς λκ, ἡ κλ πρὸς λδ. καὶ ὡς ἄρα ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, οὕτως τὸ ἀπὸ ρλ πρὸς τὸ ἀπὸ λκ, οὕτως τὸ ἀπὸ λκ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ. ἀνάλογον γάρ εἰσιν, ὡς ἄρα ἡ ρλ πρὸς λδ, οὕτως τὸ ἀπὸ λκ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ. κείσθω τῇ κβ ἴση ἡ βζ. ὅτι γὰρ ἐκτὸς τοῦ ρ πεσεῖται, δῆλον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ χδ πρὸς χβ, οὕτως ἡ κβ πρὸς βρ. μείζων δὲ ἡ δχ τῆς βχ, μείζων ἄρα καὶ ἡ κβ τῆς βρ. ἐκτὸς ἄρα τοῦ ρ πίπτει τὸ ζ.

Ἐπεὶ δὲ λόγος ἐστὶ τῆς δλ πρὸς λχ δοθείς, καὶ τῆς ρλ πρὸς λχ, καὶ τῆς ρλ ἄρα πρὸς λδ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ γὰρ ὡς συναμφότερος ἡ κβ, βχ πρὸς βχ, τουτέστιν ἡ ζχ πρὸς χβ, οὕτως ἡ λχ πρὸς χδ. ἀναστρέψαντι ὡς ἡ χζ πρὸς ζβ, οὕτως ἡ χλ πρὸς λδ. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἡ βζ πρὸς ζχ, ἡ λδ πρὸς λχ. δέδοται δὲ ὁ τῆς βζ πρὸς ζχ λόγος. ἐπειδὴ ἡ μὲν ζβ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς δεδομένης σφαίρας. ἡ δὲ βχ τῶν β, χ περάτων αὐτῆς δεδομένων, καθ' ὑπόθεσιν τετμημένης τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ διὰ τῆς αγ ἐπιπέδου. καὶ τῆς δβ πρὸς ὀρθὰς οὔσης τῇ αγ δέδοται. καὶ διὰ τοῦτο καὶ ὅλη ἡ χζ. καὶ ὁ τῆς χζ πρὸς ζβ. ὥστε καὶ ὁ τῆς λχ πρὸς λδ λόγος ἐστὶ δοθείς. πάλιν ἐπειδὴ δέδοται ὁ λόγος τῶν τμημάτων, καὶ ὁ τοῦ λαγ κώνου πρὸς αργ κῶνον λόγος ἐστὶ δοθείς. ὥστε καὶ ὁ τῆς λχ πρὸς χρ. πρὸς ἀλλήλους γάρ εἰσιν ὡς τὰ ὕψη, καὶ ὅλης ἄρα τῆς ρλ πρὸς τὴν λχ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ οὖν ἑκατέρας τῶν ρλ, λδ πρὸς τὴν λχ λόγος ἐστὶ δοθείς, καὶ τῆς ρλ ἄρα πρὸς λδ λόγος ἐστὶ δοθείς. τὰ γὰρ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχοντα δεδομένον, καὶ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει δεδομένον. ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς ρλ πρὸς λχ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ρλ πρὸς λδ, καὶ ἡ λδ πρὸς λχ. Ὅτι μὲν ἡ σύνθεσις τῶν λόγων λαμβάνεται τῆς λδ μέσης λαμβανομένης, ὡς κἂν τῇ στοιχειώσει ἐλαμβάνετο φανερόν. ἐπεὶ δὲ τὸ λεγόμενον ἀδιαρθρώτως, καὶ οὐχ οὕτως ὥστε τὴν ἔννοιαν ἀναπληρῶσαι λέλεκται,

Περὶ συνθέσεως λόγων.

κται, ὡς ἔστιν εὑρεῖν ἐν τυγχάνοντας πάππῳ τε καὶ θέωνι καὶ ἀρκαδίῳ, ἐν πολλοῖς συντάγμασιν οὐκ ἀποδεικτικῶς, ἀλλ᾽ ἐπαγωγῇ τὸ λεγόμενον παριστῶσιν, οὐδένα τόπον πρὸς βραχὺ διατρίψαντας τῷ λόγῳ, τὸ σαφέστερον παραστῆσαι. φημὶ τοίνυν, ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμῶν, ἤτοι μεγεθῶν μέσος τις ὅρος ληφθῇ, ὁ τῶν ἐξ ἀρχῆς ληφθέντων ἀριθμῶν λόγος, σύγκειται ἐκ τοῦ λόγου ὃν ἔχει ὁ πρῶτος πρὸς τὸν μέσον, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ μέσος πρὸς τὸν τρίτον, ὑπομνηστέον δὴ πρότερον πῶς ἐλέγετο λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι. ὡς γὰρ ἐν τῇ στοιχειώσει, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ᾽ ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα, πηλικότητος δηλονότι λεγομένης τοῦ ἀριθμοῦ, οὗ παρώνυμός ἐστιν ὁ διδόμενος λόγος, ὥς φασιν ἄλλοι τε καὶ νικόμαχος ἐν τῷ πρώτῳ τῷ περὶ μουσικῆς, καὶ ἡρώνας ἐν τῷ ὑπομνήματι τῷ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν εἰσαγωγήν. ταυτὸν δὲ εἰπεῖν καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸν ἑπόμενον ὅρον τοῦ λόγου, καὶ ποιοῦντος τὸν ἡγούμενον. κὴ κυριώτερον μὲν ἐπὶ τῶν πολλαπλασίων ἡ πηλικότης ἂν λαμβάνοιτο. ἐπὶ δὲ τῶν ἐπιμορίων, ἢ ἐπιμερῶν, οὐκέτι τὴν πηλικότητα δυνατὸν λαμβάνεσθαι, ἀδιαιρέτου μενούσης τῆς μονάδος, ὥστ᾽ ἐπ᾽ ἐκείνων διαιρετέον τὴν μονάδα. εἰ καὶ μὴ κατὰ τὸ προσῆκον τῇ ἀριθμητικῇ, ἀλλὰ τῇ λογιστικῇ τυγχάνει. διαιρεῖται δὲ ἡ μονὰς εἰς τὸ μέρος, ἢ τὰ μέρη ἀφ᾽ ὧν ὠνόμασται ὁ λόγος, ὥστε εἰπεῖν ὡς ἐν σαφεστέρῳ τῷ λέγειν, τοῦ μὲν ἡμιολίου λόγου πηλικότητα πρὸς τῇ μονάδι, καὶ τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος. τοῦ δὲ ἐπιτρίτου πρὸς τῇ μονάδι τὸ τρίτον, ὥστε καθὰ καὶ ἀνωτέρω εἴρηται τὴν πηλικότητα τοῦ λόγου ἐπὶ τὸν ἑπόμενον ὅρον, πολλαπλασιαζομένην ποιεῖν τὸν ἡγούμενον. τοῦ γὰρ ἐννέα πρὸς τὰ ἓξ ἡμιολίου πηλικότης, ὅ ἡ μονὰς κὴ τὸ ἥμισυ πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὸν ϛ ποιεῖ τὸν θ, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων δὲ τὸ αὐτὸ ἔξεστι κατανοεῖν. τούτων δὴ προσαφηνισθέντων ἐπανακτέον ἐπὶ τὸ προτεθέν. Ἔστωσαν γὰρ οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ α, β. μέσος δὲ αὐτῶν εἰλήφθω τις ὁ γ. δεικτέον δή, ὅτι ὁ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος συνῆπται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν β. εἰλήφθω γὰρ τοῦ μὲν α γ λόγου πηλικότης ὁ δ, τοῦ δὲ γ β ὁ ε. ὁ ἄρα ε τὸν δ πολλαπλασιάσας, τὸν ζ ποιείτω. λέγω ὅτι ὁ ζ πηλικότης ἐστὶ τοῦ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγου, τουτέστιν ὅτι ὁ ζ τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν α ποιεῖ. ὁ γὰρ β τὸν ζ πολλαπλασιάσας, τὸν η ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ β τὸν μὲν ζ πολλαπλασιάσας τὸν η πεποίηκεν, τὸν δὲ ε πολλαπλασιάσας τὸν γ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ζ πρὸς τὸν ε, ὁ η πρὸς τὸν γ. πάλιν ἐπεὶ ὁ δ τὸν μὲν ε πολλαπλασιάσας τὸν ζ πεποίηκεν, τὸν δὲ γ πολλαπλασιάσας τὸν α πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ε πρὸς τὸν γ, ὁ ζ πρὸς τὸν α. ἐναλλάξ, ὡς ὁ ε πρὸς τὸν ζ, ὁ γ πρὸς τὸν α. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ὁ ζ πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ α πρὸς τὸν γ. ἀλλ᾽ ὡς ὁ ζ πρὸς τὸν ε, ἐδείχθη ὁ η πρὸς τὸν γ. κὴ ὡς ἄρα η πρὸς τὸν γ, ὁ α πρὸς τὸν γ. ἴσος ἄρα ὁ α τῷ η. ἀλλ᾽ ὁ β τὸν ζ πολλαπλασιάσας, τὸν η πεποίηκεν. καὶ ὁ β ἄρα τὸν ζ πολλαπλασιάσας τὸν α ποιεῖ. ὁ ζ ἄρα πηλικότης ἐστὶ τοῦ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγου. κὴ ἔστιν ὁ ζ τοῦ δ ἐπὶ τὸν ε πολλαπλασιασθέντος, τουτέστι τῆς πηλικότητος τοῦ α γ λόγου, ἐπὶ τὴν πηλικότητα τοῦ γ β λόγου. ὁ ἄρα τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος, σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν β, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

α γ β δ ε ζ η

Ἵνα δὲ καὶ ἐπὶ ὑποδείγματος φανερὸν γένηται τὸ εἰρημένον, παρεμπιπτέτω τοῦ ιβ, καὶ τοῦ β, μέσος τις ἀριθμὸς ὁ δ. λέγω ὁ τοῦ ιβ πρὸς τὸν β λόγος, τουτέστιν ὁ ἑξαπλάσιος, σύγκειται ἔκ τε τοῦ τριπλασίου τοῦ ιβ πρὸς τὰ δ, καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ δ πρὸς τὰ β. ἐὰν γὰρ τὰς πηλικότητας τῶν λόγων πολλαπλασιάσωμεν ἐπ᾽ ἀλλήλας, τουτέστι τὸν γ ἐπὶ τὸν β, γίνεται ὁ ϛ πηλικότης ὢν τοῦ ιβ πρὸς τὰ β λόγου. καὶ ἔστιν ἑξαπλάσιος, ὅνπερ καὶ προέκειτο ὑποδεῖξαι. εἰ δὲ καὶ ὁ μέσος παρεμπίπτων μὴ ὑπάρχῃ τοῦ μὲν μείζονος ἐλάττων, τοῦ δὲ ἐλάττονος μείζων, ἀλλ᾽ ἢ τὸ ἀνάπαλιν, ἢ ἀμφοτέρων μείζων, ἢ ἀμφοτέρων ἐλάττων. καὶ οὕτως ἡ σύνθεσις, ἡ προειρημένη ἀκολουθήσει, τοῦ θ καὶ τοῦ ϛ μέσος τις παρεμπιπτέτω ἀμφοτέρων μείζων ὁ ιβ. λέγω ὅτι ἔκ τε τοῦ ὑπεπιτρίτου τοῦ θ πρὸς τὸν ιβ λόγου,

καὶ τοῦ

καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ιβ πρὸς τὸν ϛ, σύγκειται ὁ ἡμιόλιος τοῦ θ πρὸς τὰ ϛ. ἡ γὰρ πηλικότης τοῦ θ πρὸς τὸν ιβ λόγου ἐστὶ τρία τέταρτα, τουτέστιν ἥμισυ καὶ τέταρτον. ἡ δὲ πηλικότης τοῦ ιβ πρὸς τὸν ϛ ἐστὶν ὁ β. ἐὰν οὖν πολλαπλασιάσωμεν τὸν β ἐπὶ τὸ ἥμισυ καὶ τέταρτον, γίνεται μονὰς α καὶ ἥμισυ, ἥ τις πηλικότης ἐστὶ τοῦ ἡμιολίου λόγου, ὃν ἔχει καὶ ὁ θ πρὸς τὸν ϛ. ὁμοίως δὲ κἂν τοῦ θ καὶ τοῦ ϛ μέσος ἐμπέσῃ ὁ δ, ἐκ τοῦ θ πρὸς δ διπλασιεπιτετάρτου, καὶ τοῦ δ πρὸς ϛ ὑφημιολίου, σύγκειται ὁ ἡμιόλιος λόγος. πάλιν γὰρ τὴν πηλικότητα τοῦ διπλασιεπιτετάρτου, τὰ β δ ἐπὶ τὴν πηλικότητα τοῦ ὑφημιολίου, τουτέστι τὰ δύο τρίτα, πολλαπλασιάσαντες ἕξομεν τὸ ἓν ἥμισυ, πηλικότητα τοῦ ἡμιολίου ὡς εἴρηται λόγου, καὶ ἐπὶ πάντων ὁμοίως ὁ αὐτὸς ἁρμόσει λόγος. συμφανὲς δὲ ἐκ τῶν εἰρημένων, ὡς ἐὰν δύο δοθέντων ἀριθμῶν, ἤτοι μεγεθῶν, κἂν μὴ εἷς μέσος, πλείους δὲ παρεμπίπτωσιν ὅροι, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ πάντων τῶν λόγων, ὧν ἔχουσιν οἱ κατὰ τὸ ἑξῆς κείμενοι, ἀρχόμενοι ἀπὸ πρώτου, καὶ λήγοντες εἰς τὸν ἔσχατον τῇ κατὰ τοὺς ἐχομένους τάξει. δύο γὰρ ὅρων τῶν α, β παρεμπιπτέτωσαν πλείους ἑνὸς οἱ γ, δ. λέγω ὅτι ὁ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος, σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν β. ἐπεὶ γὰρ ὁ τοῦ α πρὸς τὸν β σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν β, ὡς ἀνωτέρω εἴρηται. ὁ δὲ τοῦ α πρὸς τὸν δ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν δ. ὁ ἄρα τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος, συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν β. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν δειχθήσεται.

α ε δ β

Ἔτι ἐν τῷ ῥητῷ φησίν, ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ρλ πρὸς λδ, ἐδείχθη τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ λκ πρὸς τὸ ἀπὸ δλ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ κλ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ, οὕτως τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. ἐδείχθη γάρ, ὡς ἡ κλ πρὸς λδ, ἡ βδ πρὸς δχ, διὰ τὸ συνθέντι. ὡς ἄρα ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. πεποιήσθω δὲ ὡς ἡ ρλ πρὸς λχ, ἡ βζ πρὸς ζθ. τὸ θ σημεῖον ὅπως ποτὲ μὲν ἐὰν τεθῇ ὅσον πρὸς τὴν ἀκολουθίαν τῆς ἀποδείξεως, κατ᾽ οὐδὲν ἐμποδὼν γίνεται τῷ λόγῳ. ὅτι δὲ καθὰ ἐν τῇ καταγραφῇ κεῖται ἀεὶ μεταξὺ τῶν β, ε πίπτει οὕτω διάδηλον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ λκ πρὸς δκ, τουτέστι πρὸς κβ, οὕτως ἡ κρ πρὸς ρβ. καὶ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα. ὡς ἡ λρ πρὸς ρκ, ἡ κρ πρὸς ρβ. μείζονα δὲ λόγον ἔχει ἡ λρ πρὸς ρχ, ἤπερ ἡ λρ πρὸς ρκ. καὶ ἡ λρ ἄρα πρὸς ρχ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κρ πρὸς βρ. τουτέστιν ἡ ζβ πρὸς ζρ. ἐὰν ἄρα ποιήσωμεν ὡς ρλ πρὸς λχ, οὕτως τὴν βζ πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται πρὸς μείζονα τῆς ζρ. φανερὸν δὲ αὐτόθεν ὅτι ἡ ζθ τῆς θβ μείζων ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ὡς ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ δχ πρὸς χβ, καὶ ἡ κβ πρὸς βρ. μείζων δὲ ἡ δχ τῆς χβ, μείζων ἄρα καὶ ἡ λδ τῆς δκ, καὶ ἡ κβ τῆς βρ. ὥστε καὶ ἡ λδ τῆς βρ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ λχ τῆς χρ μείζων ἐστίν, ὥστε καὶ ἡ θζ τῆς θβ. λοιπὸν ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ βδ, τουτέστι τὸ δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, οὕτως ἡ ζχ πρὸς ζθ. ἐπεὶ γὰρ τῷ τῆς βζ πρὸς θζ λόγῳ ὁ αὐτὸς ἐδείχθη ὁ συγκείμενος ἐκ τοῦ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, καὶ τῆς βζ πρὸς ζχ. ὁ αὐτὸς δὲ τῷ τῆς βζ πρὸς ζθ ἐστί, καὶ ὁ συγκείμενος ἐκ τοῦ τῆς βζ πρὸς ζχ, καὶ τοῦ τῆς ζχ πρὸς ζθ λόγου. καὶ ὁ συγκείμενος ἄρα ἐκ τοῦ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, καὶ τοῦ τῆς βζ πρὸς ζχ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ τῆς βζ πρὸς ζχ, καὶ τοῦ τῆς χζ πρὸς ζθ. ἐὰν οὖν τὸν ἐν ἀμφοτέροις τοῖς λόγοις κοινὸν ἀφέλωμεν τὸν τῆς βζ πρὸς ζχ, λοιπὸς ὁ τοῦ ἀπὸ βδ πρὸς ἀπὸ δχ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς χζ πρὸς ζθ. καὶ δὴ δοθεῖσαν τὴν δζ τέμνειν δεῖ κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὴν χζ πρὸς δοθεῖσαν, τουτέστι τὴν ζθ, οὕτως τὸ δοθέν, τουτέστι τὸ ἀπὸ βδ, πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. τοῦτο δὲ οὕτως ἁπλῶς μὲν λεγόμενον ἔχει διορισμόν. προστιθεμένων δὲ τῶν προβλημάτων τῶν ἐνθάδε ὑπαρχόντων, τουτέστι τοῦ τε διπλασίαν εἶναι τὴν δβ τῆς βζ, καὶ τοῦ μείζονα τὴν βζ τῆς ζθ, ὡς κατὰ τὴν ἀνάλυσιν οὐκ ἔχει διορισμόν, καὶ ἔσται πρόβλημα τοιοῦτον. δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν δβ, βζ, καὶ διπλασίας οὔσης τῆς δβ τῆς βζ, καὶ σημείου ἐπὶ τῆς βζ τοῦ θ, τεμεῖν τὴν δβ κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὸ ἀπὸ δβ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, τὴν χζ πρὸς ζθ. ἑκάτερα δὲ ταῦτα ἐπὶ τέλει ἀναλυθήσεται, καὶ συντεθήσεται. ἐπὶ τέλει μὲν τὸ προ-

ῥηθὲν ἐπηγγείλατο δεῖξαι, ἐν οὐδενὶ δὲ τῶν ἀντιγράφων εὑρεῖν. ἔνεστι δὲ τὸ ἐπάγγελμα, ὅθεν καὶ Διονυσόδωρον μὲν εὑρίσκομεν μὴ τῶν αὐτῶν ἐπιτυχόντα, ἀδυνατήσαντα δὲ ἐπιβάλλειν τῷ καταλειφθέντι λήμματι, ἐφ' ἑκατέραν ὁδὸν τοῦ ὅλου προβλήματος ἐλθεῖν, ἥν τινα ἑξῆς γράψομεν. Διοκλῆς μέντοι καὶ αὐτὸ ἐν τῷ περὶ πυρείων αὐτῷ συγγεγραμμένῳ βιβλίῳ, ἐπηγγέλθαι νομίζων τὸν Ἀρχιμήδη, μὴ πεποιηκέναι δὲ τὸ ἐπάγγελμα, αὐτὸς ἀναπληροῦν ἐπεχείρησε. καὶ τὸ ἐπιχείρημα ἑξῆς γράψομεν. ἔστι γὰρ καὶ αὐτὸ οὐδένα μὲν ἔχον πρὸς τὰ παραλελειμμένα λόγον. ὁμοίως δὲ τῷ Διονυσοδώρῳ δι' ἑτέρας ἀποδείξεως κατασκευάζον τὸ πρόβλημα, ἐν τινι μέντοι παλαιῷ βιβλίῳ. οὐδὲ γὰρ τῆς εἰς πολλὰ ζητήσεως ἀπέστημεν, ἐνετύχαμεν θεωρήμασι γεγραμμένοις, οὐκ ὀλίγην τὴν ἐκ τῶν πταισμάτων ἔχουσιν ἀσάφειαν περί τε τὰς καταγραφὰς πολυτρόπως ἡμαρτημένοις. τῶν μέντοι ζητουμένων, εἶχον τὴν ὑπόστασιν, ἐν μέρει δὲ τὴν Ἀρχιμήδει φίλην Δωρίδα γλῶσσαν ἀπέσωζον, καὶ τοῖς συνήθεσι τῶν ἀρχαίων τῶν πραγμάτων ὀνόμασιν ἐγέγραπτο. τῆς μὲν παραβολῆς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς ὀνομαζομένης, τῆς δ' ὑπερβολῆς ἀμβλυγωνίου κώνου τομῆς. ὡς ἐξ αὐτῶν διανοεῖσθαι, μὴ ἄρα καὶ αὐτὸς εἴη τὰ ἐν τῷ τέλει ἐπηγγελμένα γράφεσθαι. ὅθεν σπουδαιότερον ἐντυγχάνοντες, αὐτὸ μὲν τὸ ῥητὸν ὡς γέγραπται διὰ πλῆθος, ὡς εἴρηται τῶν πταισμάτων δυσχερὲς εὑρόντες, τὰς ἐννοίας κατὰ μικρὸν ἀποσυλήσαντες κοινοτέρᾳ καὶ σαφεστέρᾳ κατὰ τὸ δυνατὸν λέξει γράφομεν. καθόλου δὲ πρῶτον τὸ θεώρημα γραφήσεται, ἵνα τὸ λεγόμενον ὑπ' αὐτοῦ σαφηνισθῇ περὶ τῶν † διορισμένων. εἶτα καὶ τοῖς ἀναλελυμένοις ἐν τῷ προβλήματι προσαρμοσθήσεται.

† διορισμῶν

Εὐθείας δοθείσης τῆς α β, καὶ ἑτέρας τῆς α γ, καὶ χωρίου τοῦ δ, προκείσθω λαβεῖν ἐπὶ τῆς α β σημεῖον ὡς τὸ ε. ὥστε εἶναι ὡς τὴν α ε πρὸς α γ, οὕτω τὸ δ χωρίον πρὸς τὸ ἀπὸ ε β. γεγονέτω, καὶ κείσθω ἡ α γ πρὸς ὀρθὰς τῇ α β. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γ ε διήχθω ἐπὶ τὸ ζ. καὶ ἤχθω διὰ τοῦ γ τῇ α β παράλληλος ἡ γ η, διὰ δὲ τοῦ β τῇ α γ παράλληλος ἡ ζ η β, συμπίπτουσα ἑκατέρᾳ τῶν γ ε, γ η. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ η θ παραλληλόγραμμον, καὶ διὰ τοῦ ε ὁποτέρᾳ τῶν γ θ, η ζ παράλληλος ἤχθω ἡ κ ε λ. καὶ τῷ δ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ γ η μ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ε α πρὸς α γ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ ε β. ὡς δὲ ἡ ε α πρὸς α γ, οὕτως ἡ γ η πρὸς η ζ. ὡς δὲ ἡ γ η πρὸς η ζ, οὕτως τὸ ἀπὸ γ η πρὸς τὸ ὑπὸ γ η ζ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ γ η πρὸς τὸ ὑπὸ γ η ζ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ ε β, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ η ζ. καὶ ἐναλλὰξ, ὡς τὸ ἀπὸ γ η πρὸς τὸ δ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ γ η μ, οὕτως τὸ ὑπὸ γ η ζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζ κ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ γ η πρὸς τὸ ὑπὸ γ η μ, οὕτως ἡ γ η πρὸς η μ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γ η πρὸς η μ, οὕτως τὸ ὑπὸ γ η ζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζ κ. ἀλλ' ὡς ἡ γ η πρὸς η μ, τῆς η ζ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γ η ζ πρὸς τὸ ὑπὸ μ η ζ. ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ γ η ζ πρὸς τὸ ὑπὸ μ η ζ, οὕτως τὸ ὑπὸ γ η ζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζ κ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ μ η ζ τῷ ἀπὸ ζ κ. ἐὰν ἄρα περὶ ἄξονα τὴν ζ η, γραφῇ διὰ τοῦ η παραβολὴ, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν η μ, ἥξει διὰ τοῦ κ. καὶ ἔσται θέσει δεδομένη, διὰ τὸ δεδομένην εἶναι τὴν η μ τῷ μεγέθει, περιέχουσαν μετὰ τῆς η γ δεδομένης δοθὲν τὸ δ. τὸ ἄρα κ ἅπτεται θέσει δεδομένης παραβολῆς. γεγράφθω οὖν, ὡς εἴρηται. καὶ ἔστω ὡς ἡ θ η κ. πάλιν ἐπεὶ δὴ τὸ θ λ χωρίον

ἴσον

ἴσον ἐστὶ τῷ γβ, τουτέστι τὸ ὑπὸ θκλ τῷ ὑπὸ αβκ. ἐὰν διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς θγ, γκ γραφῇ ὑπερβολὴ ἥξει διὰ τοῦ κ, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ η θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. καὶ ἔσται θέσει δεδομένη, διὰ τὸ καὶ ἑκατέραν τῶν θγ, γκ, ἔτι μὴν καὶ τὸ β τῇ θέσει δεδόσθαι. γεγράφθω ὡς εἴρηται, καὶ ἔστω ὡς ἡ κβ. τὸ ἄρα κ ἅπτεται θέσει δεδομένης ὑπερβολῆς. ἥπτετο δὲ καὶ θέσει δεδομένης παραβολῆς. δέδοται ἄρα τὸ κ, καὶ ἔστιν ἀπ᾽ αὐτοῦ κάθετος ἡ κε, ἐπὶ θέσει δεδομένην τὴν αβ. δέδοται ἄρα τὸ ε. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ εα πρὸς τὴν δοθεῖσαν τὴν αγ, οὕτως δοθὲν τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ εβ. δύο ἄρα στερεῶν ὧν βάσεις τὸ ἀπὸ εβ, καὶ τὸ δ. ὕψη δὲ αἱ εα, αγ, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ὥστε ἴσα ἐστὶ τὰ στερεά. τὸ ἄρα ἀπὸ εβ ἐπὶ τὴν εα, ἴσον ἐστὶ τῷ δοθέντι τῷ δ, ἐπὶ δοθεῖσαν τὴν γα. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ βε ἐπὶ τὴν εα μέγιστον ἐστὶ πάντων τῶν ὁμοίως λαμβανομένων ἐπὶ τῆς βα. ὅταν ἡ διπλασία ἡ βε τῆς εα, ὡς δειχθήσεται. δεῖ ἄρα τὸ δοθὲν ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς βε ἐπὶ τὴν εα.

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ αβ. ἄλλη δέ τις δοθεῖσα ἡ αγ, τὸ δὲ δοθὲν χωρίον τὸ δ. καὶ δέον ἔστω τεμεῖν τὴν αβ, ὥστε εἶναι ὡς τὸ ἓν τμῆμα πρὸς τὴν δοθεῖσαν τὴν αγ, οὕτως τὸ δοθὲν τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος. εἰλήφθω τῆς αβ τρίτον μέρος ἡ αε, τὸ ἄρα δ ἐπὶ τὴν αγ, ἤτοι μεῖζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς βε ἐπὶ τὴν εα, ἢ ἴσον, ἢ ἔλασσον. εἰ μὲν οὖν μεῖζον ἐστὶν, οὐ συντεθήσεται, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει δέδεικται. εἰ δὲ ἴσον ἐστὶ, τὸ ε σημεῖον ποιήσει τὸ πρόβλημα. ἴσων γὰρ ὄντων τῶν στερεῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ἔστιν ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. εἰ δὲ ἔλασσον ἐστὶ τὸ δ ἐπὶ τὴν αγ, τοῦ ἀπὸ βε ἐπὶ τὴν εα, συντεθήσεται οὕτως. κείσθω ἡ αγ πρὸς ὀρθὰς τῇ αβ, καὶ διὰ τοῦ γ τῇ αβ παράλληλος ἤχθω ἡ γζ. διὰ δὲ τοῦ β τῇ αγ παράλληλος ἤχθω ἡ βζ, καὶ συμπιπτέτω τῇ γε ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ η. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ζθ παραλληλόγραμμον, καὶ διὰ τοῦ ε τῇ ζη παράλληλος ἤχθω ἡ κελ. ἐπεὶ οὖν τὸ δ ἐπὶ τὴν αγ, ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ βε ἐπὶ τὴν εα. ἐστὶν ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως τὸ δ πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ἀπὸ τῆς βε, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς ηκ. ἔστω οὖν ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ ημ. καὶ τῷ δ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ γζν. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως τὸ δ, τουτέστι τὸ ὑπὸ γζν πρὸς τὸ ἀπὸ ημ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως ἡ γζ πρὸς ζη. ὡς δὲ ἡ γζ πρὸς ζη, οὕτως τὸ ἀπὸ γζ πρὸς τὸ ὑπὸ γζη. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ γζ πρὸς τὸ ὑπὸ γζη, οὕτως τὸ ὑπὸ γζν πρὸς τὸ ἀπὸ ημ. καὶ ἐναλλὰξ, ὡς τὸ ἀπὸ γζ πρὸς τὸ ὑπὸ γζν, οὕτως τὸ ὑπὸ γζη πρὸς τὸ ἀπὸ ημ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ γζ πρὸς τὸ ὑπὸ γζν, οὕτως ἡ γζ πρὸς ζν. ὡς δὲ ἡ γζ πρὸς ζν τῆς ζη κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γζη πρὸς τὸ ὑπὸ νζη. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ γζη πρὸς τὸ ὑπὸ νζη, οὕτως τὸ ὑπὸ γζη πρὸς τὸ ἀπὸ ημ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ ημ τῷ ὑπὸ ηζν. ἐὰν ἄρα διὰ τοῦ ζ περὶ ἄξονα τὴν ζη γράψωμεν παραβολὴν, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν ζν, ἥξει διὰ τοῦ μ. γεγράφθω, καὶ ἔστω ἡ μξζ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ θλ τῷ αζ, τουτέστι τὸ ὑπὸ θκλ τῷ ὑπὸ αβζ. ἐὰν διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς θγ, γζ γράψωμεν ὑπερβολὴν, ἥ-

 ξει διὰ

ξει διὰ τοῦ κ, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ η θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. γεγράφθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ βκ, τέμνουσα τὴν παραβολὴν κατὰ τὸ ξ. καὶ ἀπὸ τοῦ ξ ἐπὶ τὴν αβ κάθετος ἤχθω ἡ ξοπ. καὶ διὰ τοῦ ξ τῇ αβ παράλληλος ἤχθω ἡ ρξσ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ βκζ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ θγ, γζ. καὶ παράλληλοι ἠγμέναι εἰσὶν αἱ ρξπ, ταῖς αβζ. ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ρξπ τῷ ὑπὸ αβζ, ὥστε καὶ τὸ ρο τῷ οζ. ἐὰν ἄρα ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ τὸ σ ἐπιζευχθῇ, ἥξει διὰ τοῦ ο. ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ γοϲ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ οα πρὸς αγ, οὕτως ἡ οβ πρὸς βϲ, τουτέστιν ἡ γζ πρὸς ζϲ. ὡς δὲ ἡ γζ πρὸς ζϲ, τῆς ζν κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γζν πρὸς τὸ ὑπὸ ϲζν. καὶ ὡς ἄρα ἡ οα πρὸς αγ, οὕτως τὸ ὑπὸ γζν πρὸς τὸ ὑπὸ ϲζν. καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ γζν, τὸ δ χωρίον. τῷ δὲ ὑπὸ ϲζν, ἴσον τὸ ἀπὸ ϲξ, τουτέστι τὸ ἀπὸ βο, διὰ τὴν παραβολήν. ὡς ἄρα ἡ οα πρὸς αγ, οὕτως τὸ δ χωρίον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βο. εἴληπται ἄρα τὸ ο σημεῖον, ποιοῦν τὸ πρόβλημα.

Ὅτι διπλασίας οὔσης τῆς βε τῆς εα, τὸ ἀπὸ τῆς βε ἐπὶ τὴν εα μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν ὁμοίως λαμβανομένων ἐπὶ τῆς βα, δειχθήσεται οὕτως. ἔστω γὰρ ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει πάλιν δοθεῖσα εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς τῇ αβ, ἡ αγ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γε ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ διὰ τοῦ β παραλλήλῳ, ἠγμένῃ τῇ αγ κατὰ τὸ ζ. καὶ διὰ τῶν γζ παράλληλοι τῇ αβ ἤχθωσαν αἱ θζ, γη. καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ γα ἐπὶ τὸ θ. καὶ ταύτῃ παράλληλος διὰ τοῦ ε ἤχθω ἡ κελ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως τὸ ὑπὸ γημ πρὸς τὸ ἀπὸ εβ. τὸ ἄρα ἀπὸ βε ἐπὶ τὴν εα, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γημ ἐπὶ τὴν αγ, διὰ τὸ δύο στερεῶν ἀντιπεπονθέναι τὰς βάσεις τοῖς ὕψεσι. λέγω οὖν, ὅτι τὸ ὑπὸ γημ ἐπὶ τὴν αγ, μέγιστόν ἐστι πάντων ὁμοίως ἐπὶ τῆς βα λαμβανομένων. γεγράφθω γὰρ διὰ τοῦ η περὶ ἄξονα τὴν ζη παραβολή. ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν ημ. ἥξει δὴ διὰ τοῦ κ, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει δέδεικται. καὶ συμπεσεῖται ἐκβαλλομένη τῇ θγ παραλλήλῳ οὔσῃ τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς, διὰ τὸ ἕβδομον καὶ εἰκοστὸν θεώρημα τοῦ πρώτου βιβλίου τοῦ Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω κατὰ τὸ ν. καὶ διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς νγη, γεγράφθω ὑπερβολή. ἥξει ἄρα διὰ τοῦ κ, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει εἴρηται. ἐρχέσθω οὖν ὡς ἡ βκ. καὶ ἐκβληθείσῃ τῇ ζη ἴση κείσθω ἡ νξ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ξκ. καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ο. φανερὸν ἄρα ὅτι ἐφάπτεται τῆς παραβολῆς

διὰ

διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ τετάρτου καὶ τριακοστοῦ θεωρήματος τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἐπεὶ οὖν διπλῆ ἐστιν ἡ β ε τῆς ε α, οὕτως γὰρ ὑπόκειται, τουτέστιν ἡ ζ κ τῆς κ θ. καὶ ἔστιν ὅμοιον τὸ ο θ κ τρίγωνον τῷ ξ ζ κ τριγώνῳ. διπλασία ἐστὶ καὶ ἡ ξ κ τῆς κ ο. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ξ κ τῆς κ π διπλῆ, διὰ τὸ καὶ τὴν ξ ζ τῆς ξ κ. καὶ παράλληλον εἶναι τὴν π κ τῇ κ ζ. ἴση ἄρα ἡ ο κ τῇ κ π, ἡ ἄρα ο κ π ψαύουσα τῆς παραβολῆς, καὶ μεταξὺ οὖσα τῶν ἀσυμπτώτων δίχα τέμνεται. ἐφάπτεται ἄρα τῆς ὑπερβολῆς, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ τρίτου θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἐφήπτετο δὲ καὶ τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ αὐτὸ κ. ἡ ἄρα παραβολὴ τῆς ὑπερβολῆς ἐφάπτεται κατὰ τὸ κ. νενοήσθω οὖν καὶ ἡ ὑπερβολὴ προσεκβαλλομένη ὡς ἐπὶ τὸ ρ. καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς α β τυχὸν σημεῖον τὸ σ, καὶ διὰ τοῦ ς τῇ κ λ παράλληλος ἤχθω ἡ τ σ υ. καὶ συμβαλλέτω τῇ ὑπερβολῇ κατὰ τὸ τ, καὶ διὰ τοῦ τ τῇ γ η παράλληλος ἤχθω ἡ φ τ χ. ἐπεὶ οὖν διὰ τὴν ὑπερβολὴν καὶ τὰς ἀσυμπτώτους, ἴσον ἐστὶ τὸ φ υ τῷ γ β, κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ γ σ. ἴσον γὰρ τὸ φ ς τῷ σ η, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ τὸ χ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἥξει διὰ τοῦ σ. ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ γ σ χ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ψ χ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ χ η μ διὰ τὴν παραβολήν, τὸ ἀπὸ τ χ ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ χ η μ. γεγονέτω οὖν τῷ ἀπὸ τ χ ἴσον τὸ ὑπὸ χ η ω. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ σ α πρὸς α γ, οὕτως ἡ γ η πρὸς η χ. ἀλλ᾿ ὡς ἡ γ η πρὸς η χ τῆς η ω κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γ η ω πρὸς τὸ ὑπὸ χ η ω. καὶ πρὸς τὸ ἴσον αὐτῷ, τὸ ἀπὸ χ τ, τουτέστι τὸ ἀπὸ β σ ἐπὶ τὴν σ α ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γ η ω ἐπὶ τὴν γ α. τὸ δὲ ὑπὸ γ η ω, ἐπὶ τὴν γ α ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ γ η μ ἐπὶ τὴν γ α, τὸ ἄρα ἀπὸ β σ ἐπὶ τῆς σ α ἔλαττον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ β ε ἐπὶ τῆς ε α. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ πάντων τῶν σημείων τῶν μεταξὺ λαμβανομένων τῶν ε, β. ἀλλὰ δὴ εἰλήφθω μεταξὺ τῶν ε, α σημεῖον τὸ ς. λέγω ὅτι καὶ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τὴν ε α μεῖζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ β ς ἐπὶ τὴν ς α. τῶν γὰρ αὐτῶν κατεσκευασμένων ἤχθω διὰ τοῦ ς τῇ κ λ παράλληλος ἡ ψ ς ρ. καὶ συμβαλλέτω τῇ ὑπερβολῇ κατὰ τὸ ρ. συμβαλεῖ γὰρ αὐτῇ διὰ τὸ παράλληλος εἶναι τῇ ἀσυμπτώτῳ, καὶ διὰ τοῦ ρ παράλληλος ἀχθεῖσα τῇ α β ἡ α ρ β. συμβαλλέτω τῇ η ζ ἐκβαλλομένῃ κατὰ τὸ β. καὶ ἐπεὶ πάλιν διὰ τὴν ὑπερβολὴν ἴσον ἐστὶ τὸ γ ψ καὶ τῷ α ψ, ἡ ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ τὸ β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, ἥξει διὰ τοῦ ς. ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ γ ς β. καὶ ἐπεὶ πάλιν διὰ τὴν παραβολὴν ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ α β τῷ ὑπὸ β η μ, τὸ ἄρα ἀπὸ ρ β ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ β η μ. γεγονέτω τὸ ἀπὸ ρ β ἴσον τῷ ὑπὸ β η ω. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ς α πρὸς α γ, οὕτως ἡ γ η πρὸς η β. ἀλλ᾿ ὡς ἡ γ η πρὸς η β τῆς η ω κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γ η ω πρὸς τὸ ὑπὸ β η ω. τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ ρ β, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ β ς. τὸ ἄρα ἀπὸ β ς ἐπὶ τὴν ς α, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γ η ω ἐπὶ τὴν γ α. καὶ μεῖζον τὸ ὑπὸ γ η μ τοῦ ὑπὸ γ η ω. μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ β ε ἐπὶ τὴν ε α, τοῦ ἀπὸ β ς ἐπὶ τὴν ς α. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ πάντων τῶν σημείων τῶν μεταξὺ τῶν ε, α λαμβανομένων. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ πάντων τῶν μεταξὺ τῶν ε, β λαμβανομένων. πάντων ἄρα τῶν ἐπὶ τῆς α β ὁμοίως λαμβανομένων, μέγιστον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τὴν ε α, ὅταν ἡ διπλασία ἡ β ε τῆς ε α. ἐπιστῆσαι δὲ χρὴ καὶ τοῖς ἀκολουθοῦσι κατὰ τὴν εἰρημένην καταγραφήν. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται τὸ ἀπὸ β σ ἐπὶ τὴν σ α, καὶ τὸ ἀπὸ β ς ἐπὶ τὴν ς α ἔλασσον τοῦ ἀπὸ β ε ἐπὶ τῆς ε α. δυνατόν ἐστι καὶ τοῦ δοθέντος χωρίου ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἐλάσσονος ὄντος τοῦ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τῆς ε α κατὰ δύο σημεῖα τῆς α β τεμνομένην ποιεῖν τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα. τοῦτο δὲ γίνεται, εἰ νοήσαιμεν περὶ διάμετρον τὴν χ η γραφομένην παραβολήν. ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν η ω. ἡ γὰρ τοιαύτη παραβολή, πάντως ἔρχεται διὰ τοῦ τ. καὶ ἐπειδὴ ἀνάγκη αὐτὴν συμπίπτειν τῇ γ ν παραλλήλῳ οὔσῃ τῇ διαμέτρῳ, δῆλον ὅτι τέμνει τὴν ὑπερβολήν, καὶ κατ᾿ ἄλλο σημεῖον ἀνωτέρω τοῦ κ, ὡς ἐνταῦθα κατὰ τὸ ρ. καὶ ἀπὸ τοῦ ρ ἐπὶ τὴν α β κάθετος ἀγομένη, ὡς ἐνταῦθα ἡ ρ ς τέμνει τὴν α β κατὰ τὸ ς. ὥστε τὸ ς σημεῖον ποιεῖν τὸ πρόβλημα, καὶ ἴσον γίνεσθαι τὸ ἀπὸ β σ ἐπὶ τὴν σ α, τῷ ἀπὸ β ς ἐπὶ τὴν ς α, ὡς ἐστὶ διὰ τῶν προειρημένων ἀποδείξεων ἐμφανές. ὥστε δυνατοῦ ὄντος ἐπὶ τῆς β α δύο σημεῖα λαμβάνειν, ποιοῦντα τὸ ζητούμενον, ἔξεστιν ὁπότερον τις βούλοιτο λαμβάνειν, ἢ τὸ μεταξὺ τῶν ε, β. ἢ τὸ μεταξὺ τῶν ε, α. εἰ μὲν γὰρ τὸ μεταξὺ τῶν ε, β ὡς εἴρηται τῆς διὰ τῶν η, τ σημείων γραφομένης παραβολῆς κατὰ δύο σημεῖα τεμνούσης τὴν ὑπερβολὴν τὸ μὲν ἐγγύτερον τοῦ η, τουτέστι τοῦ ἄξονος τῆς παραβολῆς εὑρήσει τὸ μεταξὺ τῶν ε, β, ὡς ἐνταῦθα τὸ τ εὑρίσκει τὸ σ. τὸ δὲ ἀπωτέρω τὸ μεταξὺ τῶν ε, α ὡς ἐνταῦθα τὸ ρ εὑρίσκει τὸ ς.

Καθόλου μὲν οὖν οὕτως ἀναλέλυται καὶ συντίθεται τὸ πρόβλημα. ἵνα δὲ καὶ τοῖς ἀρχι-

μένοις ῥήμασιν ἐφαρμόσαι, νενοήσθω ὡς ἐν αὐτῇ τῇ τοῦ ῥητοῦ καταγραφῇ, διάμετρος μὲν τῆς σφαίρας ἡ δβ. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ βζ, καὶ ἡ δεδομένη ἡ ζθ. κατηντήσαμεν ἄρα φησὶν εἰς τὸ τὴν δζ τεμεῖν κατὰ τὸ χ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν χζ πρὸς τὴν δοθεῖσαν, οὕτως τὸ δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δχ. τοῦτο δὲ ἁπλῶς μὲν λεγόμενον ἔχει διορισμόν. εἰ γὰρ τὸ δοθὲν ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν μεῖζον ἐτύγχανεν τοῦ ἀπὸ τῆς δβ ἐπὶ τὴν βζ, ἀδύνατον ἦν τὸ πρόβλημα, ὡς δεδείκται. εἰ δὲ ἴσον τὸ β σημεῖον ἐποίει τὸ πρόβλημα, καὶ οὕτως δὲ οὐδὲν ἦν πρὸς τὴν ἐξαρχῆς ἀρχιμήδους πρόθεσιν. ἡ γὰρ σφαῖρα οὐκ ἐτέμνετο εἰς τὸν δοθέντα λόγον. ἁπλῶς γὰρ λεγόμενον εἶχον πρὸς διορισμόν. προστιθεμένων δὲ τῶν προβλημάτων τῶν ἐνθάδε ὑπαρχόντων, τουτέστι τοῦ τε διπλασίαν εἶναι τὴν δβ τῆς ζβ, καὶ τοῦ μείζονα εἶναι τὴν βζ τῆς ζθ, οὐκ ἔχει διορισμόν. τὸ γὰρ ἀπὸ δβ τὸ δοθὲν ἐπὶ τὴν ζθ τὴν δοθεῖσαν ἔλαττόν ἐστι, τοῦ ἀπὸ τῆς δβ ἐπὶ τῆς βζ. διὰ τὸ τὴν βζ τῆς ζθ μείζονα εἶναι, οὗπερ ὑπάρχοντος, ὡς ἐδείξαμεν δυνατόν, καὶ ὅπως προκεῖται τὸ πρόβλημα. κατανοεῖν δὲ χρὴ καὶ τοῖς ὑπ' ἀρχιμήδους λεγομένοις συμφώνως ἔχουσιν τοῖς ὑφ' ἡμῶν ἀναλελυμένοις. πρότερον μὲν γὰρ μετὰ τὴν ἀνάλυσιν αὐτοῦ καθόλου τὸ εἰς ὃ κατήντησεν λέγων, φησί. δοθεῖσαν τὴν δζ τεμεῖν δεῖ κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὸ χζ πρὸς δοθεῖσαν, οὕτως τὸ δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δχ. εἶτα εἰπὼν ὡς καθόλου μὲν τὸ λεγόμενον ἔχει διορισμόν. προστεθέντων δὲ τῶν ὑπ' αὐτοῦ εὑρεθέντων προβλημάτων, τοῦ τε εἶναι διπλασίαν τὴν δβ τῆς βζ. καὶ μείζονα τὴν βζ τῆς ζθ. μὴ ἔχειν διορισμὸν μερικώτερον, ἐπαναλαμβάνει τὸ πρόβλημα. καὶ φησίν, ὅτι καὶ ἔσται πρόβλημα τοιοῦτον. δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν δβ, βζ, καὶ διπλασίας οὔσης τῆς δβ τῆς βζ, καὶ σημείου ἐπὶ τῆς βζ τοῦ θ, τεμεῖν τὴν δβ κατὰ τὸ χ, οὐκέτι ὡς πρότερον τὴν δζ εἰπών, ἀλλὰ τὴν δβ δεῖν τεμεῖν διὰ τὸ ὡς ἀνωτέρω ἡμεῖς ἀπεδείξαμεν εἰδέναι αὐτόν, ὡς δύο σημεῖα ἐστὶ τὰ λαμβανόμενα ἐπὶ τῆς δζ, καὶ ποιοῦντα τὸ πρόβλημα, ἓν μὲν τὸ μεταξὺ τῶν δ, β. ἕτερον δὲ τὸ μεταξὺ τῶν β, ζ. ὧν τὸ μεταξὺ τῶν δ, β ἦν τὸ πρὸς τὴν ἐξαρχῆς πρόθεσιν χρήσιμον.

Ταῦτα μὲν οὖν ἀκόλουθα τοῖς ἀρχιμήδους ῥήμασι, κατὰ τὸ δυνατὸν σαφῶς ἀπεγράψαμεθα. ἐπεὶ δὲ ὡς προείρηται καὶ διονυσόδωρος οὐδαμῶς τοῖς ἐπὶ τέλει γραφομένοις παρ' ἀρχιμήδους ἐπηγγελμένοις ἐντυχών, ἀτονήσας δὲ ὥσπερ προσευρεῖν τὰ μὴ ἐκτεθέντα, ἐφ' ἑτέραν ὁδὸν βαδίζων τοῦ ὅλου προβλήματος, οὐκ ἄχαριν εὑρέσεως συνέγραψε τὸ πρᾶγμα ἀναγκαῖον, ᾠήθημεν δεῖν καὶ αὐτὸν τούτοις ἐπισυνάψαι διορθωσάμενοι κατὰ δύναμιν. καὶ γὰρ αὐτὸς ἐκ πολλῆς ἀμελετησίας τῶν ἀνθρώπων τὰ πολλὰ τῶν ἀποδείξεων τῷ πλήθει τῶν πταισμάτων ἠφανισμένην ἔχων ἐν πᾶσιν οἷς ἡμεῖς ἐντύχαμεν ἀντιγράφοις ἐφεῦρον.

ΩΣ ΔΙΟΝΥΣΟΔΩΡΟΣ.

Τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα αὐτῆς πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν δοθέντα. ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, ἧς διάμετρος ἡ αβ. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος, ὃν ἔχει ἡ γδ πρὸς δε. δεῖ δὴ τεμεῖν τὴν σφαῖραν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὴν αβ, ὥστε τὸ τμῆμα οὗ κορυφὴ τὸ α, πρὸς τὸ τμῆμα οὗ κορυφὴ τὸ β λόγον ἔχειν, ὃν ἔχει ἡ γδ πρὸς δε. ἐκβεβλήσθω ἡ βα ἐπὶ τὸ ζ. καὶ κείσθω τῆς αβ ἡμίσεια ἡ αζ. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ γε πρὸς εδ, ἐχέτω ἡ ζα πρὸς αη, καὶ ἔστω ἡ αη πρὸς ὀρθὰς τῇ αβ. καὶ τῶν ζα, αη μέση ἀνάλογον εἰλήφθω ἡ αθ. μείζων ἄρα ἡ αθ τῆς αη. καὶ περὶ ἄξονα τὴν ζβ διὰ τοῦ ζ γεγράφθω παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν αη. ἥξει ἄρα διὰ τοῦ θ. ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ ζαη ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ αθ. γεγράφθω οὖν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ζθκ. καὶ διὰ τοῦ β ἀνήχθω παρὰ τὴν

τὴν αθ ἡ βκ, καὶ τεμνέτω τὴν παραβολὴν κατὰ τὸ κ, καὶ διὰ τοῦ η. περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ζβκ, γεγράφθω ὑπερβολή. τεμεῖ δὴ τὴν παραβολὴν μεταξὺ τῶν θ, κ, τεμνέτω κατὰ τὸ λ. καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὴν αβ κάθετος ἤχθω ἡ λμ. καὶ διὰ τῶν κ, λ τῇ αβ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ κν, λξ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ κλ, ἀσύμπτωτοι δὲ α βκ, καὶ παράλληλοι ταῖς ακν, αἱ μλξ, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ακν τῷ ὑπὸ μλξ, διὰ τὸ η θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἀλλ' ἡ μὲν κν τῇ αβ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ λξ τῇ μβ, τὸ ἄρα ὑπὸ λμβ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ καβ. καὶ διὰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ λμ πρὸς κα, οὕτως ἡ αβ πρὸς βμ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ λμ πρὸς τὸ ἀπὸ κα, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βμ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν παραβολὴν τὸ ἀπὸ λμ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ζμ, ακ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζμ πρὸς μλ, ἡ μλ πρὸς ακ. καὶ ὡς ἄρα ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. καὶ τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης. ὡς ἄρα ἡ ζμ πρὸς ακ, οὕτως τὸ ἀπὸ λμ πρὸς τὸ ἀπὸ κα. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ λμ πρὸς τὸ ἀπὸ ακ, οὕτως ἐδείχθη τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βμ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βμ, οὕτως ἡ ζμ πρὸς αη. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βμ, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αβ, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ βμ. καὶ ὡς ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αβ, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ βμ, οὕτως ἡ ζμ πρὸς αβ. ὁ ἄρα κῶνος βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αβ, ὕψος δὲ τὴν αη, ἴσος ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ βμ, ὕψος δὲ τὴν ζμ. ὧν γὰρ κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσὶν ἐκεῖνοι. ἀλλ' ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αβ, ὕψος δὲ τὴν ζα, πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν αη, ἐστὶν ὡς ἡ ζα πρὸς αη, τουτέστιν ἡ γε πρὸς εδ. ἐπεὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ὕψη. καὶ ὁ κῶνος ἄρα βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αβ, ὕψος δὲ τὴν ζα, πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ βμ, ὕψος δὲ τὴν ζμ, ἐστὶν ὡς ἡ γε πρὸς εδ. ἀλλ' ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αβ, ὕψος δὲ τὴν ζα, ἴσος ἐστὶ τῇ σφαίρᾳ. ὁ δὲ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ βμ, ὕψος δὲ τὴν ζμ, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, οὗ κορυφὴ μέν ἐστι τὸ β, ὕψος δὲ ἡ βμ. ὡς ἑξῆς δειχθήσεται. καὶ ἡ σφαῖρα ἄρα πρὸς τὸ εἰρημένον τμῆμα λόγον ἔχει, ὃν ἡ γε πρὸς εδ. καὶ διελόντι τὸ τμῆμα, οὗ κορυφὴ τὸ α, ὕψος δὲ ἡ αμ πρὸς τὸ

τμῆ

τμῆμα οὗ κορυφὴ τὸ β, ὕψος δὲ ἡ βμ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ γδ πρὸς δε. τὸ ἄρα διὰ τῆς λμ ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον ὀρθὸν πρὸς τὴν αβ, τέμνει τὴν σφαῖραν εἰς τὸν δοθέντα λόγον, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ὅτι δὲ ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ βμ, ὕψος δὲ τὴν ζμ, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ β, ὕψος δὲ ἡ βμ, δειχθήσεται οὕτως. γεγονέτω γὰρ ὡς ἡ ζμ πρὸς μα, οὕτως ἡ ομ πρὸς μβ. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ τὴν ομ, ἴσος ἐστὶ τμήματι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ζμ πρὸς μα, οὕτως ἡ ομ πρὸς μβ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ζμ πρὸς μο, οὕτως ἡ αμ πρὸς μβ, ἀλλ' ὡς ἡ αμ πρὸς μβ, οὕτως τὸ ἀπὸ πμ πρὸς τὸ ἀπὸ μβ. καὶ οὕτως ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ πμ, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ μβ. ὡς ἄρα ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ πμ, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ μβ, οὕτως ἡ μζ πρὸς μο. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ μβ, ὕψος δὲ τὴν ζμ, ἴσος ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ πμ, ὕψος δὲ τὴν μο. ἀντιπεπόνθασι γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ὥστε καὶ τῷ τμήματι ἴσος ἐστί.

ΩΣ ΔΙΟΚΛΗΣ ΕΝ ΤΩ ΠΕΡΙ ΠΥΡΙΩΝ.

Γράφει δὲ καὶ ὁ Διοκλῆς ἐν τῷ περὶ πυρίων, προλέγων τάδε. ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου Ἀρχιμήδης ἀπέδειξεν, ὅτι πᾶν τμῆμα σφαίρας ἴσον ἐστὶ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ εὐθεῖαν τινὰ λόγον ἔχουσαν πρὸς τὴν ἀπὸ τῆς τοῦ τμήματος κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ ἡ τοῦ ἐναλλὰξ τμήματος κάθετος πρὸς τὴν τοῦ ἐναλλὰξ τμήματος κάθετον. οἷον ἐὰν ᾖ σφαῖρα ἡ αβγ, καὶ τμηθῇ ἐπιπέδῳ τινὶ τῷ περὶ διάμετρον τὴν γδ κύκλῳ. καὶ διαμέτρου οὔσης τῆς αβ, κέντρου δὲ τοῦ ε. ποιήσωμεν ὡς συναμφότερον τὴν εα, αζ πρὸς ζα, οὕτως τὴν ηζ πρὸς ζβ. ἔτι τε ὡς συναμφότερον τὴν εβ, βζ πρὸς ζβ, οὕτως τὴν θζ πρὸς ζα, ἀποδέδεικται ὅτι τὸ μὲν γβδ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ὁ περὶ διάμετρον τὴν γδ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ζη. τὸ δὲ γαδ τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ἡ αὐτή, ὕψος δὲ ἡ θζ. προτεθέντος οὖν αὐτῷ τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν δοθέντα, κατασκευάσας τὰ εἰρημένα φησί. λόγος ἄρα δοθεὶς καὶ τοῦ κώνου, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν γδ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ζθ, πρὸς τὸν κῶνον οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ἡ αὐτή, ὕψος δὲ ἡ ζη. καὶ γὰρ τοῦτο ἀποδέδεικται, οἱ κῶνοι οἱ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντες, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη. λόγος ἄρα τῆς θζ πρὸς ζη δοθείς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ θζ πρὸς ζα, οὕτως συναμφότερος ἡ εβ, ζ πρὸς τὴν ζβ. διελόντι ὡς ἡ θα πρὸς αζ, οὕτως ἡ εβ πρὸς ζβ. διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ ὡς ἡ ηβ πρὸς ζβ, οὕτως ἡ αὐτὴ εὐθεῖα πρὸς τὴν ζα. γέγονεν οὖν πρόβλημα τοιοῦτον. θέσει οὔσης εὐθείας τῆς αβ, καὶ δύο δοθέντων σημείων τῶν α, β, καὶ δοθείσης τῆς εβ, τεμεῖν τὴν αβ κατὰ τὸ ζ, καὶ προσθεῖναι τὰς θα, βη. ὥστε λόγον εἶναι τῆς θζ πρὸς ζη δοθέντα, ἔτι τε εἶναι ὡς μὲν τὴν θα πρὸς αζ, οὕτως τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πρὸς τὴν ζβ. ὡς δὲ τὴν ηβ πρὸς βζ, οὕτως τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν πρὸς ζα. τοῦτο δὲ ἑξῆς δέδεικται. ὁ γὰρ Ἀρχιμήδης μακρότερον αὐτὸ δείξας, καὶ οὕτως εἰς πρόβλημα ἕτερον ἀπάγει, ὃ οὐκ ἀποδείκνυσιν ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου.

Θέσει

Θέσει δεδομένης εὐθείας τῆς αβ, καὶ δύο δοθέντων σημείων τῶν α, β, καὶ λόγου τοῦ ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς τὴν δ, τεμεῖν τὴν αβ κατὰ τὸ ε, καὶ προσθεῖναι τὰς ζα, ηβ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὴν ζε πρὸς τὴν εη. ἔτι τε εἶναι ὡς τὴν ζα πρὸς αε, οὕτως δοθεῖσαν τινὰ εὐθεῖαν πρὸς τὴν βε. ὡς δὲ τὴν ηβ πρὸς βε, οὕτως τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πρὸς τὴν εα. γεγονέτω, καὶ τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ θακ, λβμ. καὶ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴση κείσθω ἑκατέρα τῶν ακ, βμ. καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ κε, με, ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ λ, θ. ἐπεζεύχθω δὲ καὶ ἡ κμ. διὰ τοῦ λ παράλληλος ἤχθω τῇ αβ ἡ λν. διὰ δὲ τοῦ ε τῇ νκ ἡ ξεοπ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ζα πρὸς αε, οὕτως ἡ μβ πρὸς βε. ὑπόκειται γάρ. ὡς δὲ ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ θα πρὸς αε, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων. ὡς ἄρα ἡ ζα πρὸς αε, οὕτως ἡ θα πρὸς αε. ἴση ἄρα ἡ ζα τῇ θα. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ βη τῇ βλ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ θαε πρὸς συναμφότερον τὴν μβε, οὕτως συναμφότερος ἡ καε πρὸς συναμφότερον τὴν λβε. ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς αε πρὸς εβ. τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς λβε, καὶ συναμφοτέρου τῆς θαε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς καε, καὶ συναμφοτέρου τῆς μβε. κείσθω τῇ κα ἴση ἑκατέρα τῶν αρ, βς. ἐπεὶ οὖν συναμφότερος μὲν ἡ θαε ἴση ἐστὶ τῇ ζε, συναμφότερος δὲ ἡ λβε ἴση τῇ εη, συναμφότερος δὲ ἡ καε ἴση τῇ ρε, συναμφότερος δὲ ἡ μβε ἴση τῇ ςε. καὶ ἐδείχθη τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς θαε, καὶ συναμφοτέρου τῆς λβε, ἴσον τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς καε, καὶ συναμφοτέρου τῆς μβε. τὸ ἄρα ὑπὸ ζεη ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ρες. διὰ δὴ τοῦτο ὅταν τὸ ρ μεταξὺ τῶν α, ζ πίπτῃ, τό τε ς ἐξωτέρω τοῦ η πεσεῖται, καὶ τὸ ἀνάπαλιν. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως ἡ ζε πρὸς εη. ὡς δὲ ἡ ζε πρὸς εη, οὕτως τὸ ὑπὸ ζεη πρὸς τὸ ἀπὸ εη. ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ζεη πρὸς τὸ ἀπὸ εη. τὸ δὲ ὑπὸ ζεη ἴσον ἐδείχθη τῷ ὑπὸ ρες, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ρες πρὸς τὸ ἀπὸ εη. κείσθω τῇ βε ἴση ἡ εο, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ βο ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα, καὶ ἀπὸ τῶν ς, ρ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσαι αἱ στ, ρυ, συμβαλλέτωσαν αὐτῇ κατὰ τ, υ. ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου τοῦ β, πρὸς θέσει δεδομένην τὴν αβ, ἦκται ἡ τυ, δεδομένην ποιοῦσαν γωνίαν τὴν ὑπὸ εβο ἡμίσειαν ὀρθῆς, δέδοται ἡ τυ τῇ θέσει. καὶ ἀπὸ δεδομένων τῶν ς, ρ θέσει ἠγμέναι αἱ στ, ρυ τέμνουσιν αὐτὴν κατὰ τὰ τ, υ. δοθέντα ἄρα ἐστὶ τὰ τ, υ. δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ τυ τῇ θέσει, καὶ τῷ μεγέθει. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν τῶν εοβ, στυ τριγώνων ὁμοιότητα ἐστὶν ὡς ἡ τβ πρὸς βο, οὕτως ἡ ςβ πρὸς βε. καὶ συνθέντι ἐστὶν, ὡς ἡ το πρὸς οβ, οὕτως ἡ ςε πρὸς εβ. ἀλλ' ὡς ἡ βο πρὸς ου, οὕτως ἡ βε πρὸς ερ. δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ το πρὸς ου, οὕτως ἡ ςε πρὸς ερ. ἀλλ' ὡς ἡ το πρὸς ου, οὕτως τὸ ὑπὸ τοῦ πρὸς τὸ ἀπὸ ου. ὡς δὲ ἡ ςε πρὸς ερ, οὕτως τὸ ὑπὸ ςερ πρὸς τὸ ἀπὸ ερ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τοῦ πρὸς τὸ ἀπὸ ου, οὕτως τὸ ὑπὸ ςερ πρὸς τὸ ἀπὸ ερ. καὶ ἐναλλὰξ, ὡς τὸ ὑπὸ τοῦ πρὸς τὸ ὑπὸ ςερ, οὕτως τὸ ἀπὸ ου πρὸς τὸ ἀπὸ ερ. τὸ δὲ ἀπὸ ου τοῦ ἀπὸ ερ διπλάσιον. ἐπειδὴ καὶ τὸ ἀπὸ οβ τοῦ ἀπὸ βε. καὶ τὸ ὑπὸ τοῦ ἄρα τοῦ ὑπὸ ςερ ἐστὶ διπλάσιον. τὸ δὲ ὑπὸ ςερ πρὸς τὸ ἀπὸ εη ἐδείχθη λόγον ἔχειν ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς τὴν δ. καὶ τὸ ὑπὸ τοῦ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ εη λόγον ἔχει, ὃν ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ. τὸ δὲ ἀπὸ εη ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ξο. ἑκατέρα γὰρ τῶν εη, ξο ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ λβε, τὸ ἄρα ὑπὸ τοῦ πρὸς τὸ ἀπὸ ξο λόγον ἔχει, ὃν ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, καὶ δέδοται ὁ τῆς διπλασίας τῆς γ πρὸς τὴν δ λόγος. δέδοται ἄρα καὶ ὁ τοῦ ὑπὸ τοῦ πρὸς τὸ ἀπὸ ξο λόγος. ἐὰν ἄρα ποιήσωμεν ὡς τὴν δ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς γ, οὕτως τὴν τυ πρὸς ἄλλην τινὰ ὡς τὴν φ, καὶ περὶ τὴν τυ γράψωμεν ἔλλειψιν ὥστε τὰς καταγομένας ἐν τῇ ὑπὸ ξοβ γίνεται, τουτέστιν ἐν ἡμισείᾳ ὀρθῆς δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν φ ἐλλείποντα ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ τυφ, ἥξει διὰ τοῦ ξ, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ

εἰκοστοῦ θεωρήματος τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. γεγράφθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ υξτ. τὸ ἄρα ξ σημεῖον ἅπτεται θέσει δεδομένης ἐλλείψεως. καὶ ἐπεὶ διαγώνιός ἐστιν ἡ λα τοῦ νμ παραλληλογράμμου, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ νξπ τῷ ὑπὸ αβμ. ἐὰν ἄρα διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς θκ, κμ γράψωμεν ὑπερβολήν, ἥξει διὰ τοῦ ξ. καὶ ἔσται θέσει δεδομένη διὰ τὸ καὶ τὸ β σημεῖον τῇ θέσει δεδόσθαι, καὶ ἑκατέραν τῶν αβ, βμ (καὶ διὰ τοῦτο τὰς θκ, κμ ἀσυμπτώτους) γεγράφθω. καὶ ἔστω ὡς ἡ ξβ, τὸ ἄρα ξ σημεῖον ἅπτεται θέσει δεδομένης ὑπερβολῆς. ἥπτετο δὲ καὶ θέσει δεδομένης ἐλλείψεως. δέδοται ἄρα τὸ ξ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ κάθετος ἡ ξε. δέδοται ἄρα τὸ ε. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ ζα πρὸς αε. καὶ δέδοται ἡ αε, δέδοται ἄρα καὶ ἡ αζ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δέδοται καὶ ἡ ηβ.

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. ὡς γὰρ τῆς ἐπὶ αὐτῆς καταγραφῆς, ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἣν δεῖ τεμεῖν ἡ αβ. ἡ δὲ δοθεῖσα ἑτέρα ἡ ακ. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς γ πρὸς τὴν δ. ἤχθω τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἡ βμ ἴση οὖσα τῇ ακ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κμ. καὶ τῇ μὲν κα ἴση κείσθω ἡ αρ, τῇ δὲ βμ ἡ βς. ἀπὸ τῶν ρ, ς πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ρυ, ςτ. καὶ πρὸς τῷ β σημείῳ συνεστάτω ἡμίσεια ὀρθῆς ἡ ὑπὸ αβο, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ βο ἐφ' ἑκάτερα τεμνέτω τὰς ςτ, ρυ κατὰ τὰ τ, υ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ δ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς γ, οὕτως ἡ τυ πρὸς τὴν φ, καὶ περὶ τὴν τυ γεγράφθω ἔλλειψις, ὥστε τὰς καταγομένας ἐν ἡμισείᾳ ὀρθῆς δύνασθαι τὰ παρακείμενα παρὰ τὴν φ, ἐλλείποντα ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ τυφ. διὰ δὲ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ακ, κμ, γεγράφθω ὑπερβολὴ ἡ βξ, τέμνουσα τὴν ἔλλειψιν κατὰ τὸ ξ, καὶ ἀπὸ τοῦ ξ ἐπὶ τὴν αβ κάθετος ἤχθω ἡ ξε, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ π. διὰ δὲ τοῦ ξ τῇ αβ παράλληλος ἤχθω ἡ λξν. καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ κα, μβ ἐπὶ τὰ λ, θ. καὶ ἡ με ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ κν κατὰ τὸ θ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ βξ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ θκ, κμ, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ νξπ τῷ ὑπὸ αβμ, διὰ τὸ η θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. καὶ διὰ τοῦτο εὐθεῖά ἐστιν ἡ κελ. κείσθω οὖν τῇ μὲν θα ἴση ἡ αζ, τῇ δὲ λβ ἴση ἡ βη. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, οὕτως ἡ φ πρὸς τὴν τυ. ὡς δὲ ἡ φ πρὸς τὴν τυ, οὕτως τὸ ὑπὸ τοῦ πρὸς τὸ ἀπὸ ξο, διὰ τὸ κα θεώρημα τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ὡς ἄρα ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ τοῦ πρὸς τὸ ἀπὸ ξο. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ τβ πρὸς βο, οὕτως ἡ σβ πρὸς βε. καὶ συνθέντι ὡς ἡ το πρὸς οβ, οὕτως ἡ σε πρὸς εβ. ἀλλ' ὡς ἡ βο πρὸς ου, οὕτως ἡ βε πρὸς ερ. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ το πρὸς ου, οὕτως ἡ ςε πρὸς ερ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τοῦ πρὸς τὸ ἀπὸ ου, οὕτως τὸ ὑπὸ ςερ πρὸς τὸ ἀπὸ ερ. ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὑπὸ τοῦ πρὸς τὸ ὑπὸ ςερ, οὕτως τὸ ἀπὸ ου πρὸς τὸ ἀπὸ ερ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ ου τοῦ ἀπὸ ερ διπλάσιον, διὰ τὸ καὶ τὸ ἀπὸ βο τοῦ ἀπὸ βε. ἴση γάρ ἐστιν ἡ βε τῇ εο, ἡμισείας ὀρθῆς οὔσης ἑκατέρας τῶν πρὸς τοῖς β, ο. καὶ τὸ ὑπὸ τοῦ ἄρα διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ςερ. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ τοῦ πρὸς τὸ ἀπὸ ξο, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίσυ. ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ρες πρὸς τὸ ἀπὸ ξο. ἴση δὲ ἡ ξο τῇ εη, διὰ τὸ ἑκατέραν αὐτῶν ἴσην εἶναι συναμφοτέρῳ τῇ λβε. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ θαε πρὸς συναμφότερον τὴν μβε, οὕτως συναμφότερος ἡ καε πρὸς συναμφότερον τὴν λβε. ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς αε πρὸς εβ. τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς θαε, καὶ συναμφοτέρου τῆς λβε, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς καε, καὶ συναμφοτέρου τῆς μβε. ἀλλὰ συναμφοτέρῳ μὲν τῇ θαε ἴση ἐστὶν ἡ ζε. συναμφοτέρῳ δὲ τῇ λβε, ἴση ἡ εη. συναμφοτέρῳ τῇ καε ἴση ἡ ρε. συναμφοτέρῳ δὲ τῇ μβε, ἴση ἡ ες. τὸ ἄρα ὑπὸ ζεη ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ρες. ἀλλ' ὡς ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ρες πρὸς τὸ ἀπὸ εη. καὶ ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ζεη πρὸς τὸ ἀπὸ εη. ἀλλ' ὡς τὸ ὑπὸ ζεη πρὸς τὸ ἀπὸ εη, οὕτως ἡ ζε πρὸς εη, καὶ ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως ἡ ζε πρὸς εη, καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ θα πρὸς αε. ἴση δὲ ἡ θα τῇ ζα. ὡς ἄρα ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ ζα πρὸς αε. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ὡς ἡ κα πρὸς αε, οὕτως ἡ ηβ πρὸς βε. εὐθείας ἄρα δοθείσης τῆς αβ, καὶ ἑτέρας τῆς ακ, καὶ λόγου τοῦ τῆς γ πρὸς τὴν δ, εἴληπται ἐπὶ τῆς αβ τυχὸν σημεῖον τὸ ε, καὶ προσετέθησαν εὐθεῖαι αἱ ζα, ηβ, καὶ γέγονε τῷ δοθέντι λόγῳ ἡ ζε πρὸς εη. ἔτι τε ἐστὶν ὡς ἡ δοθεῖσα ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ ζα πρὸς αε. ὡς δὲ αὐτὴ ἡ δοθεῖσα ἡ κα πρὸς αε, οὕτως ἡ ηβ πρὸς βε, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Τούτων δεδειγμένων δυνατόν ἐστι τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν εἰς τὸν δοθέντα λόγον τεμεῖν οὕτως. ἔστω γὰρ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος, ὃν δεῖ ἔχειν τὰ τμή-

ματα

ματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα, ὃ τῆς γ πρὸς τὴν δ, κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἔστω τὸ ε, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς αβ σημεῖον τὸ ζ, καὶ προσκείσθωσαν αἱ ηα, θβ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὴν ηζ πρὸς τὴν ζθ. ἔτι τε εἶναι, ὡς μὲν τὴν ηα πρὸς αζ, οὕτως δοθεῖσαν τὴν εβ πρὸς βζ. ὡς δὲ τὴν θβ πρὸς βζ, οὕτως τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν τὴν εα πρὸς αζ. τοῦτο γὰρ ὡς δυνατὸν ποιεῖν προδέδεικται. καὶ διὰ τοῦ ζ τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ κλζ. καὶ διὰ τῆς κλ ἐπίπεδον ἐκβληθὲν ὀρθὸν πρὸς τὴν αβ τεμνέτω τὴν σφαῖραν. λέγω ὅτι τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχει τὸν τῆς γ πρὸς τὴν δ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ηα πρὸς αζ, οὕτως ἡ εβ πρὸς βζ. καὶ συνθέντι, ὡς ἄρα ἡ ηζ πρὸς ζα, οὕτως συναμφότερος ἡ εβ, βζ πρὸς βζ. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν κλ, ὕψος δὲ τὴν ζη, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν ζα. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ θβ πρὸς βζ, οὕτως ἡ εα πρὸς αζ. καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς ἡ θζ πρὸς βζ, οὕτως συναμφότερος ἡ εα, αζ πρὸς αζ. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν κλ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ζθ ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν βζ. ἐπεὶ οὖν οἱ εἰρημένοι κῶνοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη, τουτέστιν ὡς ἡ θζ πρὸς ζη, τουτέστιν ἡ γ πρὸς τὴν δ, καὶ τὰ τμήματα ἄρα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν δοθέντα, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ὡς δὲ δεῖ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου περὶ τὰς δοθείσας ἀσυμπτώτους γράψαι ὑπερβολήν, δείξομεν οὕτως. ἐπειδὴ οὐκ αὐτόθεν κεῖται ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις. ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ γα, αβ τυχοῦσαν γωνίαν περιέχουσαι τὴν πρὸς τῷ α, καὶ δεδόσθω σημεῖόν τι τὸ δ. καὶ προσκείσθω διὰ τοῦ δ περὶ ἀσυμπτώτους τὰς γα, αβ γράψαι ὑπερβολήν. ἐπεζεύχθω ἡ αδ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ε. καὶ κείσθω τῇ δα ἴση ἡ αε, καὶ διὰ τοῦ δ τῇ αβ παράλληλος ἤχθω ἡ δζ. καὶ κείσθω τῇ αζ ἴση ἡ ζγ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γδ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ β, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς γβ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ δεη, καὶ ἐκβληθείσης τῆς αδ γεγράφθω περὶ αὐτὴν διὰ τοῦ δ ὑπερβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν η ὑπερβάλλοντα, ὁμοίω τῷ ὑπὸ δεη. λέγω ὅτι τῆς γεγραμμένης ὑπερβολῆς ἀσύμπτωτοι εἰσὶν αἱ γα, αβ. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν

ἡ δζ τῇ βα, καὶ ἴση ἡ γζ τῇ ζα, ἴση ἄρα καὶ ἡ γδ τῇ δβ, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς γβ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς γδ. καὶ ἔστι τὸ ἀπὸ γβ ἴσον τῷ ὑπὸ δεκ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ἀπὸ γδ, δβ, τέταρτον μέρος ἐστὶ τοῦ ὑπὸ δεκ εἴδους. αἱ ἄρα γα, αβ ἀσύμπτωτοί εἰσι τῆς ὑπερβολῆς, διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων.

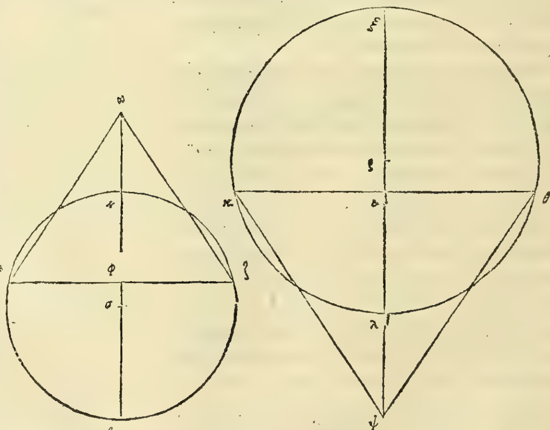
ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Δ.

Ἐν δὲ τῇ συνθέσει προσεκβάλλων τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας τὴν δβ, καὶ ἀποθέμενος τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς ἴσην τῇ ζβ. καὶ τεμὼν αὐτὴν εἰς τὸν δοθέντα λόγον κατὰ τὸ θ, καὶ ἔτι τῆς δβ λαβὼν τὸ χ οὕτως, ὥστε εἶναι ὡς τὴν χζ πρὸς θζ, οὕτως τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, τὰ αὐτὰ κατασκευάζων τοῖς πρότερον φησί, ὅτι γεγονέτω ὡς συναμφότερος ἡ κδχ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ρχ πρὸς χβ. καὶ τίθησι τὸ ρ μεταξὺ τῶν θ, ζ. ὅτι δὲ τοῦτο οὕτως ἔχει δεικτέον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ κδχ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ρχ πρὸς χβ. διελόντι ὡς ἡ κδ πρὸς δχ, ἡ ρβ πρὸς χβ. ἐναλλὰξ ὡς ἡ κβ πρὸς ρβ, ἡ δχ πρὸς βχ. μείζων δὲ ἡ δχ τῆς χβ, μείζων ἄρα καὶ ἡ κβ τῆς βρ. τουτέστιν ἡ ζβ τῆς βρ, ὥστε τὸ ρ ἐντὸς τοῦ ζ πεσεῖται. ὅτι δὲ καὶ ἐκτὸς τοῦ θ, δειχθήσεται ὁμοίως τοῖς ἐν τῇ ἀναλύσει προελθούσης πάσης τῆς συνθέσεως τοῦ θεωρήματος. συνάγεται γὰρ ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ρχ πρὸς χλ, ἡ ζθ πρὸς θβ, ὥστε καὶ συνθέντι. καὶ διὰ τοῦτο γὰρ ἀκόλουθος τοῖς ἄνω εἰρημένοις καὶ ἐνταῦθα ἡ λέξις.

Καὶ δι' ἴσου ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ. τεταραγμένην ἀναλογίαν ἐν τοῖς στοιχείοις ἐμάθομεν τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος, ὅταν ᾖ ὡς μὲν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον. ὡς δὲ ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι ἐν τοῖς πρώτοις, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον. κἀνταῦθα οὖν δέδεικται ὡς μὲν ἡγούμενον ἡ ρλ πρὸς ἑπόμενον τὴν λδ, οὕτως ἡγούμενον ἡ χζ πρὸς ἑπόμενον τὴν ζθ. ὡς δὲ ἑπόμενον ἡ δλ πρὸς ἄλλο τι τὴν δχ, οὕτως ἄλλο τι ἡ εζ πρὸς ἡγούμενον τὴν χζ. ἕπεται ἄρα καὶ δι' ἴσου ὡς δέδεικται ἐν τῷ πέμπτῳ τῶν στοιχείων, ὡς ρλ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζθ.

ΕΙΣ ΤΟ Ε.

Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ εζη τμῆμα τῷ θκλ τμήματι, ὅμοιος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ εζω κῶνος τῷ ψθκ κώνῳ. νενοήσθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι αἱ καταγραφαὶ καὶ ἐπεζευγμέναι αἱ εη, ηζ, εο, οζ, θλ, λκ, θξ, ξκ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐστι τὰ εζη, θκλ τμήματα, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ εηζ, θλκ γωνίαι, ὥστε καὶ αἱ ἡμίσειαι αὐτῶν. καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς φ, υ. καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα τὸ ηφζ τρίγωνον τῷ λυκ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ηφ πρὸς φζ, οὕτως ἡ λυ πρὸς υκ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσογωνίων ὄντων τῶν φζο, υκξ τριγώνων. ἔστιν ὡς ἡ ζφ πρὸς φο, ἡ κυ πρὸς υξ. δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ηφ πρὸς φο, ἡ λυ πρὸς υξ. καὶ συνθέντι ὡς ἡ ηο πρὸς οφ, ἡ λξ πρὸς ξυ. καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση, ὡς ἡ σο πρὸς οφ, ἡ ρξ πρὸς ξυ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ σοφ πρὸς φο, τουτέστιν ἡ ωφ πρὸς φη, οὕτως συναμφότερος ἡ ρξυ πρὸς ξυ. τουτέστιν ἡ ψυ πρὸς υλ. ἀλλ' ὡς ἡ ηφ πρὸς φζ, ἡ λυ πρὸς υκ. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ωφ πρὸς φζ, ἡ ψυ πρὸς υκ, καὶ τῶν ἑπομένων τὰ διπλάσια, ὡς ἄρα ἡ ωφ πρὸς εζ, ἡ ψυ πρὸς θκ. τῶν ἄρα ωεζ, ψθκ κώνων



κώνων ἀνάλογόν εἰσιν οἱ ἄξονες καὶ διάμετροι τῶν βάσεων. ὅμοιοι ἄρα εἰσὶν οἱ κῶνοι, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λόγος δὲ τῆς ω φ πρὸς τὴν ε ζ δοθείς. ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὰ τμήματα τῶν σφαιρῶν δεδομένα, εἰσὶ καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων, καὶ τὰ ὕψη τῶν τμημάτων, ὥστε δέδοται ἡ ε ζ καὶ ἡ η φ, καὶ ἡ ἡμίσεια ἄρα τῆς ε ζ ἡ ε φ δοθήσεται, ὥστε καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς. καί ἐστιν ἴσον τῷ ὑπὸ η φ ο. ἐὰν δὲ δοθὲν παρὰ δοθεῖσαν παραβληθῇ πλάτος ποιεῖ δοθεῖσαν, δοθεῖσα ἄρα ἡ φ ο, ἀλλὰ καὶ ἡ φ η. καὶ ὅλη ἄρα ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας δοθεῖσά ἐστι, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡμίσεια αὐτῆς δέδοται ἡ ς ο, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ο φ. δέδοται ἄρα καὶ ὁ τῆς ς ο πρὸς ο φ λόγος. καὶ συνθέντι ὡς συναμφοτέρου τῆς ς ο φ πρὸς τὴν ο φ λόγος δοθείς ἐστι, τουτέστι τῆς ω φ πρὸς φ η. καὶ δέδοται ἄρα καὶ ἡ ω φ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ε ζ. δέδοται ἄρα καὶ ὁ τῆς ω φ πρὸς ε ζ λόγος. τὰ αὐτὰ δὲ ἂν ῥηθείη καὶ ἐπὶ τοῦ α β γ τμήματος. καὶ συναχθήσεται ὁ τῆς χ τ πρὸς α β λόγος δοθείς, καὶ διὰ τὸ δοθεῖσαν εἶναι τὴν α β, δοθεῖσά ἐστι καὶ ἡ χ τ.

Ὅτι δ' ἂν τὰ τμήματα δεδομένα ᾖ, καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν δοθήσονται, πρόδηλον μέν. ἵνα δὲ καὶ τοῦτο ἀκολούθως τῇ στοιχειώσει τῶν δεδομένων δοκεῖ συνάγεσθαι, λεχθήσεται. ἐπειδὴ δέδοται τὰ τμήματα τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει, δέδοται καὶ ἡ ε ζ. καὶ ἡ ἐν τῷ τμήματι γωνία, ὥστε καὶ ἡ ἡμίσεια αὐτῆς, καὶ ἐὰν νοήσωμεν ἐπιζευγνυμένην τὴν ε η δεδομένης τῆς πρὸς τῷ φ ὀρθῆς. δεδομένη ἔσται καὶ ἡ λοιπή. καὶ τὸ ε η φ τρίγωνον τῷ εἴδει. ὥστε καὶ ὁ τῆς ε φ πρὸς φ η λόγος δοθεὶς ἔσται. καὶ δέδοται ἡ ε φ ἡμίσεια οὖσα τῆς ε ζ, δέδοται ἄρα καὶ ἡ φ η. ἔνεστι δὲ καὶ ἄλλως λέγειν. ἐπειδὴ δέδοται ἡ ε ζ τῇ θέσει, καὶ ἀπὸ δεδομένου τοῦ φ, διχοτομία γάρ ἐστι τῆς ε ζ, πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ φ η τῇ θέσει. δέδοται δὲ καὶ ἡ περιφέρεια τοῦ τμήματος τῇ θέσει, δέδοται ἄρα τὸ η. ἦν δὲ καὶ τὸ φ δεδομένον. δέδοται ἄρα καὶ ἡ φ η. ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ψ υ πρὸς χ τ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς β α πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ, οὕτως ἡ κ θ πρὸς δ. ἐπεὶ γὰρ γέγονεν ὡς ἡ ψ υ πρὸς θ κ, ἡ χ τ πρὸς δ. ἐναλλὰξ ἡ ψ υ πρὸς χ τ, ἡ κ θ πρὸς δ. ἀλλ' ὡς ἡ ψ υ πρὸς χ τ, τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ. ἴσων γὰρ ὄντων τῶν κώνων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ὡς δὲ αἱ βάσεις πρὸς ἀλλήλους, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ β α πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ, ἡ θ κ πρὸς τὴν δ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ α β πρὸς θ κ, ἡ ς πρὸς δ. ἐπειδὴ τῷ λόγῳ τοῦ ἀπὸ τῆς β α πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ, ὁ αὐτὸς ἐδείχθη ὁ τῆς β α πρὸς ς, καὶ ὁ τῆς κ θ πρὸς δ. καὶ ὁ τῆς β α ἄρα πρὸς ς, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς κ θ πρὸς δ. ὥστε ἐναλλὰξ ἐστὶν ὡς ἡ β α πρὸς θ κ, ἡ ς πρὸς δ.

ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Ε.

Ἐπειδὴ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ α β, θ κ, ς, δ, ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ, ἡ θ κ πρὸς δ. καθόλου γὰρ ἐὰν ὦσι τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον, ἔσται, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, ἡ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν, ἡ τρίτη πρὸς τὴν τετάρτην. ἐναλλὰξ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, ἡ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην. ἀλλ' ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, ἡ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην.

ΕΙΣ ΤΟ ς.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ η λ μ τῷ α β γ τμήματι, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ρ λ πρὸς ρ ν, ἡ β π πρὸς π θ, ἐὰν ἐπιζευχθῶσιν αἱ μ ν, γ θ. ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ τμήματα, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ πρὸς τοῖς β λ γωνίαι. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τοῖς μ, γ ὀρθαί, καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ, καὶ ἰσογώνιά ἐστι τὰ τρίγωνα. καί ἐστιν ὡς ἡ θ β πρὸς θ γ, οὕτως ἡ λ ν πρὸς μ ν. ἀλλ' ὡς ἡ θ γ πρὸς θ π, ἡ μ ν πρὸς ν ρ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν γ θ π, μ ν ρ τριγώνων. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ β θ πρὸς θ π, ἡ λ ν πρὸς ν ρ. ὥστε καὶ διελόντι, ὡς ἡ β π πρὸς π θ, οὕτως ἡ λ ρ πρὸς ρ ν. λόγος δὲ τῆς ε ζ πρὸς β γ δοθείς, δοθεῖσα ἄρα ἑκατέρα. ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὰ τμήματα τῶν σφαιρῶν, δεδομέναι εἰσὶ καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων, καὶ τὰ ὕψη τῶν τμημάτων. ὥστε ἐπεὶ δέδοται ἡ α γ, δέδοται καὶ ἡ ἡμίσεια αὐτῆς ἡ γ π. δέδοται δὲ καὶ ἡ β π, καὶ ὀρθὴν γωνίαν περιέχουσιν. δέδοται ἄρα καὶ ἡ β γ. διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ ἡ ε ζ δοθεῖσά ἐστιν. ὥστε καὶ ὁ τῆς β γ πρὸς ε ζ λόγος δοθείς ἐστιν.

ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ ς.

Ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ ἐπὶ τῶν κ μ, α γ τμήματα κύκλων. ἐὰν γὰρ ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει ἐπιζευχθῶσιν αἱ γ θ, μ ν. ἐπεὶ ὀρθαί εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς γ, μ. καὶ κάθετοι αἱ γ π, μ ρ. μέσαι ἀνάλογόν εἰσι τῶν τῆς βάσεως τμημάτων. ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ πρώτη ἡ β π, πρὸς τὴν τρίτην τὴν π θ,

 οὕτως

οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τῆς πβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τῆς βγ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ λρ πρὸς ρν, οὕτως τὸ ἀπὸ λρ πρὸς τὸ ἀπὸ ρμ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ βπ πρὸς πθ, ἡ ρλ πρὸς ρν. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ βπ πρὸς τὸ ἀπὸ πγ, οὕτως τὸ ἀπὸ λρ πρὸς τὸ ἀπὸ ρμ. καὶ ὡς ἄρα ἡ πβ πρὸς πλ ρ, πρὸς ρμ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσι. ἰσογώνια ἄρα τὰ τρίγωνα. ἴσαι ἄρα πρὸς τοῖς β, λ γωνίαι, καὶ αἱ διπλασίους αὐτῶν αἱ ἐν τοῖς τμήμασιν. ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ τμήματα.

ΕΙΣ ΤΟ Ζ.

Λόγος ἄρα δεδομένος συναμφοτέρου τῆς εδ ζ πρὸς δζ. ἐπεὶ γὰρ συναμφότερος ἡ εδ, δζ πρὸς δζ λόγον ἔχει δεδομένον. ἐὰν μέγεθος πρός τι μόριον ἑαυτοῦ λόγον ἔχει δεδομένον, καὶ πρὸς τὸ λοιπὸν λόγον ἕξει δεδομένον, ὥστε συναμφότερος ἡ εδ ζ πρὸς εδ λόγον ἔχει δεδομένον. ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν εδ, δζ πρὸς συναμφότερον τὴν εδ ζ λόγον ἔχει δεδομένον, καὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχουσι δεδομένον. δέδοται ἄρα ὁ τῆς εδ πρὸς δζ λόγος. καὶ δέδοται ἡ εδ. δέδοται γὰρ ἡ διάμετρος. δέδοται ἄρα καὶ ἡ δζ. λοιπὴ ἄρα ἡ ζβ δοθήσεται, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ δζβ, τουτέστι τὸ ἀπὸ αζ. τουτέστιν ἡ αζ, δοθεῖσα ἔσται. καὶ ὅλη ἄρα ἡ αγ. καὶ ἄλλως δὲ λέγοις ἄν, ὅτι ἡ αγ δοθεῖσά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ δέδοται ἡ διάμετρος ἡ δβ τῇ θέσει. δέδοται δὲ καὶ τὸ ζ ὡς ἤγηται, καὶ ἀπὸ δεδομένου τοῦ ζ πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ αγ, δέδοται ἡ αγ τῇ θέσει. ἀλλὰ καὶ ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια. δοθέντα ἄρα τὰ α, γ, καὶ αὐτὴ ἡ αζγ δοθεῖσά ἐστι.

Καὶ ἐπεὶ συναμφότερος μὲν ἡ εδ ζ πρὸς δζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ εδ β πρὸς δβ. ἐπεὶ γὰρ ἡ εδ μείζων ἢ ἡμίσεια ἐστὶ τῆς δζ, συναμφότερος ἄρα ἡ εδ ζ τῆς δζ μείζων ἐστὶν ἢ ἡμιόλια. συναμφότερος δὲ ἡ εδ, δβ τῆς δβ ἡμιόλια, μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ εδ ζ πρὸς δζ, ἤπερ ἡ εδ β πρὸς δβ. ἢ καὶ ἄλλως, ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ δβ τῆς δζ, ἄλλη δέ τις ἡ εδ, ἡ εδ ἄρα μείζονα λόγον ἔχει πρὸς θζ, ἤπερ ἡ εδ πρὸς δβ συνθέντι συναμφότερος ἡ εδ ζ πρὸς δζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ εδ β πρὸς δβ, ἡ σύνθεσις τοῦ θεωρήματος σαφὴς διὰ τῶν ἐνταῦθα εἰρημένων.

ΕΙΣ ΤΟ Η.

Η θζ πρὸς ζη ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ διπλασίονα τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ αδ. τουτέστιν ἡ βζ πρὸς ζδ. ἐπεὶ γὰρ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετος ἦκται ἡ αζ τῶν πρὸς τῇ καθέτῳ τριγώνων ὁμοίων ὄντων, ἔστιν ὡς ἡ ζβ πρὸς βα, ἡ αβ πρὸς βδ. καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. καὶ τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται. ὡς ἄρα ἡ ζβ πρὸς βδ, τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βδ. ἀλλ' ὡς ἡ βδ πρὸς δζ, οὕτως τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δα. ὡς γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. καὶ δι' ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ βα. πρὸς τὸ ἀπὸ δα, οὕτως ἡ βζ πρὸς δζ. συναχθείη δ' ἂν τὸ αὐτὸ καὶ ἄλλως οὕτως. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ βζ πρὸς ζδ, οὕτως τὸ ὑπὸ ζβδ πρὸς τὸ ὑπὸ βδζ, τῆς βδ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ δβζ ἴσον τὸ ἀπὸ βα. τὸ δὲ ὑπὸ βδζ ἴσον τὸ ἀπὸ δα. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ δα, οὕτως ἡ βζ πρὸς δζ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ θζ πρὸς ζη ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ θβ πρὸς βη. καθόλου γὰρ ἐὰν ὦσι δύο μεγέθη ἄνισα, καὶ προστεθῇ αὐτοῖς ἴσα, τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλασσον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ συντεθὲν πρὸς τὸ συντεθέν. ἔστωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ αβ, γδ. καὶ προσκείσθωσαν αὐταῖς ἴσαι αἱ βε, δζ. λέγω ὅτι ἡ αβ πρὸς γδ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αε πρὸς γζ. ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ αβ τῆς γδ, ἡ αβ ἄρα πρὸς βε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γδ πρὸς τὴν βε, τουτέστι πρὸς δζ. ὥστε καὶ συνθέντι ἡ αε πρὸς εβ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γζ πρὸς τὴν δζ, διὰ τὰ προδεδειγμένα.

Ἐλαττον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν θζη ἢ τὸ ἀπὸ ζη, ἐὰν γὰρ ὦσι τρεῖς εὐθεῖαι συνεχεῖς, ὡς αἱ α, β, γ, ὥστε

γ, ὥστε τὴν α πρὸς τὴν β ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἤπερ τὴν β πρὸς τὴν γ. τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῶν α, γ, ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μέσης τῆς β. ἐὰν γὰρ ποιήσωμεν, ὡς τὴν α πρὸς τὴν β, οὕτως τὴν β πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται πρὸς μείζονα τῆς γ, ἤπερ δεῖ ἐλαττῶσαι τὸν τῆς β πρὸς γ λόγον, καὶ ἔσται τὸ ὑπὸ τῆς α καὶ τῆς μείζονος τῆς γ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς β, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν α, γ ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς β.



Τὸ ἄρα ὑπὸ θζη πρὸς τὸ ἀπὸ ζη ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ κζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζη. ὡς γὰρ ἡ θζ πρὸς ζη, οὕτως τὸ ὑπὸ θζη πρὸς τὸ ἀπὸ ζη. τὸ δὲ ὑπὸ θζη τοῦ ἀπὸ ζκ ἔλασσον. τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλασσον. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βε τῇ εδ, ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βζδ τοῦ ὑπὸ τῶν βεδ. τὸ μὲν γὰρ ὑπὸ βδε ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εδ. τὸ δὲ ὑπὸ βζδ μετὰ τοῦ ἀπὸ εζ ἴσον ἐστὶ τῷ αὐτῷ. καὶ δῆλον ὅτι ὅσῳ τῆς διχοτομίας ἐφέστηκεν τὸ ζ μεῖζον, ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ἴσων. μετὰ γὰρ μείζονος τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν, ἴσον γίνεται τὸ ὑπὸ τῶν ἴσων, ὥστε εὐθεῖα κἂν εἰς ἄνισα τέμνηται κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῶν ἔγγιον τῆς διχοτομίας, μεῖζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ἀπωτέρων τμημάτων.

Ἡ βζ ἄρα πρὸς βε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εδ πρὸς δζ. καθόλου γὰρ ἐὰν τέσσαρες ὅροι ὡς οἱ α, β, γ, δ, ε. καὶ ᾖ τὸ ὑπὸ τῶν α δε, ἔλασσον τοῦ ὑπὸ βγ, ὁ α πρὸς τὸν β ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ πρὸς δε. ἔστω γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν βγ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν α ζε. ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, ὁ γ πρὸς τὸν ζε. ὁ δὲ γ πρὸς τὸν ζε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸν εδ. καὶ ὁ α ε πρὸς τὸν β ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ πρὸς δε.

Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ θβ πρὸς βκ, τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ. ἐπεὶ γὰρ τῷ ὑπὸ θβκ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ βν, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσι ὡς ἡ θβ πρὸς βν, ἡ νβ πρὸς βκ. καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, ἡ θβ πρὸς βκ. οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης, τουτέστι τὸ ἀπὸ βν πρὸς τὸ ἀπὸ βκ, ὡς δέδεικται ἀνωτέρω. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς θβ πρὸς βν, ἡ νβ πρὸς βκ. συνθέντι ὡς ἡ θν πρὸς νβ, ἡ κν πρὸς κβ. ἐναλλὰξ ὡς ἡ θν πρὸς νκ, ἡ νβ πρὸς βκ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ, οὕτως τὸ ἀπὸ νβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ νβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ, οὕτως ἐδείχθη ἡ θβ πρὸς βκ. καὶ ὡς ἄρα ἡ θβ πρὸς βκ, οὕτως τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ. τὸ δὲ ἀπὸ θζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζη, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ. πάλιν γὰρ δύο ἀνίσας ταῖς θζ, ζη πρόσκειται ἡ νζ, καὶ διὰ τὸ ἀνωτέρω εἰρημένον ἡ θζ πρὸς ζη μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θν πρὸς νκ, ὥστε καὶ τὰ διπλάσια. τὸ ἄρα ἀπὸ θζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζη μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ, τουτέστιν ἡ θβ πρὸς βε, τουτέστιν ἡ κζ πρὸς ζη. ἡ ἄρα θζ πρὸς ζη μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τοῦ τῆς κζ πρὸς ζη. νοείσθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι εὐθεῖαι, ὡς αἱ αβ, γ, δ. ὥστε τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γ μείζονα λόγον ἔχειν, ἤπερ τὴν γ πρὸς τὴν δ. λέγω ὅτι ἡ αβ πρὸς δ μείζονα ἢ ἡμιόλιον λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς τὴν δ. εἰλήφθω γὰρ τῶν γ, δ μέση ἀνάλογον ἡ ε. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ πρὸς τὴν δ, ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γ λόγος διπλάσιον ἐστὶ τοῦ τῆς αβ πρὸς γ. ὁ δὲ τῆς γ πρὸς τὴν δ διπλάσιων ἐστὶ τοῦ τῆς γ πρὸς ε, καὶ ἡ αβ ἄρα πρὸς γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ γ πρὸς ε. γεγονέτω οὖν ὡς ἡ ε πρὸς τὴν γ, ἡ γ πρὸς βζ. καὶ ἐπεὶ τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ βζ, γ, ε, δ, ἡ βζ ἄρα πρὸς δ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βζ πρὸς γ, τουτέστιν ἡ γ πρὸς ε. ἔχει δὲ καὶ ἡ γ πρὸς δ διπλασίονα λόγον τοῦ τῆς γ πρὸς ε, ἡ ἄρα βζ πρὸς δ ἡ-

μιόλιον

ΛΗΜΜΑ ΕΙΣ ΤΟ ΕΞΗΣ.

Ἔστωσαν τέσσαρες ὅροι οἱ α, γ, δ, β. λέγω ὅτι ὁ συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ ὑπὸ τῶν α, β πρὸς τὸ ἀπὸ γ μετὰ τοῦ τῆς β πρὸς δ λόγου, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὑπὸ α β ἐπὶ τὴν β πρὸς τὸ ἀπὸ γ ἐπὶ τὴν δ. ἔστω γὰρ τῷ μὲν ὑπὸ α β ἴσος ὁ κ, τῷ δὲ ἀπὸ γ ἴσος ὁ λ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ β πρὸς δ, οὕτως ὁ λ πρὸς μ. ὁ ἄρα τοῦ κ πρὸς μ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ κ πρὸς λ, τουτέστι τοῦ ὑπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ γ, καὶ τοῦ λ πρὸς μ, τουτέστι τοῦ β πρὸς δ. ὁ δὴ κ τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν ν ποιείτω. ὁ δὲ λ τὸν β πολλαπλασιάσας, τὸν ξ ποιείτω. τὸν δὲ δ πολλαπλασιάσας, τὸν ο. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν α β ὁ κ ἐστιν, ὁ δὲ κ τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν ν πεποίηκεν, ὁ ἄρα ν ἐστιν ὁ ὑπὸ α β ἐπὶ τὸν β, πάλιν ἐπεὶ ὁ ἀπὸ γ ὁ λ ἐστιν. ὁ δὲ λ τὸν δ πολλαπλασιάσας τὸν ο πεποίηκεν. ὁ ο ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τῆς γ ἐπὶ τὸν δ, ὥστε ὁ τοῦ ὑπὸ α β ἐπὶ τὴν β πρὸς τὸ ἀπὸ γ ἐπὶ τὸν δ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ν πρὸς ο. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ὁ τοῦ κ πρὸς μ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ν πρὸς ο. ἐπεὶ οὖν ἑκάτερος τῶν κ, λ τὸν β πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τὸν ν, ξ πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ κ πρὸς τὸν λ, οὕτως ὁ ν πρὸς ξ. πάλιν ἐπεὶ ὁ λ ἑκάτερον τῶν β, δ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν ξ, ο πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ β πρὸς δ, ὁ ξ πρὸς ο. ἀλλ᾽ ὡς ὁ β πρὸς δ, ὁ λ πρὸς τὸν μ. καὶ ὡς ἄρα ὁ λ πρὸς μ, ὁ ξ πρὸς ο. οἱ ἄρα κ, λ, μ τοῖς ν, ξ, ο ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ σὺν δύο λαμβανόμενοι, καὶ δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ κ πρὸς μ, οὕτως ὁ ν πρὸς ο. καὶ ὁ τοῦ κ πρὸς μ λόγος, ὁ αὐτὸς τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ ὑπὸ α β πρὸς τὸν ἀπὸ γ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ β πρὸς δ. ὁ δὲ τοῦ ν πρὸς ο λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὑπὸ α β ἐπὶ τὴν β πρὸς τὸ ἀπὸ γ ἐπὶ τὴν δ. ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ ὑπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ γ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ β πρὸς δ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὑπὸ δ β ἐπὶ τὴν β πρὸς, τὸν ἀπὸ γ ἐπὶ τὸν δ.

Φανερὸν δέ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ α β ἐπὶ τὴν β ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β ἐπὶ τὸν α. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως τὸ ὑπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β, τῆς β κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. ἐὰν δὲ τέσσαρες ὅροι ἀνάλογον ὦσιν. τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. ὁ ἄρα ὑπὸ α β ἐπὶ τὴν β, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β ἐπὶ τὴν α.

ΕΙΣ ΤΟ ΑΛΛΩΣ ΤΟΥ Η.

Εἴρηται ἐν τοῖς προλαβοῦσιν, ὡς ἐὰν δύο μεγεθῶν ληφθῇ τὸ μέσον, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ πρῶτον πρὸς τὸ μέσον, καὶ τὸ μέσον πρὸς τὸ τρίτον. ὁμοίως δὲ κἂν πλείονα μέσα ληφθῇ, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ τῶν λόγων ὧν ἔχουσιν πάντα κατὰ τὸ ἑξῆς πρὸς ἄλληλα τὰ μεγέθη. καὶ ἐνταῦθα οὖν φησί, ὅτι ὁ τοῦ β α δ τμήματος πρὸς τὸ β γ δ τμῆμα λόγος σύγκειται, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ β α δ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν β δ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ α σημεῖον, καὶ ὁ αὐτὸς κῶνος πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτήν, κορυφὴν δὲ τὸ γ σημεῖον. καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος πρὸς τὸ β γ δ τμῆμα. δηλαδὴ τοῦ δ α β τμήματος, καὶ τοῦ β γ δ μέσων λαμβανομένων τῶν εἰρημένων κωνικῶν. ἀλλ᾽ ὁ μὲν τοῦ β α δ τμήματος πρὸς τὸν β α δ κῶνον, ὁ τῆς η θ ἐστὶ πρὸς θ γ, διὰ τὸ πόρισμα τοῦ δευτέρου θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου. ἐλέγετο γὰρ τὸ τμῆμα πρὸς τὸν ἐν ἑαυτῷ κῶνον.

τῷ κώνου τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος πρὸς τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος. ὁ δὲ τοῦ βαδ κώνου πρὸς τὸν βγδ κῶνον, ὁ τῆς αθ ἐστὶ πρὸς θγ. ἐπεὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ὕψη. ὁ δὲ τοῦ βγδ κώνου πρὸς τὸ βγδ τμῆμα, ὁ τῆς αθ ἐστὶ πρὸς θζ, διὰ τὸ ἀνάπαλιν τοῦ εἰρημένου πορίσματος, ὥστε ὁ τοῦ βαδ τμήματος πρὸς τὸ βγδ τμῆμα λόγος σύγκειται, ἔκ τε τοῦ τῆς ηθ πρὸς θγ, καὶ τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ, καὶ τοῦ τῆς αθ πρὸς θζ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ τῆς ηθ πρὸς θγ, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ ὁ τοῦ ὑπὸ ηθα ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. τὰ γὰρ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ηθα πρὸς τὸ ἀπὸ γθ, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θζ, ὁ τοῦ ὑπὸ ηθα ἐστὶν ἐπὶ τὴν θα, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, ὡς δέδεικται ἐν τῷ προληφθέντι λήμματι. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ηθα ἐπὶ τὴν θα, ὁ αὐτὸς ἐστὶ τῷ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη. καὶ τοῦτο γὰρ συναποδέδεικται ἐν τῷ προληφθέντι. ὁ ἄρα τοῦ τμήματος πρὸς τὸ τμῆμα λόγος ὁ αὐτὸς ἐστὶ τῷ τοῦ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ. ἐπεὶ οὖν δεῖ δεῖξαι, ὅτι τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ διπλάσιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου, δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ βαδ τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ βγδ. τουτέστι τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βγ, οὕτως ἡ αθ πρὸς θγ. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς προλαβοῦσι θεωρήμασι. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἐλάσσονα, ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ. ἀλλὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ λόγου διπλάσιος ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ τῆς θη κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θη. χρὴ ἄρα δειχθῆναι, ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ αὐτὸ τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θη. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο μεῖζον ἐστί. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν ζθ μεῖζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θη. τουτέστι ὅτι μείζων ἡ ζθ τῆς θη. ἐστὶ δὲ τοῦτο φανερόν. ἀνίσοις γὰρ ταῖς αθ, θγ ἴσαι πρόσκεινται αἱ ζα, γη.

Ταῦτα εἰπών, αὐτὸς μὲν οὐκ ἐπήγαγεν τὴν σύνθεσιν, ἡμεῖς δ' αὐτὴν προσθήσομεν. ἐπεὶ ἡ ζθ τῆς θη μείζων ἐστὶ, τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, μεῖζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θη. ὥστε τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ αὐτὸ τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θη. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θη, τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ γθ. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. ἀλλ' ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ λόγος διπλάσιος ἐστὶ τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ. ἀλλ' ὁ μὲν τῶν τμημάτων λόγος ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ. ὁ δὲ τῶν ἐπιφανειῶν ὃν ἔχει ἡ αθ πρὸς θγ, τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου. ἑξῆς δὲ ἀναλύων τὸ ἕτερον μέρος τοῦ θεωρήματος ἐπάγει. φημὶ δὴ ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸν ἡμιόλιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου. ἀλλ' ὁ μὲν τῶν τμημάτων ἐδείχθη ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ. τοῦ δὲ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου ἡμιόλιος ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ αβ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς βγ κύβον. τοῦ γὰρ τῆς αβ πρὸς βγ διπλάσιος μὲν ἐστὶ ὁ τοῦ ἀπὸ αβ τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ βγ τετράγωνον. τριπλάσιος δὲ ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς αβ πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς βγ κύβον, ἀλλ' ὡς ὁ ἀπὸ τῆς αβ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς βγ κύβον, οὕτως ὁ ἀπὸ αθ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θβ κύβον. ὡς γὰρ ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως ἡ αθ πρὸς θβ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν αβγ, αβθ τριγώνων. ἐὰν δὲ ὦσι τέσσαρες εὐθεῖαι, ἀνάλογον καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ τὰ ὅμοια, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον εἰσίν, ὥστε ὁ ἀπὸ τῆς αθ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θβ κύβον, ἡμιόλιον λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αβ τετράγωνον, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν, ἀλλ' ὡς τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα, οὕτως τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ. φημὶ οὖν ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ὑπὸ ἀπὸ ἐπὶ τὴν θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ ἀπὸ τῆς αθ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θβ κύβον, τουτέστιν ὁ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ

θβ. καὶ ὁ διὰ αθ πρὸς θβ. ὁ γὰρ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ διπλασίων τοῦ διὰ αθ πρὸς θβ. προσλαβὼν τὸν διὰ αθ πρὸς θβ. ὁ αὐτός ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς αθ κύβῳ πρὸς τὸν ἀπὸ θβ κύβον. ἑκάτερος γὰρ τοῦ αὐτοῦ ἐστι τριπλάσιος. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ προσλαβὼν τὸν τῆς αθ πρὸς θβ. ὁ τοῦ ἀπὸ αθ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ. ἐπεὶ γὰρ ὁ τῆς αθ πρὸς θβ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς θβ πρὸς θγ, τῆς βθ μέσης ἀνάλογον ὑπαρχούσης. ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ μετὰ τοῦ τῆς βθ πρὸς θγ. ἀλλ' ὁ τῆς βθ πρὸς θγ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ βθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ, τῆς βθ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. ὥστε ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ λόγος, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, μετὰ τοῦ ἀπὸ θβ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ. ἀλλ' ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ λόγος ὁ συγκείμενός ἐστιν ἐκ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ, καὶ τοῦ ἀπὸ βθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ, τοῦ ἀπὸ βθ μέσου λαμβανομένου. ὥστε ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ λόγος, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ ἐπὶ τὴν θη, τῆς θη κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. φημὶ δὴ ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θη. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσόν ἐστι. δεικτέον ὅτι τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ βθγ ἐπὶ τὴν θη, ταυτόν ἐστι τῷ δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θη πρὸς θζ. ἐὰν γὰρ ὦσι τέσσαρες ὅροι ὡς ἐνταῦθα, τὸ ἀπὸ γθ καὶ τὸ ὑπὸ γθβ, καὶ ἡ θη καὶ θζ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἔλασσον ᾖ τοῦ ὑπὸ τῶν μέσων, ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ τρίτος πρὸς τὸν τέταρτον, ὡς δέδεικται ἀνωτέρω. εὐλόγως ἄρ' ἐχρῆν δεῖξαι τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἔλασσον τοῦ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θη. ταυτόν ἐστι τῷ δεῖξαι ὅτι τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θη πρὸς θζ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ, ἡ γθ πρὸς θβ. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ γθ πρὸς θβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θη πρὸς θζ. τουτέστιν ἡ ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ ε τῇ εγ πρὸς ὀρθὰς ἡ εκ. καὶ ἀπὸ τοῦ β κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ βλ. ἐπίλοιπον ἡμῖν δεῖξαι δεῖ, ὅτι ἡ ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἴση δέ ἐστιν ἡ θζ συναμφοτέρῳ τῇ θακε. ἡ γὰρ αζ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστί. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ ηθ πρὸς συναμφότερον τὴν θακε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. καὶ ἀφαιρεθείσης ἄρα ἀπὸ τῆς ηθ τῆς γθ. ἀπὸ δὲ τῆς κε τῆς ελ ἴσης τῇ βθ δεήσει δειχθῆναι, ὅτι λοιπὴ ἡ γη πρὸς λοιπὴν συναμφότερον τὴν αθκλ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἐπεὶ γὰρ δεῖ δειχθῆναι, ὅτι ἡ ηθ πρὸς συναμφότερον τὴν θακε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. καὶ ἐναλλάξ, ὅτι ἡ ηθ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ θακε πρὸς θβ. τουτέστι πρὸς λε, καὶ διελόντι ἡ ηγ πρὸς γθ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ θακλ πρὸς λε, τουτέστι πρὸς βθ. ἐναλλάξ, ὅτι ἡ ηγ πρὸς συναμφότερον τὴν θακλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἀλλ' ὡς ἡ γθ πρὸς θβ. οὕτως ἡ θβ πρὸς θα, τουτέστιν ἡ λε πρὸς αθ. ὅτι ἄρα ἡ ηγ πρὸς συναμφότερον τὴν θακλ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ λε πρὸς αθ. καὶ ἐναλλάξ, ὅτι ἡ γη, τουτέστιν ἡ κε πρὸς ελ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλθα πρὸς θα, διελόντι ἡ κλ πρὸς λε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ αὐτὴ ἡ κλ πρὸς θα. τουτέστιν ὅτι ἐλάσσων ἡ λε τῆς θα ἐστίν. ἑξῆς δὲ ἡμεῖς τὴν σύνθεσιν προσθήσομεν, ἐπεὶ ἡ λε τῆς αθ ἐλάσσων, ἡ ἄρα κλ πρὸς λε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κλ πρὸς αθ. συνθέντι ἡ κε πρὸς ελ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλαθ πρὸς αθ. ἡ δὲ λε τῇ βθ ἐστὶν ἴση. ἡ ἄρα ηγ πρὸς βθ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλαθ πρὸς αθ. ἐναλλάξ, ἡ ἄρα ηγ πρὸς συναμφότερον τὴν κλαθ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ βθ πρὸς θα, τουτέστιν ἡ γθ πρὸς θβ. ἐναλλὰξ ἡ ηγ πρὸς γθ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλαθ πρὸς θβ. συνθέντι ἡ ηθ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλαθ μετὰ τῆς θβ, τουτέστι συναμφότερος ἡ αθκε πρὸς βθ. ἴση δὲ ἡ κε τῇ αζ. ἡ ἄρα ηθ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ζθ πρὸς θβ. ἐναλλὰξ ἡ ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ὡς δὲ ἡ γθ πρὸς θβ, οὕτως τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ. ἡ ἄρα ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ, καὶ διὰ τὰ πρότερον εἰρημένα, τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θη. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θη, τουτέστι τὸ ἀπὸ

αθ ἐπὶ

α θ ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ὑπὸ γ θ β, ἐπὶ τὴν θ ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ὑπὸ γ θ β. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ὑπὸ β θ γ, τοῦ ἀπὸ β θ μέσου λαμβανομένου, σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ β, καὶ τοῦ ἀπὸ β θ πρὸς τὸ ὑπὸ β θ γ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ β θ πρὸς τὸ ὑπὸ β θ γ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς β θ πρὸς θ γ, τουτέστι τῷ τῆς α θ πρὸς β θ. τὸ ἄρα ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ β, μετὰ τοῦ τῆς α θ πρὸς θ β. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ β, καὶ τοῦ τῆς α θ πρὸς θ β, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ τῆς α θ κύβου, πρὸς τὸν ἀπὸ θ β κύβον. τουτέστι τοῦ ἀπὸ α β κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ β γ κύβον. τὸ ἄρα ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ θ ζ μείζονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ α β κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ β γ κύβον. ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ λόγος, ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ τῶν τμημάτων λόγῳ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς α β κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς β γ κύβου λόγον, ἡμιόλιος ἐδείχθη τοῦ τῶν ἐπιφανειῶν λόγου. τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν.

ΕΙΣ ΤΟ Θ.

Δῆλον δὲ ὅτι ἡ β α τῆς μὲν α κ ἐλάσσων ἐστὶ, ἢ διπλασία δυνάμει. τῆς δὲ ἐκ τοῦ κέντρου μείζων, ἢ διπλασία. ἐπιζευχθείσης γὰρ ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὸ κέντρον τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ ἀμβλείας γινομένης ὑπὸ τῆς β α, τὸ ἀπὸ τῆς α β μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν περιεχουσῶν ἴσων ὄντων. ὥστε τοῦ ἑνὸς αὐτῶν, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου μεῖζον ἐστὶν, ἢ διπλάσιον. πάλιν δὲ τοῦ ἀπὸ α β ἴσου ὄντος τοῖς ἀπὸ α κ, κ β. καὶ μείζονος ὄντος τοῦ ἀπὸ α κ τοῦ ἀπὸ κ β, τὸ ἀπὸ α β τοῦ ἀπὸ α κ ἔλασσον ἐστὶν ἢ διπλάσιον. καὶ ταῦτα μὲν ἐπὶ τοῦ σχήματος, ἐφ' οὗ σημεῖον θ. ἐν δὲ τῷ ἑτέρῳ σχήματι τἀναντία τούτοις εἰκότως λεχθήσεται.

Ἔσω τῇ ε λ ἴση ἡ ε ν. καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν θ ζ, κῶνος ἔσω κορυφὴν ἔχων τὸ ν σημεῖον. ἴσος δὴ καὶ οὗτος ἐστὶ τῷ κατὰ τὴν θ ε ζ περιφέρειαν ἡμισφαιρίῳ. ἐπεὶ γὰρ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν θ ζ, ὕψος δὲ τὴν δ ε, τοῦ μὲν κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν, καὶ ὕψος ἴσον, τριπλάσιός ἐστι, τοῦ δὲ ἡμισφαιρίου ἡμιόλιος. τὸ ἡμισφαίριον διπλάσιον ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ κώνου. ἔστι δὲ καὶ ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν θ ζ κύκλον. ὕψος δὲ τὴν λ ν, διπλάσιος τοῦ αὐτοῦ κώνου. καὶ τὸ ἡμισφαίριον ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζ θ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν λ ν.

Τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν α ρ γ μεῖζόν ἐστι τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν α κ γ, διότι τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν τοῦ ἐλάσσονος τοῦ ἑτέρου μείζονα ἔχει. εἴρηται γὰρ ἀνωτέρω, ὅτι ἐὰν εὐθεῖα τμηθῇ εἰς ἄνισα, κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῶν ἐπὶ τὴν ἐγγυτέραν τῆς διχοτομίας τομὴν μεῖζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν τμημάτων ἐπὶ τὴν ἀπωτέρω. ταυτὸν δὲ ἐστὶν εἰπεῖν. διότι τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν τῆς ἐλάσσονος τοῦ ἑτέρου μείζονα ἔχει. ὅσῳ γὰρ ἐλάσσων ἐστὶ, τοσούτῳ πλεῖον ἀφέστηκεν ἡ τομὴ τῆς διχοτομίας.

Τὸ δὲ ἀπὸ τοῦ α ρ ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τοῦ α κ, γ ξ. ἥμισυ γὰρ ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ α β. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῇ ἡ β γ, διὰ τὸ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετον ἦχθαι τὴν β κ, καὶ τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοια εἶναι τῷ ὅλῳ γὰρ τὸ ὑπὸ γ α κ ἴσον τῷ ἀπὸ α β, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῆς ἡμισείας τῆς γ α, καὶ α κ, τουτέστι τὸ ὑπὸ γ ξ α κ ἴσον ἐστὶ τῷ ἡμίσει τοῦ ἀπὸ α β, τουτέστι τῷ ἀπὸ α ρ.

Μεῖζον οὖν ἐστὶ καὶ τὸ συναμφότερον τοῦ συναμφοτέρου. ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ α κ, γ ξ, τῷ ἀπὸ α ρ, μεῖζον δὲ τὸ ὑπὸ α ρ γ τοῦ ὑπὸ α κ γ. ἐὰν δὲ ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα, καὶ ἐκεῖνο μεῖζον, ὃ καὶ ἐξ ἀρχῆς μεῖζον, τῷ ὑπὸ α ρ γ προστεθέντος τοῦ ἀπὸ α ρ, τῷ δὲ ὑπὸ α κ γ τοῦ ὑπὸ α κ γ ξ, μεῖζον γίνεται τὸ ὑπὸ α ρ γ μετὰ τοῦ ἀπὸ α ρ, τοῦ ὑπὸ α κ γ, μετὰ τοῦ ὑπὸ α κ γ ξ, ἀλλὰ τὸ ὑπὸ α ρ γ, μετὰ τοῦ ἀπὸ α ρ ἴσον γίνεται τῷ ὑπὸ γ α ρ, διὰ τὸ δεύτερον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῆς στοιχειώσεως. τὸ δὲ ὑπὸ α κ γ μετὰ τοῦ ὑπὸ α κ γ ξ ἴσον τῷ ὑπὸ α κ κ ξ, διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ αὐτοῦ βιβλίου, ὥστε τὸ ὑπὸ γ α ρ μεῖζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ α κ ξ. τῷ δὲ ὑπὸ τῆς ξ κ α ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῆς μ κ γ. ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ ξ γ πρὸς γ κ, ἡ μ α πρὸς α κ. ὥστε καὶ συνθέντι ὡς ἡ ξ κ πρὸς κ γ, οὕτως ἡ μ κ πρὸς κ α. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ξ κ α ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ μ κ γ. ἀλλὰ τοῦ ὑπὸ τῆς ξ κ α μεῖζον ἦν τὸ ὑπὸ γ α ρ. καὶ τὸ ὑπὸ γ α ρ ἄρα μεῖζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ μ κ γ. ὥστε μείζονα λόγον ἔχει ἡ α γ πρὸς γ κ, ἤπερ ἡ μ κ πρὸς α ρ. ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες εὐθεῖαι

εἰσὶν αἱ γκ, κμ, γα, αρ. καὶ τὸ ὑπὸ πρώτης τῆς γα καὶ τετάρτης τῆς αρ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ δευτέρας τῆς μκ, καὶ τρίτης τῆς κγ. ἡ πρώτη ἡ γα πρὸς δευτέραν τὴν μκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τρίτη ἡ κγ πρὸς τετάρτην τὴν αρ. καὶ ἐναλλὰξ ἡ γα πρὸς κγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ αγ πρὸς γκ, τοῦτον ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ. ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς βγ, διὰ τὸ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετον εἶναι τὴν βγ, γίνεται ὡς ἡ αγ πρὸς γβ, ἡ βγ πρὸς γκ. καὶ διὰ τοῦτο ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, τουτέστιν ἡ αγ πρὸς γκ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ. ὅμοιον γὰρ τὸ αβκ τῷ αβγ. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ αγ πρὸς γκ, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ. ἡ δὲ αγ πρὸς γκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ. καὶ τὸ ἀπὸ αβ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ βκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίσυ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ αβ. ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ αρ, πρὸς τὸ ἀπὸ βκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡμίσεια τῆς μκ πρὸς τὴν αρ. τουτέστιν ἡ μκ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς αρ, ἀλλὰ τῷ ἀπὸ αρ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ζλ. ἐπειδὴ ἡ μὲν αβ τῇ εζ ὑπόκειται ἴση, ἡ δὲ εζ τῇ ζλ δυνάμει διπλῆ. ἴση γὰρ ἡ ελ τῇ λζ. τῆς δὲ αρ διπλασία ἡ νλ. ἐπεὶ καὶ τῆς λζ. ὥστε τὸ ἀπὸ ζλ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς αρ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ λν. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν θζ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ, ἤπερ ἡ μκ πρὸς νλ. ὥστε μείζων ἐστὶν ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ ν σημεῖον, τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ μ σημεῖον. ἐὰν γὰρ ποιήσωμεν ὡς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλον, οὕτως τὴν κμ πρὸς ἄλλην τινὰ, ἔσται πρὸς ἐλάσσονα τῆς λν. καὶ ἔσται ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν εὑρεθεῖσαν ἐλάσσονα εὐθεῖαν, ἴσος μὲν τῷ μβδ διὰ τὸ ἀντιπεπονθέναι τὰς βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἐλάττων δὲ τοῦ νθζ διὰ τὸ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντας πρὸς ἀλλήλους εἶναι ὡς τὰ ὕψη. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ἡμισφαίριον τὸ κατὰ τὴν εζθ περιφέρειαν, μεῖζόν ἐστι τοῦ τμήματος τοῦ κατὰ τὴν αβδ περιφέρειαν.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟμνημα εἰς τὸ δεύτερον τῶν ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἐκδόσεως, παραναγνωσθείσης τῷ μιλησίῳ μηχανικῷ ἰσιδώρῳ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ.

Εὐτοκίου πινυτοῦ γλυκερὸς πόνος, ὅν ποτ᾽ ἐκεῖνος
γράψεν τοῖς φθονεροῖς πολλάκι μεμψάμενος.

Εὐτοκίου

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΝ.



Ἀκόλουθον ἂν εἴη τὸν ἐμὸν πληροῦντι σκοπὸν τοῖς σαφεστέροις, καὶ βραχυτέρας ἐπιστάσεως δεομένοις, τῶν ὑπὸ Ἀρχιμήδους γεγραμμένων ἐντυγχάνοντι, καὶ τὰ ὁποσοῦν ἐν αὐτοῖς ἐπεξεργασίας δεόμενα, τὸν δυνατὸν τρόπον συνεχῆ ποιεῖν τοῖς πρότερον ὑφ' ἡμῶν ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου γεγραμμένοις, ἔχει ὡς ἀληθῶς ἄξιον τυγχάνοντός τινος καὶ τοῖς μείζοσι καὶ πλείονος φροντίδος δεομένοις ἐπιστῆναι. εἴη δ' ἂν ὡς πρὸς τὸ προκείμενον ἐφεξῆς τὸ γεγραμμένον Ἀρχιμήδει βιβλίον κύκλου μέτρησιν τὴν ἐπιγραφὴν ἔχον, ἐν ᾧ τὴν πρόθεσιν τἀνδρὸς, ἐξ αὐτῆς τῆς ἐπιγραφῆς γνωρίζομεν. βούλεται γὰρ ἐπιδεῖξαι τίνι χωρίῳ εὐθυγράμμῳ ἴσος ἂν εἴη κύκλος, πρᾶγμα πάλαι πρὸς τῶν πρὸ αὐτοῦ κλεινῶν φιλοσόφων ἐζητημένον. δῆλον γὰρ ὅτι τί ἂν εἴη τὸ ζητούμενον, ὅπερ Ἱπποκράτης τε ὁ Χῖος καὶ Ἀντιφῶν ζητήσαντες ἐπιμελῶς ἐκείνους ἡμῖν τοὺς παραλογισμοὺς εὑρήκασιν, οὓς ἀκριβῶς εἰδέναι νομίζω, τούς τε τὴν Εὐδήμου γεωμετρικὴν ἱστορίαν ἐπεσκεμμένους, καὶ τῶν Ἀριστοτελικῶν μετασχόντας κηρίων. ἀλλ' ἔστι μὲν τοῦτο τὸ βιβλίον, ὥς φησιν Ἡρακλείδης ἐν τῷ Ἀρχιμήδους βίῳ, πρὸς τὰς τοῦ βίου χρείας ἀναγκαῖον. δείκνυσι γάρ, ὅτι ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλασία, καὶ ἔτι ὑπερέχει, ἔλαττον μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μεῖζον δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις. τοῦτο οὖν φησι συνεγγὺς δεδεῖχθαι, εὑρῆσθαι μέντοι αὐτῷ διά τινων ἑλίκων εὐθεῖαν ἴσην τῇ δοθείσῃ κύκλου περιφερείᾳ.

ΕΙΣ ΤΟ Α΄ ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ πρῶτον θεώρημα καὶ τοῖς ἐπὶ ποσὸν μαθημάτων γυμνασαμένοις, οὐδεμίαν ἔχον ζήτησιν φαίνεται, αὐτῶν τῶν Ἀρχιμήδους ῥημάτων σαφῶς ἐκτεθειμένων, καὶ τὸ συμπέρασμα πρὸς τὴν πρότασιν ἀνελλιπῶς ἀποσωζόντων. δοκεῖ δέ τι κατακεχρῆσθαι πρὸς τὴν ἀπόδειξιν πράγματι μηδέπω δεδειγμένῳ. ἐκθέμενος γὰρ τρίγωνον ὀρθογώνιον φησίν, ἐχέτω τὴν μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἴσην τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, τὴν δὲ λοιπὴν τῇ περιφερείᾳ, ἀλλὰ τῇ περιφερείᾳ κύκλου ἴσην εὐθεῖαν λαβεῖν, οὐδὲ πρὸς αὐτοῦ ἤδη δεδειγμένον ἐστίν, ἀλλ' οὐδὲ ὑπ' ἄλλου παραδεδομένον. συνορᾶν δὲ ὅμως χρή, ὡς οὐδὲν ἔξω τῶν προσηκόντων ὑπ' Ἀρχιμήδους γράφεται. ἐὰν γὰρ τὸ μέγεθος τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, παντί που δῆλον. οἶμαι καὶ τοῦτο τῶν ἐφ' ἓν διαστατῶν. ἔστι δὲ καὶ εὐθεῖα τοῦ αὐτοῦ εἴδους. κἂν εἰ μηδέπω δὲ ἐφάνη, δυνατὸν περιφερείᾳ κύκλου ἴσην εὐθεῖαν πορίσασθαι, ἀλλ' ὅμως εἶναί τινα τῇ φύσει εὐθεῖαν ἴσην αὐτῇ πρὸς οὐδενὸς ἐστὶ ζητούμενον. τὸ κοινὸν καὶ πρὸς Ἀρχιμήδους προτεθὲν πιστὸν ἐστίν. ὅτι τρίγωνον τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον ὡς προείρηται τὰς πλευράς, ἴσον ἐστὶ τῷ κύκλῳ, ὥς τε τὸ προτεθὲν ἐκθέμενος οὐδεμίαν ἂν καταχρήσεως κρίνοιτο. θαύματος δ' ἂν μᾶλλον καὶ τούτοις δόξειεν τοῖς οὕτως ὑπερμεγέθεσι τῶν ζητημάτων σαφῆ καὶ ῥᾳδίαν τὴν εὕρεσιν ἐπιτιθείς. ὡς δὲ εἴρηται, οὐδὲ μιᾶς ζητήσεως τῷ πρώτῳ θεωρήματι. τὸ γὰρ π ο ε τρίγωνον, ὅτι μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ α ζ ο μ σχήματος, καὶ ὅτι ἁπλῶς περὶ τὸν δοθέντα κύκλον, δυνατὸν εὐθύγραμμον περιγράψαι, ὥστε τὰ τμήματα τὰ μεταξὺ τῶν τοῦ κύκλου περιφερειῶν καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ περιγραφομένου εὐθυγράμμου, ἐλάττονα εἶναι τοῦ δοθέντος χωρίου, σαφῶς εἴρηται ἐν τοῖς εἰς τὸ πρῶτον τῶν περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου γεγραμμένοις ἡμῖν.

ΕΙΣ ΤΟ Γ΄ ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐν τούτῳ τῷ θεωρήματι συνεχῶς ἐπιταττόμεθα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τὴν τετραγωνικὴν πλευρὰν εὑρεῖν. τοῦτο δὲ ἀκριβῶς μὲν εὑρεῖν ἐπὶ ἀριθμοῦ μὴ ὄντος τετραγώνου ἀδύνατον. ἀριθμὸν μὲν γὰρ ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαζόμενον ποιεῖ τινὰ τετράγωνον ἀριθμόν. ὃς δὲ καὶ μόριον ἐφ' ἑαυτὰ γινόμενα, οὐκέτι ἀριθμὸν ποιεῖ πλήρη, ἀλλὰ καὶ μόριον. ὅπως δὲ δεῖ σύνεγγυς τὴν δύναμιν πλευρὰν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εὑρεῖν, εἴρηται μὲν Ἥρωνι ἐν τοῖς μετρικοῖς. εἴρηται δὲ Πάππῳ καὶ Θέωνι καὶ ἑτέροις πλείοσιν, ἐξηγουμένοις τὴν μεγάλην σύνταξιν τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου. ὥστε οὐδὲν ἡμᾶς χρὴ περὶ τούτου ζητεῖν, ἐξὸν τοῖς φιλομαθέσιν ἐξ ἐκεί-

νων ἀναλέγεσθαι, καὶ ἡ ὑπὸ γεζ τρίτον ὀρθῆς. ἐὰν γὰρ τὴν τοῦ ἑξαγώνου περιφέρειαν διχοτομήσαντες, καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς πρὸς τῷ γ ἀπολαβόντες ἐπιζεύξωμεν τὴν εζ. καὶ ἡ ὑπὸ γεζ τρίτον ὀρθῆς. ἡ γὰρ πρὸς τῷ γ ἀποληφθεῖσα περιφέρεια ἡμίσεια οὖσα τῆς τοῦ ἑξαγώνου δωδέκατόν ἐστι τοῦ κύκλου, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ γεζ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ οὖσα, δωδέκατόν ἐστι τῶν τεσσάρων ὀρθῶν, τρίτον ἄρα ὀρθῆς. ἡ εζ ἄρα πρὸς ζγ λόγον ἔχει, ὃν τϛ πρὸς ρνγ. ὅτι διπλῆ ἐστιν ἡ εζ τῆς ζγ, δῆλον ἐντεῦθεν. ἐὰν γὰρ προσεκβαλόντες τὴν ζγ ἐπὶ τὸ μ. καὶ ἴσην αὐτῇ ἀποθέμενοι ἐπιζεύξωμεν ἀπὸ τοῦ ε. συσταθήσεται ἡ πρὸς τῷ μ γωνία διμοίρου ὀρθῆς. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ ε γωνία διμοίρου ὀρθῆς. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ ζ διμοίρου ἰσοπλεύρου. ἄρα τριγώνου ἥμισυ ἐστὶ τὸ γεζ, καὶ διὰ τὸ τὴν βάσιν τοῦ ἰσοπλεύρου ἴσην οὖσαν τῇ εζ δίχα τέμνεσθαι κατὰ τὸ γ, διπλῆ ἐστιν ἡ εζ τῆς γζ. ἡ δὲ εγ πρὸς γζ λόγον ἔχει, ὃν σξε πρὸς ρνγ. ἐπεὶ γὰρ ἡ εζ ὑπόκειται τϛ. ἐὰν αὐτὰ ἐφ' ἑαυτὰ πολυπλασιάσωμεν γενήσεται $\overset{\theta}{M}$ ͵γχλϛ. ἡ δὲ γζ ἐστὶ ρνγ. ὥστε τὸ ἀπ' αὐτῆς ἔσται $\overset{\beta}{M}$ ͵γυθ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ εζ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ εγ, γζ. ἐὰν ἀπὸ τῶν ἀπὸ εζ ὄντος $\overset{\theta}{M}$ ͵γχλϛ, ἀφέλωμεν τὸ ἀπὸ γζ ὑπάρχον $\overset{\beta}{M}$ ͵γυθ, καταλειφθήσεται τὸ ἀπὸ ε $\overset{\zeta}{M}$ σκζ. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ σξε. καὶ ἔτι μόριον ἐλάχιστον καὶ ἀνεπαίσθητον. λείπεται γὰρ ἡ τῶν σξε δύναμις τῆς ἀκριβοῦς μονάσιν β. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ εζ τϛ	ἡ ζγ ρνγ	λοιπὸν τὸ ἀπὸ εγ $\overset{\zeta}{M}$ σκζ
ἐπὶ τϛ	ἐπὶ ρνγ	τὰ δὲ σξε ἐφ' $\overset{\zeta}{M}$ σκε
$\overset{\theta}{M}$ ͵αω	$\overset{\alpha}{M}$ ͵ετ	ἐπεὶ δ' ἐλλείπει ἄρα $\overset{\theta}{M}$ β
͵αω λϛ	͵ζχν	$\overset{\delta}{M}$ M ͵β ͵α εἰς τὸ ἀκριβές
ὁμοῦ $\overset{\theta}{M}$ ͵γχλϛ	υνθ	$\overset{\alpha}{M}$ ͵β ͵γχτ
	$\overset{\beta}{M}$ ͵γυθ	͵ατκε.

Τετμήσθω οὖν ἡ ὑπὸ ζεγ δίχα τῇ εη. ἔστιν ἄρα ἡ ζε πρὸς εγ, ἡ ζη πρὸς ηγ, διὰ τὸ τρίτον θεώρημα τοῦ ἕκτου βιβλίου τῆς εὐκλείδου στοιχειώσεως. καὶ συνθέντι ὡς συναμφότερος ἡ ζε, εγ πρὸς εγ, ἡ ζγ πρὸς γη. καὶ ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ ζε, εγ πρὸς ζγ, ἡ εγ πρὸς γη. συναμφότερος δὲ ἡ εζ, εγ μείζων ἐστὶν ἤπερ φοα. ἡ μὲν γὰρ ζε ὑπόκειται τϛ. ἡ δὲ εγ σξε, καὶ ἔτι μορίου τινός. ὥστε μείζον εἰσὶν τῶν φοα. ἡ δὲ ζγ ἐστὶ ρνγ. συναμφότερος ἄρα ἡ ζε, εγ πρὸς ζγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ φοα πρὸς ρνγ. ὥστε καὶ ἡ εγ πρὸς ηγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ

ἥπερ φοα πρὸς ρνγ, ἡ ηε ἄρα πρὸς ηγ δυνάμει λόγον ἔχει, ὃν $\overset{\lambda\delta}{\mathrm{M}}$ ͵θυν πρὸς $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$ ͵γυθ. συναχθήσεται δὲ τοῦτο οὕτως. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἡ εγ πρὸς γη μείζονα λόγον ἔχουσα ἥπερ φοα πρὸς ρνγ. εἴ τις ὑποθοῖτο τὴν μὲν εγ, φοα. τὴν δὲ γη, ρνγ, ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ εγ $\overset{\lambda\beta}{\mathrm{M}}$ ͵ϛμα. τὸ δὲ ἀπὸ γη $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$ ͵γυθ. συναμφότερα δὲ ἴσα ὄντα τῷ ἀπὸ εη, ἔσται $\overset{\lambda\delta}{\mathrm{M}}$ ͵θυν. τούτων πλευρὰ τετραγωνικὴ φϙα η' ἔγγιστα. ἐλλείπει γὰρ ὁ ἀπὸ τοῦ φϙα η' ἴσον τετραγώνῳ εἰς τὸ ἀκριβὲς $\overset{o}{\mathrm{M}}$ κα. ϛ' ιε' ἔγγιστα. ἡ ἄρα εη πρὸς ηγ, δυνάμει μὲν λόγον ἔχει ὃν $\overset{\lambda\delta}{\mathrm{M}}$ ͵θυν πρὸς $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$ ͵γυθ. μήκει δὲ ὃν φϙα η' ἔγγιστα πρὸς ρνγ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ εγ φοα	ἡ ηγ, ρνγ	φϙα η'
ἐπὶ φοα	ἐπὶ ρνγ	ἐπὶ φϙα η'
$\overset{\kappa\epsilon}{\mathrm{M}}$ $\overset{\gamma}{\mathrm{M}}$ ͵εφ	$\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$ ͵ετ	$\overset{\kappa\epsilon}{\mathrm{M}}$, $\overset{\delta}{\mathrm{M}}$ ͵εφξβ ∠'
$\overset{\gamma}{\mathrm{M}}$ ͵ε δλο	͵ε, ͵β φ, ρν.	$\overset{\epsilon}{\mathrm{M}}$ ͵ηρ ϙια δ'
φοα	τ ρνθ	φϙα η'
$\overset{\lambda\beta}{\mathrm{M}}$ ͵ϛμα	ὁμοῦ $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$ ͵γυθ	ξβ ζια δ' υξ δ'
	ὁμοῦ $\overset{\lambda\delta}{\mathrm{M}}$	θ υκη ζ' δ' ξ δ'
Ἐκ τούτων συνάγεται		Ἐλλείπει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς
τὸ ἀπὸ εη		$\overset{o}{\mathrm{M}}$ κα ϛ' ιε' ἔγγιστα
$\overset{\lambda\delta}{\mathrm{M}}$ ͵θυν		

Πάλιν δίχα ἡ ὑπὸ ηεγ τῇ θε, διὰ τὰ αὐτὰ ἡ εγ πρὸς γθ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵αρξβ η' πρὸς ρνγ. γίνεται γὰρ διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας, ὡς ἡ ηε πρὸς εγ, ἡ ηθ πρὸς θγ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ ηε, εγ πρὸς εγ, ἡ ηγ πρὸς γθ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ ηε, εγ πρὸς ηγ, ἡ εγ πρὸς γθ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν εγ, φοα, καὶ ἔτι μορίου τινός. ἡ δὲ εη φϙα. καὶ ἔτι μορίου τινός. μείζονες ἄρα εἰσίν, ἤπερ ͵αρξβ η'. καὶ ἔστιν ἡ ηγ, ρνγ. συναμφότερος ἄρα ἡ ηε, εγ πρὸς ηγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵αρξβ η' πρὸς ρνγ.

Η θε ἄρα πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ ͵αρξβ η' πρὸς ρνγ. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἡ εγ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχουσα, ἤπερ ͵αρξβ η' πρὸς ρνγ. εἴ τις ὑποθοῖτο αὐτὰς οὕτως ἔχειν, ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ εγ $\overset{\rho\lambda\epsilon}{\mathrm{M}}$ φλ δὲ ∠' ξ' δ''. τὸ δὲ ἀπὸ γθ $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$ ͵γυθ. τὸ ἄρα ἀπὸ εθ ἴσον ὂν τοῖς ἀπὸ εγ, γθ, ἔσται $\overset{\rho\lambda\zeta}{\mathrm{M}}$ ͵γλμγ ∠' ξ' δ', ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ͵αροβ. λείπεται γὰρ τοῦ ἀκριβοῦς δυνάμεως τὸ ἀπ' αὐτοῦ $\overset{o}{\mathrm{M}}$ ξϛ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ εγ ͵αρξβ η'	ἡ θγ ρνγ	͵αροβ η'
ἐπὶ ͵αρξβ η'	ἐπὶ ρνγ	ἐπὶ ͵αροβ η'
$\overset{\rho}{\mathrm{M}}$ $\overset{\iota}{\underset{\alpha}{\mathrm{M}}}$ $\overset{\varsigma}{\mathrm{M}}$ ͵βρκε	μα ͵ετ	$\overset{\rho}{\mathrm{M}}$ $\overset{\iota}{\underset{\alpha}{\mathrm{M}}}$ $\overset{\zeta}{\mathrm{M}}$ ͵βρμϛ ∠'
$\overset{\varsigma}{\mathrm{M}}$ M ͵ϛσιβ ∠'	͵ε ͵β φρν	$\overset{\zeta}{\mathrm{M}}$ $\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$ ζσκα ∠'
$\overset{\varsigma}{\mathrm{M}}$ ͵ϛ γχρκζ ∠'	τρνθ	$\overset{\zeta}{\mathrm{M}}$ ͵ζ δ' λρμη ∠' δ'
͵βσρκ δ' δ'	ὁμοῦ $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$ ͵γυθ	͵βσρμ δ' δ'
ρμε δ' ξ' δ'		ρμϛ ∠' ξ' δ'
ὁμοῦ $\overset{\rho\lambda\epsilon}{\mathrm{M}}$ φλ δ' ∠' ξ' δ'	ὁμοῦ $\overset{\rho\lambda\zeta}{\mathrm{M}}$ ͵γλζ ∠' ξ' δ'	
τὸ ἀπὸ εθ ἴσον τοῖς		Ἐλλείπει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς
ἀπὸ εγ γθ ἐστὶ $\overset{\rho\lambda\zeta}{\mathrm{M}}$ ͵γλμγ ∠' ξ' δ'.		$\overset{o}{\mathrm{M}}$ λϛ.

Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ θεγ τῇ εκ, ἡ εγ ἄρα πρὸς γκ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ͵βτλδ δ' πρὸς ρνγ. πάλιν γὰρ διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς ὑπὸ θεγ γωνίας ἐστὶν ὡς ἡ θε πρὸς εγ, ἡ θκ πρὸς γκ. καὶ συνθέντι ὡς συναμφότερος ἡ θε, εγ πρὸς εγ, ἡ θγ πρὸς γκ. ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ θε, εγ πρὸς θγ, ἡ εγ πρὸς γκ. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ θε ͵αροβ η', καὶ ἔτι μορίου τινός. συναμφότερος ἄρα ἡ θε, εγ μείζων ἐστὶ ͵βτλδ δ'. καὶ ὑπόκειται ἡ θγ ρνγ. συναμφότερος ἄρα ἡ θε, εγ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βτλδ δ' πρὸς ρνγ.

Ἡ εκ ἄρα πρὸς τὴν γκ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵βτλθ δ' πρὸς ρνγ. πάλιν γὰρ ἐπεὶ ὑπόκειται

ἡ μὲν

ἡ μὲν εγ, ͵βτλδ δ΄. ἡ δὲ γκ, ρνγ. ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ εγ $\overset{φνδη}{Μ}$ ͵ψκγ ις΄. τὸ δὲ ἀπὸ γκ $\overset{β}{Μ}$ ͵γυθ. τούτοις δὲ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ κε. ἔσται ἄρα $\overset{φνζ}{Μ}$ ͵βρλβ ις΄. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ἔγγιστα ͵βτλθ δ΄. λείπει γὰρ τὸ ἀπ' αὐτῆς τοῦ ἀκριβοῦς $\overset{ο}{Μ}$ μα <. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ εγ ͵βτλδ δ΄	ἡ γκ ρνγ	͵βτλθ δ΄
ἐπὶ ͵βτλδ δ΄	ἐπὶ ρνγ	ἐπὶ ͵βτλθ δ΄
$\overset{υ}{Μ}$ $\overset{ξ}{Μ}$ $\overset{ς}{Μ}$ ηφ	$\overset{α}{Μ}$ ετ	$\overset{υ}{Μ}$ $\overset{ξ}{Μ}$ $\overset{ς}{Μ}$ $\overset{α}{Μ}$ ηφ
$\overset{ξ}{Μ}$ $\overset{θ}{Μ}$ ͵θασοε	͵ε βφρν	$\overset{ξ}{Μ}$ $\overset{θ}{Μ}$ ͵θ ͵βψοε
$\overset{ς}{Μ}$ ͵θλρκζ <	τρνθ	$\overset{ς}{Μ}$ ͵θλςοζ <
ηασρκ ις α	ὁμοῦ $\overset{β}{Μ}$ ͵γυθ	$\overset{α}{Μ}$ ͵η ͵βψςοπαβ δ΄
φπγ < ις		φπδ < δ΄ ις.
ὁμοῦ $\overset{φμδ}{Μ}$ ͵ηψκγ ις΄		ὁμοῦ $\overset{φμζ}{Μ}$ ͵βϙ < ις΄
ἐκ τούτων συνάγεται τὸ		ἐλλείπει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς
ἀπὸ εκ $\overset{φμζ}{Μ}$ ͵βρλβ ις.		$\overset{ο}{Μ}$ μα <

Ἐπεὶ δίχα ἡ ὑπὸ κεγ τῇ ελ, ἡ εγ ἄρα πρὸς γλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὰ ͵δχογ < πρὸς ρνγ. πάλιν γὰρ διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας ἐστὶν, ὡς ἡ κε πρὸς εγ, ἡ κλ πρὸς λγ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ κε, εγ πρὸς εγ, ἡ κγ πρὸς γλ. ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ κε, εγ πρὸς κγ, ἡ εγ πρὸς λγ. καί ἐστιν ἡ μὲν κε ͵βτλθ δ΄, καὶ ἔτι μορίου τινός. ἡ δὲ εγ ͵βτλδ δ΄, καὶ ἔτι μορίου. συναμφότερος ἄρα ἡ κε, εγ μείζων ͵δχογ <΄. καί ἐστιν ἡ κγ, ρνγ. συναμφότερος ἄρα ἡ εκ, εγ πρὸς κγ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵δχογ < πρὸς ρνγ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ κε, εγ πρὸς κγ, οὕτως ἡ εγ πρὸς γλ. καὶ ἡ εγ ἄρα πρὸς γλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵δχογ < πρὸς ρνγ. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ζεγ τρίτου οὖσα ὀρθῆς, δωδέκατον μέρος ἐστὶ τῶν τεσσάρων ὀρθῶν. ταύτης δὲ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ κεγ, εἰκοστότεταρτον ἂν εἴη. ταύτης δὲ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ θεγ, ὥστε μη ἐστί. ταύτης δὲ ἡμίσεια ἐστὶν ἡ ὑπὸ κεγ. ϙς ἄρα ἐστὶ, ἧς ἡμίσεια οὖσα ἡ ὑπὸ λεγ, ρϙβ ἐστί. κείσθω οὖν φησὶ ἴση αὐτῇ ἡ ὑπὸ γεμ. καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ζγ ἐπὶ τὸ μ. ἡ ἄρα ὑπὸ λεμ διπλασία οὖσα τῆς ὑπὸ λεγ ϙς ἐστὶ τῶν τεσσάρων ὀρθῶν. ὥστε καὶ ἡ λμ πλευρά ἐστι τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου πολυγώνου πλευρὰς ἔχοντος ϙς. ἐπεὶ οὖν ἡ εγ πρὸς τὴν γλ δέδεικται μείζονα λόγον ἔχουσα ἤπερ ͵δχογ < πρὸς ρνγ, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν εγ διπλῆ ἡ αγ, τῆς δὲ λγ ἡ λμ, καὶ ἡ αγ ἄρα πρὸς λμ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵δχογ < πρὸς ρνγ. ἀνάπαλιν ἄρα ἡ λμ πρὸς αγ ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ ρνγ πρὸς ͵δχογ <. καὶ ἐπεὶ ἡ λμ πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ πλευρὰς ἔχοντος ϙς. ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ πολυγώνου ἐστὶ $\overset{α}{Μ}$ ͵δχπη. ὁ γὰρ ϙς ἐπὶ τὸν ρνγ πολυπλασιαζόμενος τοσοῦτον ποιεῖ. ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν αγ διάμετρον ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ $\overset{α}{Μ}$ ͵δχπη πρὸς ͵δχογ <. ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ πολυγώνου τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐστὶ τριπλασία, καὶ ἔτι ὑπερέχει $\overset{ο}{Μ}$ χξζ <΄. ταῦτα δὲ ἐλάττονά ἐστι τοῦ ἑβδόμου τῆς διαμέτρου μιᾶς μονάδος ἑβδόμῳ μέρει. τὰ γὰρ ἑπταπλάσια τῶν χξζ <, ἅπερ ἐστὶ ͵δχοβ <΄, ἐλάττονα ἐστὶ τῆς διαμέτρου $\overset{ο}{Μ}$ α. ἐπεὶ οὖν τὸ πολύγωνον ἔλαττόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον, καὶ ἔτι ἑβδόμῳ ὑπερέχον. ἡ δὲ περίμετρος τοῦ κύκλου ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ πολυγώνου. πολλῷ ἄρα ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλασία, καὶ ἔτι ὑπερέχει ἔλασσον ἢ ἑβδόμῳ μέρει.

ΕΙΣ ΤΟ Δ ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἑξῆς δὲ κατασκευάζων τὸ λοιπὸν μέρος τοῦ θεωρήματος φησί. ἔστω κύκλος περὶ διάμετρον τὴν αγ, καὶ τρίτου ὀρθῆς ἡ ὑπὸ βαγ. τοῦτο δὲ ἔσται, ἐὰν ἀπὸ τοῦ γ τῇ τοῦ ἑξαγώνου ἴσην ἀπολαβόντες τὴν γβ ἐπιζεύξωμεν τὴν αβ. ἡ γὰρ ἐπὶ τῆς τοῦ ἑξαγώνου περιφερείας βεβηκυῖα γωνία πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ διμοίρου ἐστὶν ὀρθῆς, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ τρίτου. ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ αβγ, τρίτου δὲ ἡ ὑπὸ βαγ, διμοίρου ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ αγβ. ἐὰν ἄρα προσεκβάλλοντες τὴν γβ ἐπὶ τὸ β, καὶ ἴσην αὐτῇ ἀπολαβόντες ἀπὸ τοῦ α ἐπιζεύξωμεν, ἰσόπλευρον ἔσται τὸ τρίγωνον, καὶ διὰ τὸ τὴν αβ κάθετον διχοτομεῖν τὴν βάσιν, διπλῆ ἐστιν ἡ αγ τῆς γβ. ἐὰν οὖν πάλιν λάβωμεν τὴν αγ, ͵αφξ ἔσται ἡ γβ, ψπ. ἐπεὶ τὸ μὲν ἀπὸ αγ ἔσται $\overset{ρμγ}{Μ}$ ͵γχ. τὸ δὲ ἀπὸ γβ $\overset{ξ}{Μ}$ ͵ηυ. καὶ ἐὰν ἀφέλωμεν τὸ ἀπὸ γβ ἀπὸ τοῦ αγ, λοιπὸν καταλειφθήσεται τὸ ἀπὸ αβ $\overset{ρπβ}{Μ}$ ͵ες, ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ͵ατνα ἔγγιστα, περιττεύει γὰρ τὸ ἀπ' αὐτῆς τοῦ ἀκριβοῦς

κριβοῦς Μ^ο α. διό φησιν, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἡ αβ πρὸς βγ, ἤπερ ͵ατνα πρὸς ψπ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ αγ ͵αφξ	ἡ γβ ψπ	͵ατνα
ἐπὶ ͵αφξ	ἐπὶ ψπ	ἐπὶ ͵ατνα
Μ^ρ Μ^ν Μ^ϛ	Μ^μθ Μ^ε ͵ϛ	Μ^ρ Μ^λ Μ^ε ͵α
Μ^ν Μ^κε Μ^γ	Μ^ε ͵ϛ ϛυ	Μ^λ Μ^θ Μ^α ͵ετ
Μ^ϛ Μ^γ ͵γχ	ὁμοῦ Μ^ξ ͵ηυ	Μ^ε Μ^α ͵εβφν
ὁμοῦ Μ^σμγ ͵γχ		͵ατνα
ἂν ἀφέλωμεν τὸ ἀπὸ βγ ἀπὸ τοῦ αγ, καταλείπονται Μ^ρπβ ͵εσ.		ὁμοῦ Μ^ρπβ ͵εσα
		παραλείπει τῆς ἀκριβοῦς Μ^ο α.

Τετμήσθω δίχα ἡ ὑπὸ βαγ τῇ αζ η. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαη τῇ ὑπὸ ηγβ. ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς περιφερείας βεβήκασιν, ἀλλὰ καὶ τῇ ὑπὸ ηαγ. καὶ ἡ ὑπὸ ηγβ ἄρα τῇ ὑπὸ ηαγ ἐστὶν ἴση. καὶ κοινὴ ἡ ὑπὸ αηγ ὀρθή. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ηζγ λοιπῇ τῇ ὑπὸ αγη ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ αηγ τρίγωνον τῷ γηζ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αη πρὸς ηγ, ἡ γη πρὸς ηζ. καὶ ἡ αγ πρὸς γζ. τῶν γὰρ ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι. ἀλλ᾽ ὡς ἡ αγ πρὸς γζ, συναμφότερος ἡ γαβ πρὸς γβ, καὶ ἡ αη πρὸς ηγ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ βαγ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς αζ, ἐστὶν ὡς ἡ βα πρὸς αγ, ἡ βζ πρὸς ζγ. καὶ συνθέντι ὡς συναμφότερος ἡ βα, αγ πρὸς αγ, ἡ βγ πρὸς γζ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς συναμφότερος ἡ βα, αγ πρὸς βγ, ἡ αγ πρὸς γζ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν αβ ἐλάσσων ἢ ͵ατνα. ἡ δὲ αγ ͵αφξ, ἡ δὲ βγ ψπ, συναμφότερος ἄρα ἡ αβ, βγ πρὸς βγ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βϡια πρὸς ψπ. καὶ ἡ αγ ἄρα πρὸς γζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βϡια πρὸς ψπ. ὡς δὲ ἡ αγ πρὸς γζ, ἡ αη πρὸς ηγ, καὶ ἡ αη ἄρα πρὸς ηγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵βϡια πρὸς ψπ. διὰ δὲ ταῦτα, ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ αη Μ^ωμζ ͵γϡκα. τὸ δὲ ἀπὸ ηγ Μ^ξ ͵ηυ. καὶ ἔστιν αὐτοῖς ἴσον τὸ ἀπὸ αγ. καὶ τὸ ἄρα ἔσται Μ^ϡη ͵βτκα. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ͵γιγ ∠ δ' ἔγγιστα. ὑπερέχει γὰρ τὸ ἀπ᾽ αὐτῆς τῆς ἀκριβοῦς δυνάμεως Μ^ο τξηις. διὰ ταῦτα οὖν φησιν, ὅτι ἡ αγ πρὸς γη ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵γιγ ∠ δ' πρὸς ψπ, οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ αη ͵βϡια	ἡ ηγ ψπ	͵γιγ ∠ δ'
ἐπὶ ͵βϡια	ἐπὶ ψπ	ἐπὶ ͵γιγ ∠ δ'
Μ^υ Μ^ρπ Μ^β ͵β	Μ^μθ Μ^ε ͵ϛ	Μ^ϡ Μ^γ ͵θαφψν
Μ^ρπ Μ^πα ͵θλ	Μ^ε ͵ϛ ϛυ	Μ^γ ϛλε β ∠
Μ^β ͵θρι	ὁμοῦ Μ^ξ ͵ηυ	͵θλθα ∠ ∠ δ'
͵βϡια		͵αφϛ ∠ δ' η'
ὁμοῦ Μ^ωμζ ͵γϡκα		ψνγ δ' η' ις'
		ὁμοῦ Μ^ϡλη ͵βχπθ ις'
τὰ ἀπὸ τῶν αη ηγ Μ^ϡη ͵βτκα		ὑπερέχει τῆς ἀκριβοῦς Μ^ο τξηις

Δίχα ἡ ὑπὸ γαη τῇ αθ. διὰ δὴ τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας πρὸς τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων, καὶ ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν. καὶ τὸ συνθέντι καὶ ἐναλλάξ, ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ ηα, αγ πρὸς ηγ, ἡ αθ πρὸς θγ. καὶ ὑπόκειται ἡ μὲν αη ἐλάσσων ἢ ͵βϡια. ἡ δὲ αγ ἐλάσσων ἤπερ ͵γιγ ∠ δ'. συναμφότερος ἄρα ἡ ηα, αγ ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ ͵ετκδ ∠ δ'. ἡ δὲ ηγ ἐστὶ ψπ. συναμφότερος ἄρα ἡ ηα αγ πρὸς ηγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵ετκδ ∠ δ' πρὸς ψπ. ὥστε καὶ ἡ αθ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵ετκδ ∠ δ' πρὸς ψπ. ὥστε ἡ αθ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ υνε ∠ δ' πρὸς ξ. ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας ἐστὶ μέρος ιγ'. καὶ τὰ τούτων τετραπλάσια, ἡ αθ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵αωκγ πρὸς σμ. διὰ τοῦτο γάρ φησιν, ὅτι ἑκατέρα ἑκατέρας ἐστὶ δ' ιγ'. καὶ ἐπεὶ ἡ αθ ἐστὶν ͵αωκγ, τὸ ἄρα ἀπ᾽ αὐτῆς ἐστι Μ^τλβ ͵γλκθ. ἔστι δὲ καὶ ἡ θγ σμ καὶ τὸ ἀπ᾽ αὐτῆς Μ^ε ͵ζχ. καὶ ἔστι τοῖς ἀπὸ αθ, θγ ἴσον τὸ ἀπὸ αγ. ἔσται ἄρα Μ^τλη ͵λκθ. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ͵αωλη θ' ια'. τὸ γὰρ ἀπ᾽ αὐτῆς ὑπερέχει τῆς ἀκριβοῦς Μ^ο τκα ἐγγύς. ὥστε ἡ αγ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵αωλη θ' ια' πρὸς σμ, οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ αθ ͵αωκγ	ἡ θγ σμ	͵αωλη θ' ια'

Θ ἐπὶ

ὑπὸ ͵αωκγ
$\overset{\rho}{M}$ $\overset{\pi}{M}$ $\overset{\beta}{M}$ ͵γ
$\overset{\pi}{M}$ $\overset{\xi\delta}{M}$ $\overset{\alpha}{M}$ ͵ϛϡυ
$\overset{\beta}{M}$ $\overset{\alpha}{M}$ ͵ϛυξ
͵γβυξθ
ὁμοῦ $\overset{\tau\lambda\beta}{M}$ ͵γτκθ.
τούτοις ἴσον τὸ ἀπὸ αγ
$\overset{\tau\lambda\eta}{M}$ λκθ ἐστὶ

ὑπὸ σμ
$\overset{\delta}{M}$ ͵η
ηαχ
ὁμοῦ $\overset{\epsilon}{M}$ ͵ζχ

ὑπὸ ͵αωλη θ´ ια´
$\overset{\rho}{M}$ $\overset{\pi}{M}$ $\overset{\gamma}{M}$ ηρια θ´ ∠ ια´
$\overset{\pi}{M}$ $\overset{\xi\delta}{M}$ $\overset{\lambda\omega}{M}$ ͵αςυ ϖη $\overset{\theta}{M}$ οβ η´
$\overset{\gamma}{M}$ $\overset{\beta}{M}$ ͵δλ σμγ γ´ β´ ια´
ηςυ σμξδ η´ ια´ η´
ρια θ´ πη η´ γγ γ´ θ´ θ´ η´ ϖα ςθ´
ςιαοβ ηα.
η´ αια ηςθρηα
β´ ὁμοῦ $\overset{\tau\lambda\eta}{M}$ ͵ασναγοερεγγυς.
ὑπερέχει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς $\overset{o}{M}$
τκα ἔγγυς

Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ θαγ γωνία τῇ ηα. πάλιν οὖν διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας καὶ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων καὶ τὴν ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν, καὶ τὸ συνθέντι καὶ ἐναλλὰξ ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ θα, αγ πρὸς γθ, ἡ αη πρὸς ηγ. ἀλλὰ συναμφότερος ἡ θα, αγ ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ ͵γχξ αθ´ ια´. ἐπειδὴ ἡ μὲν θα ὑπόκειται ͵αωκγ. ἡ δὲ αγ ͵αωλη θ´ ια´. ἔστι δὲ καὶ ἡ θγ σμ. συναμφότερος ἄρα ἡ θα, αγ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵γχξ αθ´ ια´ πρὸς σμ, ὥστε καὶ ἡ αη πρὸς ηγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵γχξ αθ´ ια´ πρὸς σμ. καὶ ὑπὸ τῶν $\overset{}{M}$ ͵γχξ αθ´ ια´ τοῖς ια καὶ μ´ ἐστὶ ͵αζ. τῶν δὲ σμ, ξς. ἡ αη ἄρα πρὸς ηγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵αζ πρὸς ξς. καὶ ἐστὶ τὸ $\overset{}{M}$ ἀπὸ αη $\overset{\rho\alpha}{M}$ ͵δμθ. τὸ δὲ ἀπὸ ηγ ͵δτνς, οἷς ἴσον ὂν τὸ ἀπὸ αγ ἐστὶ $\overset{\rho\alpha}{M}$ ηνε. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ͵αθς ἔγγιστα. ἡ αγ ἄρα πρὸς γη ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵αθς πρὸς ξς. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ αη ͵αζ
ὑπὸ ͵αζ
$\overset{\rho}{M}$ ͵ζ
ζμθ
ὁμοῦ $\overset{\rho\alpha}{M}$ ͵δμθ. ὁμοῦ ͵δτνς.
Τούτοις ἴσον τὸ ἀπὸ αγ ἐστὶ $\overset{\rho\alpha}{M}$ ηνε

ἡ ηγ ξς
ὑπὸ ξς
͵γχτξ
τξλς

͵αθς
ὑπὸ ͵αθς
$\overset{\rho}{M}$ ͵θρξς ∠ ς´
θπαας
ρξςζς αγλς
ὁμοῦ $\overset{\rho\alpha}{M}$ ηυιζ γ´ λς´.
ὑπερέχει τοῦ ἀκριβοῦς $\overset{o}{M}$ ιβ γ´ λς.

Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ηαγ γωνία τῇ αλ. διὰ τὰ αὐτὰ δή ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ ηα, αγ πρὸς ηγ, ἡ αλ πρὸς λγ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν αη ἐλάσσων, ἢ ͵αζ. ἡ δὲ αγ ἐλάσσων ἢ ͵αθς. ἡ δὲ ηγ, ξς. συναμφότερος ἄρα ἡ ηα, αγ πρὸς ηγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βις ς´ πρὸς ξς. καὶ ἡ αλ ἄρα πρὸς λγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βις ς´ πρὸς ξς. καὶ ἐπεὶ ἡ αλ ὑπόκειται ͵βισς´. καὶ τὸ ἀπ᾽ αὐτῆς $\overset{\upsilon\varsigma}{M}$ ͵δλκηλς´. ἡ δὲ λγ, ξς. καὶ τὸ ἀπ᾽ αὐτῆς δτνς. ἴσον δὲ αὐτοῖς ἐστὶ τὸ ἀπὸ αγ. ἔσται ἄρα $\overset{\upsilon\varsigma}{M}$ ͵θςπδλς. ὧν πλευρὰ τετραγωνική ἐστι ͵βιζδ´ ἔγγιστα ὑπερέχει τὸ ἀπ᾽ αὐτῆς τοῦ ἀκριβοῦς $\overset{o}{M}$ ιγς´ η´. ὥστε ἡ αγ πρὸς γλ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βιζδ´ πρὸς ξς. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ αλ ͵βισς´
ὑπὸ ͵βισς´
$\overset{\upsilon}{M}$ $\overset{\beta}{M}$ $\overset{\alpha}{M}$ ͵βτλςγ´
$\overset{\beta}{M}$ ͵ρξα ∠ ς´
$\overset{\alpha}{M}$ ͵βξλςα
τλγγ α ∠ ς´ αλ´ ς
ὁμοῦ $\overset{\upsilon\varsigma}{M}$ ͵δλκηλς´
τούτοις ἴσον τὸ ἀπὸ αγ ἐστὶ
$\overset{\upsilon\varsigma}{M}$ ͵θςπδλς.

ἡ λγ ξς
ὑπὸ ξς
͵γχτξ
τξλς
ὁμοῦ ͵δτνς

͵βιζδ´
ὑπὸ ͵βιζδ´
$\overset{\upsilon}{M}$ $\overset{\beta}{M}$ $\overset{\alpha}{M}$ ͵δφ
$\overset{\beta}{M}$ ροβ ∠
$\overset{\alpha}{M}$ ͵δομθ α ∠ δ´
φβ ∠ α ∠ δ´ ις´
θςϟζ ∠ ις´
πλεονάζει τοῦ ἀκριβοῦς
$\overset{o}{M}$ ιγ ∠ η´

Ἐπεὶ οὖν ἡ αγ πρὸς γλ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βιζδ´ πρὸς ξς. ἀνάπαλιν ἄρα ἡ λγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ξς πρὸς ξς πρὸς ͵βιζδ´. καὶ ἐπεὶ ἡ γβ περιφέρεια ἕκτον ἐστὶ τοῦ κύκλου. ἡ ηγ ἄρα ιβ´ μέρος ἐστὶν, ἡ δὲ θγ, κδ. ἡ δὲ ηγ, μη. ἡ δὲ λγ, ϟς´. ὥστε ἡ λγ εὐθεῖα πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ ϟς´ πλευρὰς ἔχοντος, καὶ ἐστὶν ἡ λγ, ξς. ἡ ἄρα τοῦ πολυγώνου περίμετρος πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵ςτλς πρὸς ͵βιζδ´. τοῦτο δὲ ἐστὶ τριπλάσια. καὶ ἔτι ὑπερέχει πδ
δ-

δ̄, ἅπερ ἐλάττονα ἐστὶ δέκα ἑβδομηκοστομόνων, ὅ ἐστι Μ̊ ,κζ ∠ ς΄ ἔγγιστα. τὰ δὲ δεκαπλάσια τούτων ϛοζ. πολλῷ ἄρα ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια μείζων ἐστὶν ἢ τριπλάσια, καὶ δέκα ἑβδομηκοστόμονα. ὡς μὲν οὖν ἐνεχώρει οἱ παρ᾽ αὐτοῦ εἰρημένοι ἀριθμοί, μετρίως ἐσαφηνίσκεν. ἱστέον δὲ ὅτι καὶ ἀπολλώνιος ὁ περγαῖος ἐν τῷ ὠκυτοκίῳ ἀπέδειξεν αὐτὸ δι᾽ ἀριθμῶν ἑτέρων ἐπὶ τὸ σύνεγγυς μᾶλλον ἀγαγών. τοῦτο δὲ ἀκριβέστερον μὲν εἶναι δοκεῖ, οὐ χρήσιμον δὲ πρὸς τὸν ἀρχιμήδους σκοπόν. ἔφαμεν γὰρ αὐτὸν σκοπὸν ἔχειν ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ τὸ σύνεγγυς εὑρεῖν, διὰ τὰς ἐν τῷ βίῳ χρείας, ὥστε οὐδὲ πόρος ὁ νικάτευς δύναιτο εὑρεθήσεται, μέμψιν ἐπάγων ἀρχιμήδει, ὡς μὴ ἀκριβῶς εὑρόντι ποίᾳ εὐθείᾳ ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια, ἐξ ὧν αὐτὸς ἐν τοῖς κηρίοις φησί, τὸν ἑαυτοῦ διδάσκαλον φίλωνα λέγων, τὸν ἀπὸ γαδάρων εἰς ἀκριβεστέρους ἀριθμοὺς ἀγαγεῖν τῶν ὑπ᾽ ἀρχιμήδους εἰρημένων, τοῦ τε ζ̄ φημὶ καὶ τῶν ι θ΄. ἅπαντες γὰρ ἐφεξῆς φαίνονται, τὸν σκοπὸν αὐτοῦ ἠγνοηκότες. κέχρηνται δὲ καὶ τοῖς τῶν μυριάδων πολλαπλασιασμοῖς καὶ μερισμοῖς, οἷς οὐκ εὔκολον παρακολουθεῖν, τὸν μὴ διὰ τῶν μάγνου λογιστικῶν ἠγμένον. εἰ δέ τις ὅλως ἐβούλετο εἰς ἔλαττον αὐτὸ καταγαγεῖν, ἐχρῆν τοῖς ἐν τῇ μαθηματικῇ συντάξει τοῦ κλαυδίου πτολεμαίου εἰρημένοις ἀκολουθοῦντα, διὰ τῶν μοιρῶν καὶ λεπτῶν καὶ τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν τοῦτο ποιεῖν. καὶ πεποιήκειν ἂν ἐγὼ τοῦτο, εἰ μὴ ὅπερ πολλάκις εἶπον ἐγνώκειν, ὡς οὔτε ἀκριβῶς δυνατὸν διὰ τῶν ἐνταῦθα εἰρημένων εὑρεῖν τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ ἴσην εὐθεῖαν. καὶ εἴ τις τὸ σύνεγγυς καὶ παρὰ μικρὸν προσέχοι, ἀρκεῖ τὰ ὑπ᾽ ἀρχιμήδους ἐνταῦθα εἰρημένα.

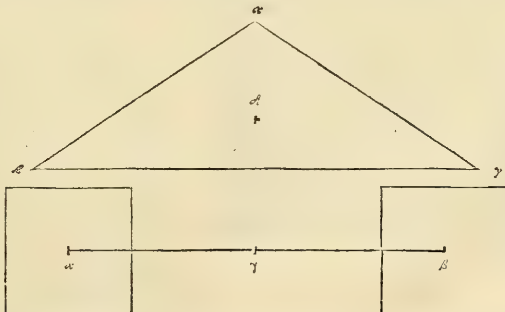
ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΧΙΜΗδους τῆς κύκλου μετρήσιν ἐκδόσεως παραναγνωσθείσης τῷ μιλησίῳ μηχανικῷ ἰσιδώρῳ τῷ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΕΙΣ ΤΟ Α ΤΩΝ

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΚΩΝ.



ΗΝ ῥοπήν, ὦ γενναιότατε πέτρε, κοινὸν εἶναι γένος βαρύτητος καὶ κουφότητος, ἀριστοτέλης τε λέγει, καὶ πτολεμαῖος τούτῳ ἀκολουθῶν. ὁ δέ γε παρὰ πλάτωνι τίμαιος πᾶσαν ῥοπὴν ἀπὸ βαρύτητος λέγει γίνεσθαι. τὴν γὰρ κουφότητα στέρησιν νομίζει, ὧν ἔξεστι τὰς δόξας τοῖς φιλομαθέσι ἀναλέγεσθαι, ἔκ τε τοῦ περὶ ῥοπῶν βιβλίου τῷ πτολεμαίῳ συγγεγραμμένου, καὶ ἐκ τῶν ἀριστοτέλους φυσικῶν πραγματειῶν, καὶ ἐκ τοῦ πλάτωνος τιμαίου, καὶ τῶν ταῦτα ὑπομνηματισάντων. ὁ δὲ ἀρχιμήδης ἐν τούτῳ τῷ βιβλίῳ κέντρον ῥοπῆς ἐπιπέδου σχήματος νομίζει, ἀφ᾽ οὗ ἀρτώμενον παράλληλον μένει τῷ ὁρίζοντι. δύο δὲ ἢ πλειόνων ἐπιπέδων κέντρον ῥοπῆς, ἤτοι βάρους, ἀφ᾽ οὗ ἀρτώμενος ὁ ζυγὸς παράλληλός ἐστι τῷ ὁρίζοντι. οἷον ἔστω τρίγωνον τὸ α β γ, καὶ ἐν τῷ μέσῳ αὐτοῦ σημεῖόν τι τὸ δ̄, ἀφ᾽ οὗ ἀρτώμενον παράλληλον μένει τῷ ὁρίζοντι. δῆλον οὖν ὅτι ἰσορροπήσει τὰ α β̄ γ μέρη ἑαυτοῖς, καὶ οὐδ᾽ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, μᾶλλον ῥέψει ἐπὶ τὸν ὁρίζοντα. ὁμοίως δὲ καὶ ζυγοῦ ὄντος τοῦ ᾱ, β̄, καὶ ἀπηρτημένων ἐξ αὐτοῦ τῶν ᾱ, β̄ μεγεθῶν, ἐὰν ἀρτώμενος ὁ ζυγὸς ἀπὸ τοῦ γ̄ ἰσορροποῦντα ἔχει τὰ ᾱ, β̄ μέρη, παράλληλος μένει τῷ ὁρίζοντι, καὶ ἔσται κέντρον τῆς ἀρτήσεως τῶν ᾱ, β̄ μεγεθῶν τὸ γ̄.



Καλῶς δὲ δοκεῖ ὁ Γεμῖνος εἰπεῖν περὶ τοῦ Ἀρχιμήδους, ὅτι τὰ ἀξιώματα αἰτήματα λέγει. τὰ γὰρ ἴσα βάρη ἀπὸ ἴσων μήκων ἰσοῤῥοπεῖν ἀξίωμά ἐστι, καὶ τὰ ἑξῆς. καὶ ἔστι ταῦτα σαφῆ τοῖς μετρίως αὐτὰ ἐπεσκεμμένοις. τῶν δὲ ἴσων καὶ ὁμοίων φύσιν ἐπιπέδων σχημάτων ἐφαρμοζομένων ἐπ' ἄλληλα, καὶ τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐφαρμόζει ἐπ' ἄλληλα. πάντα γὰρ τὰ μέρη αὐτῶν πᾶσιν ἐφαρμόζει. τῶν δὲ ἀνίσων, ὁμοίων δὲ, τὰ κέντρα τῶν βαρέων, ὁμοίως ἔσται κείμενα. νοείσθω δὲ ὡς ἐπὶ τῆς ὑποκειμένης καταγραφῆς τὰ αβγ, δεζ τρίγωνα ἄνισα καὶ ὅμοια, κέντρον δὲ βάρους τοῦ μὲν αβγ τὸ η, τοῦ δὲ δεζ τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αη, ηγ, βη, δθ, θε, θζ. λέγω ὅτι εἰς ἴσα διαιροῦσι τὰς γωνίας αἱ ἀπὸ τῶν η θ σημείων ἐπιζευχθεῖσαι. γινέσθω γὰρ ὡς ἡ εζ πρὸς βγ, οὕτως ἡ εθ πρὸς καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θα, καὶ ἡ ζθ πρὸς θλ. καὶ ἡ δθ πρὸς θμ. μκ, κλ, λμ. ἔσται δὴ ὅμοιον τὸ κλμ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ εθ πρὸς θκ, ἡ θζ πρὸς θλ, παράλληλός ἐστιν ἡ εζ τῇ κλ. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ μκ τῇ δε, καὶ ἡ λμ τῇ δζ. ὅμοιον ἄρα τὸ δεζ τρίγωνον τῷ κλμ τριγώνῳ. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ δε πρὸς μκ, ἡ εζ πρὸς κλ, καὶ ἡ δζ πρὸς μλ. ὑπόκειται δὲ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν αβγ, δεζ τριγώνων, ὡς ἡ δε πρὸς αβ, ἡ βγ πρὸς εζ, καὶ ἡ δζ πρὸς αγ. ἴσαι ἄρα εἰσὶν αἱ αβγ ταῖς μκλ. ὥστε ἐφαρμόζει ἑκάστη ἐπὶ ἑκάστην. ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον τῷ κμλ τριγώνῳ. ὥστε καὶ ἐφαρμόσει τὸ κέντρον τοῦ αβγ ἐπὶ τὸ τοῦ μκλ. τοῦ δὲ η ἐπὶ τὸ θ ἐφαρμόζοντος, καὶ τῶν αβγ ἐπὶ τὰ μκλ, ἐφαρμόσουσιν καὶ αἱ αη, βη, γη, ἐπὶ τὰς μθ, κθ, λθ, καὶ ἴσας ποιήσουσιν γωνίας πρὸς τοῖς μκλ ταῖς ἐν τῷ αβγ τριγώνῳ, ὥστε καὶ ἐν τῷ δεζ. αἱ αὐταὶ γάρ εἰσιν εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ θ ἐπί τε τὰ μκλ, καὶ ἐπὶ τὰ δεζ ἐπιζευγνύμεναι.

Παντὸς σχήματος οὗ ἂν ἡ περίμετρος ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλα ᾖ, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐντὸς εἶναι δεῖ τοῦ σχήματος. τίνας καλεῖ τὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας γραμμὰς, εἴρηται ἡμῖν σαφῶς ἐν τοῖς προειρημένοις τῶν περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. ἐπειδὴ δὲ τὸ σχῆμα τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλην ἔχον τὴν περίμετρον, πάντα τὰ μέρη τοῦ ἐπιπέδου ἐντὸς ἔχει καὶ τὰς γωνίας, δῆλον ὅτι καὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐντὸς ἔχει τοῦ σχήματος. ἐπὶ γάρ τινων σχημάτων τὸ κέντρον τοῦ σχήματος ἐκτός ἐστι, καὶ ἐπὶ τῆς περιμέτρου. ἐπὶ μὲν γὰρ τοῦ αβ ἡμικυκλίου κέντρον τοῦ σχήματός ἐστι τὸ η, ἐπὶ δὲ τῆς δεζ ὑπερβολῆς τὸ κέντρον τοῦ σχήματος ἐκτός ἐστι, καθ' ὃ αἱ διάμετροι συμπίπτουσιν ἀλλήλαις, ὡς ἔχει τὸ θ. εἴρηται γὰρ ταῦτα ἐν τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν. ὅμως δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ αβγ σχήματος, καὶ ἐπὶ τοῦ δεζ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος, ἀφ' οὗ δῆλον ὅτι ἀρτώμενον τὸ σχῆμα παράλληλόν ἐστι τῷ ὁρίζοντι, ἐντός ἐστι τῆς περιμέτρου. εἰ γὰρ ἔσται ἐπὶ τῆς περιμέτρου, ἢ ἐκτὸς ῥέψει ἐπὶ θάτερα, οὐχ ὑπόκειται.

ΕΙΣ ΤΟ Β.

Κέντρον τοῦ βάρεος τὸ δ εἰ δυνατόν. ὅτι γάρ ἐστιν ἐπὶ τῆς αβ δέδεικται. εἴρηται γὰρ ἀνωτέρω, ὅτι δύο μεγεθῶν κέντρον ἐστὶν, ἀφ' οὗ ἀρτώμενος ὁ ζυγὸς ἰσοῤῥοποῦντα ἔχει τὰ μέρη, παράλληλος μένων τῷ ὁρίζοντι, ὥστε ὂν ἐπὶ τῆς αβ ἐστὶ τὸ κέντρον τῶν αβ μεγεθῶν.

ΕΙΣ ΤΟ Ε.

Ἤτοι μεῖζόν ἐστι τὸ αβ τοῦ γ, ὥστε ἰσορροπεῖν, ἢ οὔ. τοῦτο τὸ ῥητὸν δεῖ ἀκούειν, οὐχ ὡς μείζονος ὑπάρχοντος πάντως τοῦ αβ μεγέθους τοῦ γ, ἀλλὰ μείζονος ὑποκειμένου, ἢ ἐπὶ τὴν ἰσορροπίαν. δυνατὸν γάρ ἐστι καὶ ἔλαττον μέγεθος τοῦ μείζονος μείζονα ἔχειν τὴν ῥοπὴν διὰ τὸ μῆκος τοῦ ζυγοῦ, μεῖζον ὂν πάνυ καὶ ἄνισον ποιοῦν τὸν λόγον. ὥστε καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ αβ ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ μεῖζόν ἐστι τὸ αβ τοῦ γ, ὥστε ἰσορροπεῖν, ὥστε λοιπὸν τὸ α σύμμετρον εἶναι τῷ γ. δεῖ φησὶν ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ αβ μεγέθους τι τὸ β, ὃ ποιεῖ λοιπὸν τὸ α, τῷ γ σύμμετρον, καὶ μεῖζον τὸ α τοῦ γ ἢ ἐπὶ τὴν ἰσορροπίαν. τοῦτο δὲ δυνατὸν ποιεῖν, διὰ τῶν ἐν τῇ ἀρχῇ τοῦ δεκάτου τῆς στοιχειώσεως Εὐκλείδου εἰρημένων, καὶ ἐν τῷ τρίτῳ τῶν Θεοδοσίου σφαιρικῶν.

ΕΙΣ ΤΟ ΑΙ.

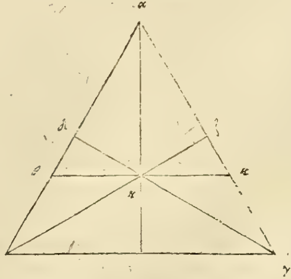
Καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εζ, ηκ, λμ. πεσοῦνται δὴ αὗται παρὰ τὰν βγ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ βο τῇ ψγ, καὶ ἡ δβ τῇ δγ. ἔσται ὡς ἡ δβ πρὸς οβ, ἡ δγ πρὸς ψγ. καὶ διελόντι ὡς ἡ δο πρὸς οβ, ἡ δψ πρὸς ψγ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ δο πρὸς οβ, ἡ αε πρὸς εβ. ἡ γὰρ εο παρὰ τὴν αδ ἐστιν. ὡς δὲ ἡ δψ πρὸς ψγ, ἡ λζ πρὸς ζγ. καὶ ὡς ἄρα ἡ αε πρὸς εβ, ἡ αζ πρὸς ζγ. παράλληλος ἐστὶν ἄρα ἡ εζ τῇ βγ. ὁμοίως δὴ δειχθήσονται καὶ αἱ λοιπαί. τὸ δὴ αδγ ποτὶ πάντα τὰ τρίγωνα τὰ ἀπὸ τῶν αμ, μκ, κζ, ζγ ἀναγεγραμμένα, ὅμοια τῷ αδγ, τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ γα πρὸς αμ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς εὐθείας. ἐπεὶ γὰρ ὅμοιά ἐστι τὰ αδγ ασμ τρίγωνα, πρὸς ἄλληλα, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αγ πρὸς αμ. ἐπεὶ δὲ νῦν ὑπόκειται, ἡ αγ τῆς αμ τετραπλασίων τὸ αδγ τρίγωνον πρὸς τὸ ασμ λόγον ἔχει, ὃν ις πρὸς ἕν. πρὸς δὲ πάντα τὰ τρίγωνα, τὰ ἀπὸ αμ, μκ, κζ λόγον ἔχει ὃν ις πρὸς τέσσαρα. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὰ τρίγωνα τὰ ἀπὸ τῶν αμ, μκ, κζ, ζγ, ὅμοια τῷ αδγ, οὕτως αὐτὰ τρίγωνα πρὸς τὸ ασμ, τουτέστιν ἡ γα πρὸς αμ. ὅμοια γάρ εἰσι καὶ ἐπὶ ἴσων βάσεων, καὶ διὰ τοῦτο ἴσα, καὶ εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις. ἀλλ' ἁ γα πρὸς αμ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἁ φρ πρὸς ρθ. ὁ γὰρ τῆς αγ πρὸς αμ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς φρ πρὸς ρω. εἰ γὰρ νοήσειας ἐκβεβλημένας τὰς ρφ, γδ, καὶ συμπιπτούσας διὰ τὰς παραλλήλους, ἔσται ὡς ἡ φρ πρὸς ρω, ἡ γδ πρὸς δω. ἀλλ' ὡς ἡ γδ πρὸς δω, ἡ γα πρὸς αμ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γα πρὸς αμ, ἡ φρ πρὸς ρω. ἡ δὲ φρ πρὸς ρω μείζονα ἔχει λόγον, ἤπερ ἡ φρ πρὸς ρθ. καὶ ἡ γα ἄρα πρὸς αμ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ φρ πρὸς ρθ. ὅπερ ἀδύνατον. τὰς γὰρ διὰ τοῦ χ εὐθείας παρὰ τὰν δα ἀγομένας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἐσσεῖται πάντα τὰ κέντρα. τουτέστιν ἐπὶ θάτερον μέρος, καὶ ῥέψει δῆλον ὅτι ἐπ' ἐκείνω πάντα τὰ μεγέθη, καὶ οὐκ ἰσορροπήσει, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. ὑπόκειται γὰρ κέντρον τῶν μὲν παραλληλογράμμων τὸ ρ, τῶν δὲ τριγώνων τὸ χ.

ΕΙΣ ΤΟ ΑΛΛΩΣ ΤΟΥ ΙΑ.

Ὁμοίως γὰρ ἐν τοῖς κείμενα τὰ θκ, λε τοῖς τριγώνοις. αἵ τε γὰρ αθε, κζα παράλληλοι οὖσαι ὁμοίως διαιροῦσι τὰς γωνίας, καὶ αἱ θλγ, θκβ αἱ αὐταί εἰσι, ἐν πᾶσι τοῖς τριγώνοις, καὶ λοιπαὶ αἱ κδ, δλ.

ΕΙΣ ΤΟ ΙΓ.

Ἐὰν γὰρ ἐκβάλῃς τὰς γδη, ζεη, βαη, δῆλον ὅτι ἐπὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἔρχονται. ἐκβληθεισῶν γὰρ τῶν βαη, ζεη, καὶ συμπιπτουσῶν ἀλλήλαις κατὰ τὸ η. καὶ ἡ βδ ἐκβαλλομένη ἐν τῷ αὐτῷ πεσεῖται. ἔστι δὲ ὡς ἡ βη πρὸς ηα, ἡ ζη πρὸς ηε, καὶ ἡ βζ πρὸς αε, καὶ ἡ ζγ πρὸς εδ. καὶ δηλαδὴ ἡ δη πρὸς δς. ἔσται δὴ τοῦ μὲν βδγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τὰς θμ. ἐπειδήπερ τρίτον μέρος ἁ βθ τᾶς βδ. ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἀπὸ τῶν γωνιῶν ἐπὶ τὰς διχοτομίας τῶν πλευρῶν αἱ αε, βζ, γδ. κέντρον ἄρα ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ αβγ τριγώνου τὸ η. καὶ φανερὸν ὅτι πάντα τὰ τρίγωνα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. καὶ ὅτι αἱ ἐπὶ τὰς διχοτομίας τῶν πλευρῶν ἐπιζευγνύμεναι διὰ τοῦ η ἔρχονται. ἵνα μὴ τοῦ αὐτοῦ πλείονα κέντρα ᾖ. ἐπεὶ δὲ ἴσαι αἱ αδ, βδ, βε, εγ, γζ, ζα, ἴσα ἔσται καὶ τὰ τρίγωνα ὧν κορυφὴ τὸ η σημεῖον,



μέσον, βάσεις δὲ αἱ εἰρημέναι εὐθεῖαι. ὥστε διπλάσιόν ἐστι τὸ α η β τρίγωνον, τοῦ η β ε τριγώνου, ὥστε καὶ ἡ α η τῆς η ε. ἐὰν δὲ διὰ τοῦ η παρὰ τὴν β γ ἀγάγωμεν τὴν θ κ διπλασία ἐστὶν ἡ α θ τῆς θ β, ὥστε καθόλου ἐὰν μία πλευρὰ τριγώνου τμηθῇ, ὥστε τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ μέρος διπλάσιον εἶναι τοῦ πρὸς τῇ βάσει, καὶ διὰ τοῦ ληφθέντος σημείου παράλληλος ἀχθῇ τῇ βάσει ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου.

ΤΩΝ ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΕΙΣ ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ βιβλίον τέλος.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΕΙΣ ΤΟ Β ΤΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΚΩΝ ΑΡΧΙμήδους.

ΑΚΡΙΒΩΣ ἐπεξελθόντες τῷ πρώτῳ, καὶ σαφηνίσαντες τὰ ἐν αὐτῷ δυσθεώρητα, ἀναγκαῖον ἡγούμεθα καὶ τὰ ἐν τῷ δευτέρῳ δυσχερῶς εἰρημένα μετρίως ἐκθέσθαι. φησὶ τοίνυν ἐν τῇ προτάσει τοῦ πρώτου θεωρήματος, ὑποκείσθω τὰ α β, γ δ χωρία περιεχόμενα ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς, ἃ δυνάμεθα παρὰ ταν δοθεῖσαν παραβαλεῖν. τοῦτο δὲ αὐτόθεν μὲν διὰ τῶν ἐνταῦθα δεδειγμένων οὐκ ἔστιν εὑρεῖν. ἐπεὶ δὲ δέδεικται αὐτῷ, ὡς καὶ ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου εἶπεν, ὅτι τὸ τοιοῦτον σχῆμα ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον. τῷ δὲ ἐπιτρίτῳ τοῦ τριγώνου ἐπιπέδῳ εὐθυγράμμῳ ὄντι, δυνάμεθα ἴσον παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβαλεῖν. φανερὸν ὅτι καὶ τοῖς τοιούτοις σχήμασι, τὰ δὲ ἐν τῇ κατασκευῇ εἰρημένα ἅπαντα δῆλα ἐστὶ διὰ τοῦ τετάρτου θεωρήματος τοῦ πρώτου τούτων τῶν βιβλίων.

ΕΙΣ ΤΟ Β.

ΤΟῦ δευτέρου θεωρήματος προλέγει τινά, δηλοῦντα πῶς δυνατὸν ἐν τῇ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῇ σχῆμα γνωρίμως ἐγγράφεσθαι, καὶ φησὶ ταῦτα δεικτέον ἐν ταῖς τάξεσιν. ἐπειδὴ οὖν ἀσαφές ἐστι τὸ λεγόμενον, ἀναγκαῖον εἰπεῖν βραχέα περὶ αὐτοῦ ἐκ τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν εὑρεθέντα. ἔστω σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ παραβολῆς τῆς α β γ, καὶ εὐθείας τῆς α γ, οὗ διάμετρος ἔστω ἡ β δ. φανερὸν δὴ ὅτι κορυφή ἐστι τοῦ τμήματος τὸ β σημεῖον. κορυφὰς γὰρ ἐκάλει τῶν γραμμῶν ὁ Ἀπολλώνιος τὰ πρὸς ταῖς γραμμαῖς πέρατα τῶν διαμέτρων. ἐὰν δὴ ἐπιζεύξωμεν τὰς α β, β γ, ἔσται τὸ ἀπὸ α β γ τρίγωνον τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι, καὶ ὕψος ἴσον τὴν ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὴν α β κάθετον ἀγομένην. οὕτως γὰρ πάντως ἄξων ἐστὶν ἡ β δ. ἐὰν δὴ λαβόντες τὰς κορυφὰς τῶν α β, β γ τμημάτων τὰς ε, ζ δι᾽ αὐτῶν παραλλήλους ἀγάγωμεν τῇ β δ, ὡς τὰς ε η, ζ θ ἔσονται αὗται διάμετροι τῶν α β, β γ τμημάτων. δέδεικται γὰρ ἐπὶ τῆς παραβολῆς, ὅτι πᾶσαι αἱ παρὰ τὴν διάμετρον ἀγόμεναι διάμετροί εἰσι τῆς τομῆς, ἔσονται δὴ τὰ ε, ζ κορυφαὶ τῶν τμημάτων, καὶ αἱ διὰ τῶν ε, ζ ἐφαπτόμεναι παράλληλοι ταῖς α β, β γ. ἔσται δὴ καὶ ἡ ε λ ζ παρὰ τὴν α β γ. ἐπειδὴ αἱ ε θ, ζ κ παράλληλοι εἰσὶ καὶ ἴσαι, διάμετροι οὖσαι τῶν ἴσων τμημάτων, καὶ ἐφαρμόζουσαι ἀλλήλαις ὡς ἐν τῷ ϛ τῶν κωνικῶν δέδεικται. καὶ ἐπεὶ ἡ ε θ η παράλληλός ἐστι τῇ β δ, ἔστιν ὡς ἡ β η πρὸς η α, ἡ δ θ πρὸς θ α. ἴση δὲ ἡ η β τῇ α η. δίχα γὰρ αὐτὴν τέμνει ἡ ε η διάμετρος παράλληλον οὖσαν τῇ ἐφαπτομένῃ. ἴση ἄρα καὶ ἡ δ θ τῇ θ α, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ δ κ τῇ κ γ ἴση ἐστί. ἴση δὲ ὅλη ἡ α δ τῇ δ γ, ἴση ἄρα καὶ ἡ δ θ τῇ δ κ. καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ ε λ τῇ λ ζ. ὥστε ἀληθῶς λέγει ὅτι ἡ τὰς κορυφὰς τῶν τμημάτων ἐπιζευγνύουσα παράλληλος ἔσται τῇ βάσει τοῦ τμήματος, καὶ δίχα διαιρεθήσεται ὑπὸ τῆς τοῦ τμήματος διαμέτρου. ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ α ε, ε β, β ζ, ζ γ. καὶ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ μ, ν, ξ, θ σημεῖα. καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν μ, ν, ξ, ο παρὰ τὴν β δ, αἱ π μ ρ ς, τ ν υ φ, χ ξ ψ ω, ϛ ο γ λ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α π, π ε, ε τ, τ β, β χ, χ ζ, ζ ϛ, ϛ γ. καὶ αἱ τ α χ, καὶ π β γ δ ε ϛ. φανερὸν δὴ ἐκ τῶν προδεδειγμένων, ὅτι ἡ τ χ καὶ ἡ ε ζ καὶ ἡ π ϛ παράλληλοι εἰσὶ τῇ α γ. καὶ ὅτι ἴση ἡ τ α τῇ α χ. καὶ ἡ π δ τῇ δ ϛ. λέγω οὖν ὅτι τέμνουσι τὴν β δ εἰς τοὺς ἑξῆς περισσοὺς ἀριθμούς, τουτέστιν οἵου ἐστὶν ἑνὸς ἡ β α, τοιούτων

τριῶν

τριῶν ἡ α λ, καὶ ἡ λ δ πέντε, καὶ ἡ δ δ ἑπτά. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ α η τῇ η β, καὶ παράλληλος ἡ ε θ τῇ β δ, ἴση ἄρα καὶ ἡ α θ τῇ θ δ, ἡ α δ ἄρα τῆς δ θ διπλῆ ἐστιν. ὥστε καὶ τῆς ε λ, τὸ

ἀπὸ τῆς α δ ἄρα τετραπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ε λ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ α δ πρὸς τὸ ἀπὸ ε λ, οὕτως δέδεικται ἡ β δ πρὸς β λ. τετραπλασία ἄρα καὶ ἡ δ β τῆς β λ. τριπλῆ ἄρα ἡ δ λ τῆς λ β. οἵων ἄρα ἐστὶν ἑνὸς ἡ λ β, τοιούτων τριῶν ἐστὶν ἡ λ δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ οἵων ἄρα ἡ λ β τεσσάρων, ἡ λ δ δώδεκα. καὶ ἐπεὶ ἴση ἡ ε υ τῇ υ β, καὶ ἡ ε ζ τῇ ζ λ, καὶ ἡ θ φ τῇ φ δ, διπλασία ἐστὶν ἡ ε λ τῆς λ ζ, τουτέστι τῆς τ α. τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ ε λ τοῦ ἀπὸ τ α, τετραπλασία ἄρα καὶ ἡ λ β τῆς β α. ὥστε τριπλασία ἡ λ α τῆς α β. οἵων ἄρα ἐστὶν ἡ λ β τεσσάρων, τοιούτων ἡ μὲν β α ἑνὸς, ἡ δὲ α λ τριῶν, ἡ δὲ λ δ δώδεκα. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ α μ τῇ μ ε, καὶ ἡ α ρ τῇ ρ η, καὶ ἡ α c τῇ c θ, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ α c, c θ, θ φ, φ δ. οἵων ἄρα ἐστὶν ἡ α δ τεσσάρων, τοιούτων ἡ c δ τριῶν, τουτέστιν ἡ π δ. οἵων ἄρα τὸ ἀπὸ α δ δεκαὲξ, τοιούτων τὸ ἀπὸ π δ ἐννέα. καὶ οἵων ἄρα ἡ δ β δεκαὲξ, ἡ β δ ἐννέα, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ λ δ ἑπτά. ἐπεὶ οὖν δέδεικται οἵων ἡ β δ δεκαὲξ, τοιούτων ἡ μὲν β α ἑνὸς, ἡ δὲ α λ τριῶν, ἡ δὲ λ δ ἑπτά. καὶ λοιπὴ ἡ δ δ ἐστὶ πέντε. τέμνεται ἄρα ἡ β δ ὑπὸ τῶν παραλλήλων εἰς τοὺς τῶν ἑξῆς περισσῶν ἀριθμῶν λόγους, ἑνὸς λεγομένου τοῦ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ τμήματος. δῆλον οὖν ἐστιν ἐκ τῆς καταγραφῆς, ὅτι αἱ καταγόμεναι ὑπὸ τῆς διαμέτρου εἰς τοὺς ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀριθμοὺς, * οἷον γάρ ἐστιν ἑνὸς ἡ τ α, τοιούτων ἐστὶ δύο ἡ ε λ, τριῶν δὲ ἡ π δ, τεσσάρων δὲ ἡ α δ. παράλληλοι γὰρ οὖσαι πᾶσαι εἰς ἴσα τέμνουσιν ἀλλήλας. ὠνομάσθη δὲ ὑπὸ ἀρχιμήδους τὸ α π ε τ β χ ζ s γ σχῆμα γνωρίμως ἐγγραφόμενον.

ΕΙΣ ΤΟ Γ.

Τὰ ὅμοια τμήματα τῶν τοῦ κώνου τομῶν ἀπολλώνιος ὡρίσατο ἐν τῷ ἕκτῳ βιβλίῳ τῶν κωνικῶν, ἐν οἷς ἀχθεισῶν ἐν ἑκάστῳ παραλλήλων τῇ βάσει, ἴσων τὸ πλῆθος αἱ παράλληλοι, καὶ αἱ βάσεις πρὸς τὰς ἀποτεμνομένας ἀπὸ τῶν διαμέτρων ταῖς κορυφαῖς ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις εἰσὶ, καὶ αἱ ἀποτεμνόμεναι πρὸς τὰς ἀποτεμνομένας. καὶ ὅτι αἱ παραβολαὶ πᾶσαι ὅμοιαί εἰσι, τὸ δὲ γνώριμον ἐγγραφόμενον σχῆμα εἴρηται ἐν τῷ προλαβόντι λήμματι, τὸ δὲ ὅμοιον διαιρεῖσθαι

τὰς

τὰς διαμέτρους ἐστὶν, ἵνα τὰ τμήματα αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, τὰ λοιπὰ τοῦ θεωρήματος σαφῆ ἐστιν ἐκ τοῦ προειρημένου σχήματος.

ΕΙΣ ΤΟ Δ.

Ἐγγεγράφθω εὐθύγραμμον εἰς τὸ τμῆμα γνωρίμως, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἐλάσσονα εἶναι τοῦ κ. τοῦτο δὲ φανερόν ἐστιν ἐκ τῶν εἰρημένων ἐν τῷ δεκάτῳ τῆς στοιχειώσεως, καὶ ἐν τῷ πρώτῳ τῶν περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου.

ΕΙΣ ΤΟ Ε.

Καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ θζηι. ἐπεὶ γὰρ ἴσαι εἰσὶν αἱ κζ, λη. ἴσων γάρ εἰσι τμημάτων διάμετροι, καὶ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ βδ ἄξονος, καὶ ὁμοίως διῄρηνται ὑπὸ τῶν θ, ι κέντρων. ἔστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θζ, ἡ λι πρὸς ιη, καὶ ἐναλλάξ. καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἐστὶν ἡ θζ τῇ ιη, ἔστι δὲ καὶ παράλληλος. παράλληλοι γάρ εἰσι πᾶσαι αἱ διάμετροι τῆς παραβολῆς, παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ θζηι.

ΕΙΣ ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟΝ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥ Ε.

Ἔστω δὲ τοῦ μὲν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ακβ, βλγ τμημάτων συγκειμένου μεγέθους κέντρον βάρους τὸ χ, τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ακβ, βλγ τριγώνων τὸ τ. δέδεικται μὲν γὰρ ἐν τῷ προλαβόντι, ὅτι ἡ θμ ἐπιζευγνύουσα τὰ κέντρα τῶν τμημάτων, διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς βδ κατὰ τὸ χ, παράλληλος οὖσα τῇ ζη, καὶ ἡ ιν διχοτομεῖται κατὰ τὸ τ. ὥστε κέντρον βάρους ἐστὶ τὸ τ τοῦ συγκειμένου μεγέθους ἐκ τῶν ακβ, βλγ τριγώνων. ἐπεὶ οὖν μείζονα λόγον ἔχει τὸ βαγ τρίγωνον πρὸς τὰ ακβ, βλγ τρίγωνα, ἤπερ πρὸς τὰ τμήματα, καὶ τὰ ἑξῆς. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται τοῦ μὲν αβγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρους τὸ ε, τῶν δὲ αβκ, βλγ τριγώνων κέντρον τὸ τ, φανερὸν ὅτι τοῦ ακβλγ εὐθυγράμμου κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ τῆς τε τμηθείσης κατὰ τὸ ρ κατὰ τὸν ἀντιπεπονθότα λόγον τοῦ ὃν ἔχει τὸ αβγ πρὸς τὰ ακβ, βλγ τρίγωνα. ἐπεὶ τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὰ κλβ, βλγ τρίγωνα μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὰ τμήματα. μείζονα γάρ ἐστι τὰ τμήματα τῶν τριγώνων. δῆλον ὅτι ἐὰν τέμωμεν τὴν ετ ἐν τῷ λόγῳ τῷ ὃν ἔχει τὸ τρίγωνον πρὸς τὰ τμήματα ἀνωτέρω τοῦ ρ πεσεῖται τὸ σημεῖον, ὃ ἔσται κέντρον τοῦ παντὸς τμήματος, διὰ τὴν ἀντιπεπόνθησιν.

ΕΙΣ ΤΟ ς.

Τὸ κέντρον τοῦ τμήματος πάντως ἐν ἐστι, καὶ ἐγγύτερον τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος, ἤπερ τὰ τῶν ἐγγραφομένων εὐθυγράμμων. τοῦ γὰρ αβγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ εἰ τύχοι τὸ ε τῆς βδ τμηθείσης οὕτως, ὥστε διπλασίαν εἶναι τὴν εβ τῆς εδ. φανερὸν ὅτι πάντα τὰ κέντρα τῶν ἐγγραφομένων εὐθυγράμμων μεταξὺ πεσοῦνται τῶν θε σημείων. καὶ ὅσῳ δ' ἂν πολυπλευρώτερον ᾖ, τὸ γνωρίμως ἐγγραφόμενον, τοσούτῳ μᾶλλον συνεγγίζει τῷ θ. φανερὸν οὖν ὅτι τὴν μεταξὺ τῶν κέντρων τοῦ γνωρίμως ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου, καὶ τοῦ τμήματος μείζονα μὲν εἶναι τῆς εθ ἀδύνατον, ἐλάσσονα δὲ δυνατὸν οὐ μόνον τῆς θε, ἀλλὰ καὶ πάσης τῆς δοθείσης.

ΕΙΣ ΤΟ Ζ.

Ἐγγεγράφθω γὰρ εἰς τὸ αβγ τμῆμα τὸ ἐν τῷ δεζ τμήματι, ὅμοιον εὐθύγραμμον, τουτέστιν ὁμοίως γνωρίμως. ὁμοίως γὰρ γνωρίμως ἐγγράφεται, ὅταν αἱ τομαὶ τῆς αβγ παραβολῆς ἴσαι γίνωνται τῆς εζ, ὥστε τὰς πλευρὰς τοῦ ἐν τῷ αβ τμήματι ἐγγεγραμμένου γνωρίμως ἰσοπληθεῖς εἶναι ταῖς ἐν τῷ εζη ἐγγεγραμμένου εὐθυγράμμου. ἐπεὶ γὰρ δὴ κορυφαί εἰσι τὰ βζ σημεῖα τῶν ὁμοίων τμημάτων, ὅμοια ἐστὶ τὰ οὕτως γνωρίμως ἐγγραφόμενα.

ΕΙΣ ΤΟ Η.

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ βθ πρὸς θδ, οὕτως ἡ κμ πρὸς μζ. ὅμοια γὰρ ὄντα τὰ τμήματα ἕξει κέντρα εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τέμνοντα τοὺς διαμέτρους. καὶ συνθέντι ὡς ἡ βδ πρὸς δθ, ἡ κζ πρὸς ζμ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ βδ πρὸς κζ, οὕτως ἡ δθ πρὸς μζ. τετραπλασία δὲ ἡ βδ τῆς κζ. τοῦτο γὰρ ἐπὶ τέλει δείκνυται οὕτως σημεῖον θ. ἑξῆς δὲ αὐτὸ ἡμεῖς δείξομεν. ἔστω παραβολὴ ἡ αβγ, ἧς διάμετρος ἡ βδ. καὶ ἤχθω τεταγμένως ἡ αδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αβ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ αβ κατὰ τὸ ζ, καὶ διὰ τοῦ ζ τῇ βδ παράλληλος ἤχθω ἡ εζ. διάμετρος ἄρα ἐστὶ τοῦ αβ τμήματος. καὶ ἀπὸ τῶν ε, ζ τεταγμένως ἤχθωσαν αἱ εκ, ζθ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ αζ τῇ βζ, διπλῆ ἐστιν ἡ αβ τῆς ζβ, καὶ ἡ δβ τῆς βθ, καὶ ἡ αδ τῆς ζθ, τουτέστι τῆς εκ. ὥστε τὸ ἀπὸ αδ τοῦ ἀπὸ εκ ἐστὶ τετραπλάσιον, καὶ διὰ τοῦτο ἡ δβ τῆς βκ ἐστὶ τετραπλασία μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ βδ τῆς

μὲν

μὲν β̄θ διπλῆ, ἡ β̄θ τῆς β̄η ἐστὶ διπλῆ, καὶ ἡ θ̄η τῇ η̄β ἴση, τουτέστι τῇ ε̄ζ. διὰ τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι τὸ ε̄η̄ζθ. τετραπλασία ἄρα ἡ β̄δ τῆς ζ̄ε.

Καὶ ἐπεὶ τετραπλασίων ἐστὶν ἡ β̄δ τῆς β̄ϲ. καὶ γὰρ τοῦτο δέδεικται. δέδεικται γὰρ ἐν τῷ λήμματι ἡ β̄δ ἑκατέρας τῶν β̄η, ε̄ζ τετραπλασία, ὥστε ἡ β̄η τῇ ε̄ζ ἐστὶν ἴση. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ ἐνταῦθα ἡ β̄ϲ τῇ κ̄ζ ἴση, καὶ ἡ β̄δ ἑκατέρας αὐτῶν τετραπλασία. ἡ β̄ξ ἄρα τῆς βδ τρίτον μέρος. ἐπεὶ γὰρ τετραπλασίων ἡ β̄δ τῆς β̄ϲ. οἵων ἄρα ἡ β̄δ τεσσάρων, ἡ β̄ϲ ἑνός. καὶ οἵων ἄρα ἡ β̄δ δώδεκα, τοιούτων ἡ β̄ϲ τριῶν. τριπλῆ δὲ ἡ β̄ϲ τῆς ϲ̄ξ, οἵων ἄρα ἡ β̄ϲ τριῶν, ἡ ξ̄ϲ ἑνός, καὶ ὅλη ἡ β̄ξ τεσσάρων. τοιούτων δὲ ἦν ἡ β̄δ δώδεκα. ἡ β̄ξ ἄρα τῆς β̄δ τρίτον μέρος ἐστί. τριπλοῦν δὲ τὸ αβ̄γ τρίγωνον τῶν τμημάτων. δέδεικται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ ἐν τῷ περὶ τῆς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς, ὅτι πᾶν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου, τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον, ὥστε τὸ αβ̄γ τμῆμα τοῦ αβ̄γ τριγώνου ἐπίτριτόν ἐστι, καὶ διελόντι τὸ αβ̄γ τρίγωνον τῶν ακ̄β, βλ̄γ τμημάτων τριπλάσιόν ἐστι, καὶ ἐντὶ τὰς ε̄δ τριπλασία. ἡμιόλια ἄρα ἐντὶ ἁ β̄θ τὰς θ̄δ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ἐπεὶ γὰρ τριπλῆ ἐστὶν ἡ β̄δ τῆς δ̄ε. οἵων ἄρα ἡ β̄δ δεκαπέντε, τοιούτων ἡ ε̄δ πέντε· οἵων δὲ ἡ δ̄ε πέντε, τοιούτου ἡ θ̄ε ἑνός, καὶ ὅλη ἡ θ̄ε, δ̄ε ἕξ. ἑξαπλασία ἡ δ̄θ τῆς θ̄ε. οἵων ἄρα ἡ β̄δ δεκαπέντε, τοιούτων ἡ δ̄θ ἕξ. καὶ λοιπὴ ἡ θ̄β ἐννέα, ὥστε ἡμιολία ἐστὶν ἡ β̄θ τῆς θ̄δ.

ΕΙΣ ΤΟ Θ.

Τὸ ἐν αὐτῷ θεώρημα πάνυ ὂν ἀσαφὲς ἐκθησόμεθα παραφράζοντες σαφῶς κατὰ τὸ δυνατόν. ἐπεὶ γὰρ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ᾱϐ, β̄γ, δ̄ϐ, β̄ε, καὶ διελόντι, καὶ ἐναλλὰξ αἱ ᾱγ, γ̄δ, δ̄ε ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί. ἐπεὶ οὖν αἱ ᾱβ, β̄γ, β̄δ, δ̄ε ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί, καὶ αἱ ᾱγ, γ̄δ, δ̄ε, ἐστὶν ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον, καὶ μέσον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον καὶ μέσον πρὸς ἑπόμενον. ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ ᾱγ, γ̄δ, τουτέστιν ἡ ᾱδ πρὸς δ̄ε, οὕτως συναμφότερος ἡ ᾱβ, γ̄β πρὸς δ̄β. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ᾱϐ, γ̄β πρὸς δ̄ϐ, οὕτως ἡ β̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱβ, β̄γ πρὸς τὴν β̄ τῆς β̄δ. διότι τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. καὶ ὡς ἄρα ἡ ᾱδ πρὸς δ̄ε, οὕτως ἡ β̄ συναμφοτέρου τῆς αϐ̄γ πρὸς τὴν β̄ τῆς δ̄β. πάλιν ἐπειδὴ αἱ γ̄ϐ, β̄δ, β̄ε ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν, καὶ αἱ ᾱγ, γ̄δ, δ̄ε. ἔστι διὰ τὰ πρότερον εἰρημένα, ὡς ἡ ᾱδ πρὸς δ̄ε, οὕτως συναμφότερος ἡ γ̄β, β̄δ πρὸς β̄ε. ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ ᾱδ πρὸς δ̄ε, ἡ β̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱβ, β̄γ πρὸς τὴν β̄ τῆς β̄δ. καὶ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, ἅπαντα πρὸς ἅπαντα. ὡς ἄρα ἡ ᾱδ πρὸς δ̄ε, οὕτως τὰ ἡγούμενα πρὸς τὰ ἑπόμενα. ἔστι δὲ ἡγούμενα μὲν ἡ β̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱϐ, β̄γ, καὶ συναμφότερος ἡ γ̄ϐ, β̄δ, τουτέστι δύο αἱ ᾱϐ, καὶ τρεῖς αἱ γ̄β, καὶ μία ἡ β̄δ. ἑπόμενα δὲ ἡ β̄ τῆς β̄δ, καὶ ἡ ϐ̄ε μόνη. ἔστιν οὖν ὡς ἡ ᾱδ πρὸς δ̄ε, ἡ συγκειμένη εὐθεῖα, ἔκ τε τῆς β̄ τῆς ᾱϐ, καὶ γ̄ τῆς γ̄ϐ, καὶ τῆς δ̄ϐ μόνης, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β̄ τῆς β̄δ, καὶ μόνης τῆς ε̄ϐ. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς ϐ̄ τῆς ᾱϐ, καὶ τῆς δ̄ τῆς γ̄ϐ, καὶ τῆς δ̄ τῆς δ̄ϐ, καὶ τῆς ϐ̄ τῆς β̄ε, τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς β̄ τῆς ᾱϐ καὶ γ̄ τῆς γ̄ϐ, καὶ τῆς β̄δ μόνης. ἔξωθεν δέ ἐστιν ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς ϐ̄ τῆς β̄δ, καὶ μόνης τῆς ε̄ϐ. τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱϐ, β̄ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ̄ϐ, β̄δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ τῆς δ̄ϐ, καὶ τῆς ε̄ϐ μόνης, ἤπερ ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς ϐ̄ τῆς ᾱϐ, καὶ τῆς γ̄ τῆς γ̄ϐ, καὶ μόνης τῆς δ̄ϐ πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς

διπλῆς τῆς β̄ δ̄, καὶ μόνης τῆς ε̄ β. ἀλλ' ὡς ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ τῆς ᾱ β, καὶ γ̄ τῆς γ̄ β, καὶ τῆς β̄ δ̄ μόνης, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ τῆς β̄ δ̄, καὶ μόνης τῆς ε̄ β, οὕτως ἐδείχθη ἡ ᾱ δ πρὸς δ̄ ε. καὶ ἡ συγκειμένη ἄρα ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱ β, β̄ ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ̄ β, β̄ δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τε τῆς β̄ τῆς β̄ δ, καὶ μόνης τῆς ε̄ β μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ᾱ δ πρὸς δ̄ ε. ἐὰν ἄρα θελήσωμεν ποιῆσαι τὸν αὐτὸν τῇ ᾱ δ πρὸς ἄλλην τινά, ἐλάσσων ἔσται ἐκείνη τῆς δ̄ ε. ἔστω ἡ δ̄ ο. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ᾱ δ πρὸς δ̄ ο, ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱ β, β̄ ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ̄ β, β̄ δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ τῆς β̄ δ, καὶ μόνης τῆς ε̄ β. ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ο̄ δ πρὸς δ̄ α, ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ τῆς β̄ δ, καὶ μόνης τῆς ε̄ β, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱ β, β̄ ε, καὶ τῆς δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ̄ β, β̄ δ, καὶ συνθέντι, ὡς ἡ ο̄ α πρὸς ᾱ δ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ τῆς ᾱ β, καὶ δ̄ τῆς γ̄ β, καὶ ϛ̄ τῆς β̄ δ, καὶ γ̄ τῆς β̄ ε, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱ β, β̄ ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ̄ β, β̄ δ. ἥ τε γὰρ β̄ δ ἑξάκις παρελήφθη, τετράκις μὲν ἐν τοῖς προτέροις, δὶς δὲ ἐν τοῖς δευτέροις, καὶ ἡ β̄ ε τρὶς ἐλήφθη, δὶς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις, ἅπαξ δὲ ἐν τοῖς δευτέροις. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ᾱ δ πρὸς ἡ θ̄ ἴσον ἔχουσα τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς ε̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱ β, β̄ ε, καὶ ι̅ συναμφοτέρου τῆς γ̄ β, β̄ δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ τῆς ᾱ β, καὶ δ̄ τῆς γ̄ β, καὶ ϛ̄ τῆς β̄ δ, καὶ γ̄ τῆς β̄ ε. καὶ ἔστι τεταραγμένη ἀναλογία. δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ο̄ α πρὸς ἡ θ̄, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς ε̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱ β, β̄ ε, καὶ ι̅ τῆς γ̄ β, β̄ δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱ β, β̄ ε, καὶ δ̄ τῆς γ̄ β, β̄ δ. τὸ γὰρ τῆς γεγραμμένης ἀναλογίας οὕτως ἔσται δῆλον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον ἡ ο̄ α, πρὸς ἑπόμενον τὴν ᾱ δ, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ τῆς ᾱ β, καὶ δ̄ τῆς γ̄ β, καὶ ϛ̄ τῆς β̄ δ, καὶ γ̄ τῆς β̄ ε, πρὸς ἑπόμενον τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱ β, β̄ ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ̄ β, δ̄ β. ὥστε ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον ἡ ᾱ δ πρὸς ἄλλο τι τὴν ἡ θ̄, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν, ἄλλο τι ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς ε̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱ β, β̄ ε, καὶ ι̅ συναμφοτέρου τῆς γ̄ β, β̄ δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β̄ τῆς ᾱ β, καὶ δ̄ τῆς γ̄ β, καὶ ϛ̄ τῆς β̄ δ, καὶ γ̄ τῆς β̄ ε. ἐπεὶ ἡ ε̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱ β, β̄ ε πρὸς τὴν β̄ τῆς αὐτῆς λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. ἔχει δὲ καὶ ἡ ι̅ συναμφοτέρου τῆς γ̄ β, β̄ δ πρὸς τὴν δ̄ τῆς αὐτῆς λόγον, ὃν πέντε πρὸς δύο. ἐπειδὴ καὶ τὰ πέντε πρὸς δύο, καὶ τὰ δέκα πρὸς τέσσαρα λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. καὶ ἡ συγκειμένη ἄρα ἐκ τῆς ε̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱ β, β̄ ε, καὶ ι̅ συναμφοτέρου τῆς γ̄ β, β̄ δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱ β, β̄ ε, καὶ δ̄ τῆς γ̄ β, β̄ δ λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. ὡς δὲ καὶ ἡ ᾱ ο πρὸς ἡ θ̄ λόγον ἔχει ὃν πέντε πρὸς δύο. πάλιν ἐπεὶ ἐδείχθη ἐν τοῖς ἀνωτέρω, ὅτι ἡ ο̄ δ πρὸς δ̄ α τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἡ ε̄ β μετὰ τῆς β̄ τῆς β̄ δ πρὸς τὴν ἴσην τῇ συγκειμένῃ ἔκ τε τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱ β, β̄ ε, μετὰ τὴν δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ̄ β, β̄ δ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἑπόμενον ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν, ἡ ᾱ δ πρὸς ἄλλο τι τὴν δ̄ ε, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλο τι ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ τῆς ᾱ β, καὶ γ̄ τῆς γ̄ β, καὶ μόνης τῆς δ̄ β πρὸς ἡγούμενον τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς ε̄ β, καὶ τῆς β̄ τῆς β̄ δ. ἀνομοίως τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστι τεταραγμένης οὔσης τῆς ἀναλογίας, δι' ἴσου ἐστὶν ὡς ἡ ο̄ δ πρὸς δ̄ ε, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ τῆς ᾱ β, καὶ τῆς γ̄ τῆς γ̄ β, καὶ μόνης τῆς β̄ δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱ β, β̄ ε, καὶ δ̄ τῆς γ̄ β, β̄ δ. ὥστε καὶ ἀνάπαλιν ὡς ἡ ε̄ δ πρὸς δ̄ ο, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱ β, β̄ ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ β̄ δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β̄ τῆς ᾱ β, καὶ γ̄ τῆς γ̄ β, καὶ μόνης τῆς β̄ δ. καὶ ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ δ̄ ε πρὸς ε̄ ο, τὸ ἡγούμενον φημὶ πρὸς τὴν ὑπεροχήν, οὕτω ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱ β ε, μετὰ τῆς δ̄ τῆς γ β̄ δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς γ̄ β μόνης, καὶ γ̄ τῆς β̄ δ, καὶ τῆς β̄ τῆς ε̄ β. ἐν μὲν γὰρ τῷ ἡγουμένῳ ἡ β̄ τῆς ᾱ β, καὶ τῆς β̄ ε. ἐν δὲ τῷ ἑπομένῳ ἡ β τῆς ᾱ β μόνης, ὥστε περιλείπεται ἐν ταῖς ὑπεροχαῖς ἡ β̄ τῆς ε̄ β. πάλιν ἐν μὲν τῷ ἡγουμένῳ ἡ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ β̄ δ, ἐν δὲ τῷ ἑπομένῳ ἡ γ τῆς γ̄ β, καὶ ἡ β̄ δ μόνη. ὥστε περιλείπεται ἐν ταῖς ὑπεροχαῖς ἡ γ̄ β μόνη, καὶ ἡ γ̄ τῆς β̄ δ. καλῶς οὖν ἐλέχθη, ὅτι ἐστὶν ἀναστρέψαντι ὡς ἡ δ̄ ε πρὸς ε̄ ο, ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱ β, β̄ ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ β̄ δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς γ̄ β, καὶ τῆς γ̄ τῆς δ̄ β, καὶ τῆς β̄ τῆς ε̄ β. ὥστε καὶ ἀνάπαλιν ὡς ο̄ ε πρὸς ε̄ δ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς γ̄ β, μετὰ τῆς γ̄ τῆς β̄ δ, καὶ β̄ τῆς ε̄ β, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς α β̄ ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ β̄ δ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ δ̄ β πρὸς ἄλλο τι τὴν ε̄ β, ἡ ᾱ β πρὸς β̄ γ. καὶ διελόντι ὡς ἡ

δ̄ ε

δε πρὸς εβ, ἡ αγ πρὸς γβ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἔστιν ὡς ἡ γδ πρὸς δβ, οὕτως ἡ δε πρὸς εβ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γ τῶν γδ πρὸς τὴν γ τῶν δβ, οὕτως ἡ β τῶν δε πρὸς τὴν β τῶν εβ. τὰ γὰρ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. καὶ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δε πρὸς εβ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς αγ, καὶ τῆς γ τῶν γδ, καὶ ἡ β τῶν δε πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς γβ, καὶ τῆς γ τῆς βδ, καὶ τῆς β τῆς εβ. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον ἡ ο ε πρὸς ἑπόμενον τὴν δε, ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς γβ, καὶ τῆς γ τῆς βδ, καὶ β τῆς βε, πρὸς ἑπόμενον τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γβ δ. ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον ἡ δε πρὸς ἄλλο τι τὴν εβ, ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλο τι ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς αγ, καὶ ἡ γ τῆς γδ, καὶ β τῆς δε πρὸς ἡγούμενον τὴν συγκειμένην, ἔκ τε τῆς γβ, καὶ γ τῆς δβ, καὶ β τῆς βε. δι᾽ ἴσου ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ, ὡς ἡ ο ε πρὸς εβ, ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς αγ, καὶ γ τῆς γδ, καὶ ἡ β τῆς δε πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς αβ ε, μετὰ τῆς δ συναμφοτέρου τῆς γβ δ. καὶ συνθέντι ὡς ἡ ο β πρὸς βε, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς αγ, καὶ γ τῆς γδ, καὶ β τῆς εδ, καὶ β συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γβ δ πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β συναμφοτέρου τῆς αβ ε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γβ δ. ἀλλὰ ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς αγ, καὶ γ τῆς γδ, καὶ β τῆς δε, καὶ β συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γβ δ. ἴση ἐστὶ τῇ συγκειμένῃ ἔκ τε τῆς γ τῆς αβ, καὶ ς τῆς γβ, καὶ γ τῆς δβ. ἥ τε γὰρ αβ δὶς παρελήφθη αὐτόθεν, καὶ προσλαβοῦσα τὴν αγ, καὶ ἐκ τῆς δ τῆς γβ μίαν, ποιεῖ τρίτον τὴν αβ. πάλιν ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τῆς δ τῆς γβ μίαν, γίνεται γ. προσλαβοῦσα δὲ τὴν γ τῆς γδ, καὶ γ τῆς δβ, ποιεῖ τὴν ς τῶν γβ. πάλιν ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τῆς δβ, γ, μένει μόνη ἡ δβ. προσλαβοῦσα δὲ τήν τε β τῶν δε, καὶ τὴν β τῶν εβ, ποιεῖ τὴν γ τῆς βδ. καλῶς οὖν λέγει, ὅτι ἡ ο β πρὸς εβ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς γ τῆς αβ, καὶ ς τῆς γβ, καὶ γ τῆς δβ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν β συναμφοτέρου τῶν αβ ε, καὶ δ συναμφοτέρου τῶν γβ δ. πάλιν ἐπεὶ αἱ εδ, δγ, γα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί, καὶ διὰ τὸ ἀνάπαλιν τῶν ὑποθέσεως συναμφότερος ἑκάστη τῶν εβ, βδ, δβ, βγ, βα. ἔσται ὡς ἡ εδ πρὸς τὴν μέσην καὶ τὴν ἑπομένην τὰς δγ, γα, τουτέστι τὴν δα, οὕτως συναμφότερος ἡ εβ, βδ πρὸς συναμφότερον τὴν δβ, βγ, μετὰ συναμφοτέρου τῶν γβ, βα. καὶ συνθέντι ἄρα ὡς εα πρὸς αδ, οὕτως συναμφότερος ἡ εβ δ, μετὰ συναμφοτέρου τῆς δβ γ, καὶ μετὰ συναμφοτέρου τῆς γβ α, πρὸς συναμφότερον τὴν δβ γ, μετὰ συναμφοτέρου τῶν γβ α. ἀλλὰ συναμφότερος ἡ εβ δ μετὰ τῆς δβ γ, καὶ τῶν γβ α, ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ εβ α, καὶ δὶς συναμφοτέρῳ τῇ δβ γ. ἅπαξ γὰρ αἱ ἄκραι παραλαμβάνονται, καὶ δὶς αἱ μέσαι, συναμφότερος δὲ ἡ δβ γ μετὰ τῆς γβ α, ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ αβ δ, καὶ δὶς τῇ γβ, διὰ τὴν αὐτὴν αἰτίαν. ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ εα πρὸς αδ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῶν εβ α, καὶ β συναφοτέρου τῶν δβ γ πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε συναμφοτέρου τῶν δβ α, καὶ τῶν β τῶν γβ. ὥστε καὶ ἡ διπλασία πρὸς τὴν διπλασίαν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ὡς ἄρα ἡ εα πρὸς αδ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν β συναμφοτέρου τῆς εβ α, μετὰ τῶν δ συναμφοτέρου τῶν γβ δ πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς αβ δ. καὶ τῶν δ τῶν γβ. ὥστε καὶ ὡς ἡ εα πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῶν αδ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν β συναμφοτέρου τῶν αβ ε, καὶ δ συναμφοτέρου τῶν γβ δ, πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῶν συγκειμένης ἐκ τῶν β συναμφοτέρου τῶν αβ δ, καὶ τῶν δ τῶν γβ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ αε πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῶν αδ, οὕτως ἐλήφθη ἡ βε πρὸς ζη. καὶ ὡς ἄρα ἡ εβ πρὸς ζη, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν β συναμφοτέρου τῶν αβ ε, καὶ τῶν δ συναμφοτέρου τῶν γβ δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς αβ δ, καὶ δ τῆς γβ. ἐπεὶ οὖν δέδεικται ὡς ἡγούμενον ἡ ο β πρὸς ἑπόμενον τὴν βε, οὕτως ἡγούμενον ἡ γ συναμφοτέρου τῶν αβ δ, καὶ μετὰ τῆς ς τῆς γβ, πρὸς τὴν β συναμφοτέρου τῆς αβ ε, καὶ δ συναμφοτέρου τῶν γβ δ. ὡς δὲ ἑπόμενον ἡ εβ πρὸς ἄλλο τι τὴν ζη, οὕτως ἡγούμενον ἡ β συναμφοτέρου τῶν αβ ε, καὶ ἡ δ συναμφοτέρου τῶν γβ δ πρὸς τὰ τρία πέμπτα τοῦ ἑπομένου, τουτέστι τῶν συγκειμένης ἐκ τῶν β συναμφοτέρου τῆς αβ δ, καὶ τῶν δ τῶν γβ. τεταγμένης οὖν οὔσης τῆς ἀναλογίας δι᾽ ἴσου ἐστίν, ὡς ο β πρὸς ζη, οὕτως ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς γ συναμφοτέρου τῆς αβ δ, καὶ ς τῆς γβ, πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῶν β συναμφοτέρου τῶν αβ δ, καὶ δ τῆς γβ. ἡ δὲ συγκειμένη ἐκ τῆς γ συναμφοτέρου τῆς αβ δ, καὶ ς τῆς γβ πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς αβ δ, καὶ δ τῆς γβ, λόγον ἔχει ὃν πέντε πρὸς δύο. τὰ δὲ ἑξαπλάσια τῶν αὐτῶν τῶν

τετραπλασίων ἡμιόλια ἐστί. πρὸς δὲ τρία πέμπτα τῆς αὐτῆς λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. ἐπειδὴ δὲ τὰ ἡγούμενα τῶν ἑπομένων ἡμιόλια, καὶ λόγον ἔχει πρὸς αὐτὰ, ὃν τρία πρὸς δύο, ἔχει ἄρα καὶ ὃν τεσσαράκοντα πέντε πρὸς τριάκοντα. ἑκάτερον γὰρ ἑκατέρου ἐστὶ πέντε καὶ δεκαπλάσιον. καὶ ἐστὶ τὰ τρία πέμπτα τῶν τριάκοντα δεκαοκτώ. ἔχει ἄρα τεσσαράκοντα πέντε πρὸς δεκαοκτὼ λόγον, ὃν πέντε πρὸς δύο. τὰ γὰρ πέντε καὶ τὰ δύο ἀμφοτέρων ἐσὶν ἔννατα. ἐπεὶ οὖν δέδεικται ἡ μὲν οα πρὸς ηθ λόγον ἔχουσα, ὃν πέντε πρὸς δύο, ἡ δὲ οβ πρὸς ζη τὸν αὐτὸν λόγον, δύο πεμπτημόρια ἐστὶν ὅλη ἡ ζθ ὅλης τῆς αβ.

ΕΙΣ ΤΟ Γ.

ΦΑνερὸν δὴ, ὅτι καὶ τοῦ αδεγ τόμου διάμετρός ἐστιν ἡ ζη. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται ἡ ζβ διάμετρος τοῦ τμήματος, καὶ αἱ αγ, δε διχοτομούμεναι ὑπ' αὐτῆς, κατὰ τὸ ζ, η, παράλληλοί εἰσιν τῇ κατὰ τὸ β ἐφαπτομένῃ τῆς τομῆς. καὶ δῆλον ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ὁμοίως αὐταῖς ἀγόμεναι παράλληλοι, εἴτε μεταξὺ αὐτῶν, εἴτε καὶ μεταξὺ τῆς δε, καὶ τῆς β κορυφῆς δίχα τμηθήσονται ὑπὸ τῆς βζ. καὶ διὰ τοῦτο φησὶ διάμετρον εἶναι τοῦ τόμου τὴν ζη. ἀλλ' ὡς μὲν ὁ ἀπὸ ζβ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δη κύβον, οὕτως τὸ ἀπὸ αβγ τμῆμα πρὸς τὸ δβε τμῆμα. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ὑπ' αὐτοῦ, ὅτι τὸ αβγ τμῆμα τοῦ αβγ τριγώνου ἐστὶν ἐπίτριτον, καὶ τὸ δεβ τμῆμα τοῦ δεβ τριγώνου, ἔστιν ὡς τὸ αβγ τμῆμα πρὸς τὸ αβγ τρίγωνον, οὕτως τὸ δεβ τμῆμα πρὸς τὸ δεβ τρίγωνον. καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα, τὸ τρίγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον. ὥστε καὶ τὰ ἥμισυ αὐτῶν, ὡς τὸ αβγ τμῆμα πρὸς τὸ δεβ τμῆμα, οὕτως τὸ αζβ τρίγωνον πρὸς τὸ δηβ τρίγωνον. ὥστε καὶ ἐὰν ἀναγράψωμεν τὰ παραλληλόγραμμα διπλάσια τῶν τριγώνων, ἔσται ἰσογώνια διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς δη, αζ. ὥστε καὶ λόγον ἕξει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν τῆς αζ πρὸς δη, καὶ τῆς βζ πρὸς βη. ὁ αὐτὸς γὰρ λόγος ἐστὶ τῶν τετραγώνων καὶ τῶν τμημάτων. τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ τῆς αζ πρὸς δη, καὶ τοῦ τῆς ζβ πρὸς βη. ὁ γὰρ τῆς ζβ πρὸς βη λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αζ πρὸς τὸ ἀπὸ δη τετράγωνον. ὁ ἄρα τοῦ τμήματος πρὸς τὸ τμῆμα λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ ἀπὸ αζ πρὸς τὸ ἀπὸ δη τετράγωνον, καὶ τοῦ τῆς αζ πρὸς δη. σύγκειται δὲ καὶ ὁ τοῦ ἀπὸ αζ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ δη κύβον λόγος ἐκ τῶν αὐτῶν, ὡς δέδεικται ἐν τοῖς σχολίοις τοῦ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα, οὕτως ὁ ἀπὸ αζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δη κύβον. καὶ ἐπεὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς αζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς δη, καὶ τῆς αζ, πρὸς τὸν ἀπὸ αζ κύβον, λόγον ἔχει ὃν ἡ β τῆς δη μετὰ τῆς αζ πρὸς ζα. ὡσὶ γὰρ τῶν αὐτῶν βάσεων ὄντα πρὸς ἄλληλα, ἐστὶν ὡς τὰ ὕψη. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ δη πρὸς αζ, ἡ ξν πρὸς νμ. καὶ ὡς ἡ β τῆς δη πρὸς αζ, ἡ β τῆς ξν πρὸς νμ. καὶ συνθέντι ὡς ἡ β τῆς νξ μετὰ τῆς νμ πρὸς νμ, ἡ β τῆς δη μετὰ τῆς αζ πρὸς αζ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ ἀπὸ αζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δη κύβον, οὕτως ὅ τε ἀπὸ μν κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ νξ κύβον, καὶ ἡ μν πρὸς ντ, τέσσαρες εἰσὶν ἀνάλογον. καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης στερεὸν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον. ὥστε ὁ ἀπὸ δη κύβος πρὸς τὸ στερεὸν, τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ δη τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην εὐθεῖαν ἔκ τε τῆς β τῆς αζ, καὶ τῆς δη, οὕτως ἡ δη πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς αζ, καὶ τῆς δη. πάλιν γὰρ πρὸς ἄλληλα ἐστὶν ὡς τὰ ὕψη. ὡς δὲ ἡ δη πρὸς τὴν β τῆς αζ μετὰ τῆς δη, οὕτως ἡ τν πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς ον, καὶ τῆς τν. ἔστι γὰρ ὡς ἡ αζ πρὸς δη, ἡ μν πρὸς νξ, καὶ ἡ ον πρὸς ντ. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἡ δη πρὸς αζ, ἡ τν πρὸς νο. καὶ ὡς ἡ δη μετὰ τῆς β τῆς αζ πρὸς δη, οὕτως ἡ τν μετὰ τῆς β τῆς νο πρὸς νο. γέγονεν οὖν τέσσαρα μεγέθη ἑξῆς ἀλλήλων κείμενα. πρῶτον τὸ στερεὸν τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ αζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς δη, καὶ τῆς αζ. δεύτερον ὁ ἀπὸ τῆς αζ κύβος. καὶ τρίτον ὁ ἀπὸ τῆς δη κύβος. καὶ τέταρτον τὸ στερεὸν τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς δη τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς αζ, καὶ τῆς δη. καὶ ἄλλαι τινὲς εὐθεῖαι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ σὺν δύο λαμβανόμεναι, ἥ τε συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς νξ, καὶ μόνης τῆς μν, καὶ δευτέρα ἡ μν, καὶ τρίτη ἡ ντ, καὶ τετάρτη ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς ον, καὶ τῆς ντ. δι' ἴσου ἄρα γενήσεται, ὡς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ αζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς διπλῆς τῆς δη, καὶ τῆς αζ μόνης, πρὸς τὸ στερεὸν, τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ δη τετράγωνον, ὕψος τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς αζ, καὶ μόνης τῆς δη, οὕτως συγκειμένης ἐκ τῆς β τῆς ξν, καὶ μόνης τῆς μν, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς νο, καὶ μόνης τῆς ντ. ἀλλ' ὡς τὰ

εἰρημένα

εἰρημένα στερεὰ πρὸς ἄλληλα, οὕτως ἐδείχθη ἡ θι πρὸς ικ. καὶ ὡς ἄρα ἡ θι πρὸς ικ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς ξν, καὶ μόνης τῆς μν, πρὸς τὴν β τῆς ον, καὶ μόνης τῆς ντ. καὶ συνθέντι ὡς ἡ θκ πρὸς κι, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ τοῦ β συναμφοτέρου τῆς ξνο, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τοῦ ον, καὶ μόνης τῆς ντ, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ε. ὡς ἡ ηζ πρὸς κι, οὕτως ἡ ε συναμφοτέρου τοῦ μντ, καὶ ι συναμφοτέρου τῆς ξνο, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τοῦ νο, καὶ μόνης τῆς ντ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ζη πρὸς ζη, οὕτως αὐτῆς δύο πέμπτα. ἑκατέρα γὰρ τῶν ηθ ζκ δύο πεμπτημόριά ἐστι τῆς ηζ. ἐπεὶ δὲ τὸ μέσον πεμπτημόριον ἡ θκ ὑπόκειται, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς ε συναμφοτέρου τοῦ μντ, καὶ ι συναμφοτέρου τοῦ ξνο, πρὸς τὴν β συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς ξνο. καὶ γὰρ τὰ β τῶν ε, καὶ τὰ δ τῶν ι δύο πεμπτημόριά ἐστιν. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς ἡ ζη πρὸς ικ, οὕτως ἡ ε τῆς μντ, καὶ ι τῆς ξνο, πρὸς τὴν β τῆς νο, καὶ μόνην τὴν ντ. πάλιν δὲ ἐδείχθη ὡς ἡ ζη πρὸς ζκ, ἡ ε συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ ι τῆς ξνο, πρὸς τὴν β τοῦ μντ, καὶ δ τῆς ξνο. ἔσται ὡς ἡγούμενον πρὸς τὰ δύο ἑπόμενα, οὕτως ἡγούμενον πρὸς τὰ δύο ἑπόμενα, ὡς ἡ ζη πρὸς ζι, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς ε συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ ι συναμφοτέρου τῆς ξνο, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς ον, καὶ μόνης τῆς ντ, καὶ τοῦ β συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ δ τῆς ξνο, ἥ ἐστιν ἴση τῇ συγκειμένῃ ἐκ τῆς β τῆς μν, καὶ δ τῆς νξ, καὶ ς τῆς νο, καὶ γ τῆς ντ. οὕτως γὰρ εἴληπται καὶ ἀνωτέρω. ἐπεὶ οὖν τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ μν, νξ, ον, ντ, καὶ ἔστιν ὡς μὲν ἡ ντ πρὸς τὴν μ, οὕτως εἰλημμένη τις ἡ ρι πρὸς τὴν ζθ, τουτέστι πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς ηζ, τουτέστι τῆς μο, καὶ δεδειγμέναι εἰσὶν αἱ ἐν τῷ ῥητῷ ἀναλογίαι. ἔσται διὰ τὸ προειρημένον ἡ ρζ δύο πέμπτα τῆς μν, τουτέστι τῆς ζβ. τρία ἄρα πέμπτα ἐστὶν ἡ βρ τῆς βζ. ἡ βρ ἄρα πρὸς ρζ λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο, ὥστε κέντρον βάρους ἐστὶ τοῦ αβγ τμήματος τὸ ρ σημεῖον. ἐὰν δὴ λάβωμεν τὸ τοῦ δβε τμήματος τὸ χ, τρία πέμπτα ἔσται ἡ βχ τῆς βη. γέγονεν ὡς ὅλη ἡ ζβ πρὸς ὅλην τὴν βρ, οὕτως ἀφαιρεθεῖσαι ἡ βη πρὸς ἀφαιρεθεῖσαν τὴν βχ. ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν πρὸς ἑκατέραν λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς τρία. καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ζη πρὸς λοιπὴν τὴν χρ λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς τρία. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται ὡς ὁ αδεγ τομεὺς πρὸς τὸ δβε τμῆμα, οὕτως ἡ μτ πρὸς ντ. ὡς δὲ ἡ μτ πρὸς τν, οὕτως τὰ τρία πέμπτα τῆς ηζ, τουτέστιν ἡ ζθ, ἤτοι ἡ χρ πρὸς ρι. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸ τμῆμα, ἡ χρ πρὸς ρι. καὶ ἀντιπεπόνθασιν, καὶ ἐστὶ τὸ ρ κέντρον τοῦ ὅλου τμήματος, τοῦ ἄρα τόμου κέντρον ἐστὶ τὸ ι.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΟ Β τῶν ἰσοῤῥοπικῶν ἀρχιμήδους.

COMMENTARII EVTOCII ASCALONITAE IN PRIMVM ARCHIMEDIS DE *Sphæra & cylindro.*



VVM in Archimedis libro quem de sphæra & cylindro cõfecit, eorum qui nos præcesserunt neminem adhuc comperissem quippiam dignũ cõposuisse, idq; ab eis prætermissum intelligerem non propter theorematum, quæ illic habentur, facilitatem, quæ uti nostis doctrina indigent exquisitissima, & instructissima in primis excogitatione, aggressus sum pro uirib. ea quæ in illis obscura & perspectu difficilia continentur declarare. adductus ad hoc magis, quod neminem fortè in hanc comprehensionem descensurum cernerem, quod rerum istarũ difficultate deterritus sim. Simul etiam Socraticum illud mecum reputans, Deo coadiutore nos commodè admodum & ad perfectionem studij nostri peruenturos:

DECLARATIO TERMINORVM.

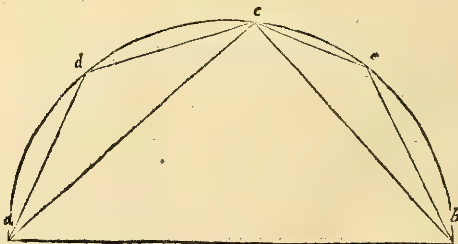


PRAENVMERANS ea quæ ab ipso exponenda sunt theoremata, ut consuetum est omnibus Geometris in expositione, seruans quoq; appellationes quibus ipse per licentiã usus est: primò terminationes suppositionum, & ipsas quoq; suppositiones in initio scribendi uult declarare. & ait primũ, Quasdam esse in plano curuas lineas, quę lineis rectis earum terminos iungentibus, uel omnis in eandem partem uergũt, uel aliquid in alteram habent. Hoc autem quod dictum est, planum erit, si intellexerimus quas appellat in plano curuas lineas. Quare aduertendum est, cuius ab eo lineas appellari non simpliciter circulares, aut conicas, aut eas quæ continuitatem habent non fractam: uerum eas omnis simpliciter, quæ in plano cum sint, nõ in directum producantur, curuas uocat. Vnam autem lineam in plano quocunq; modo connexam, quãuis siue ex rectis pluribus connectatur, siue ex curuis, siue ex rectis & curuis, unam tamen eam ex ea connexione postulat appellari.

Hic deest una charta in exemplari græco.

ipsi a b c d. Verum quoniam uti suprà dictũ est, curuas lineas uocat non quæ circumferentiam habent solas, uerumetiam eas quæ ex rectis componuntur: ex his erat collectio earum quæ in eadem cauæ habentur. Continget enim in quadam linea, quæ in eadem caua sit, duo utcunq; puncta notari, ita ut linea recta quæ illa puncta iunxerit, in neutram prioris lineæ partem cadat, sed ipsi coaptetur. Propterea dixit, lineam in eandẽ cauam esse, uocari, in qua lineæ rectæ, per duo quæq; eius puncta ductę, aut omnis in easdem partes cadant rectæ lineæ, aut earum quędam in easdem partes quædam super eam, & nulla in alterã partem. Easdem uero licet interpretari, & in superficiebus.

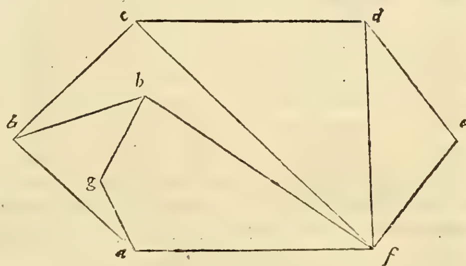
Deinde ex ordine nominat frustum solidum, & rhombum solidũ, aperte declarans significationem nominum. Post hęc petitiones quasdam sumit, quę sunt ei opportunæ ad demonstrationes seq̃tes, quæ quidem ex ipso sensu confessæ habentur: nihilominus tamen demonstrari ex communibus conceptionibus, & ex his quæ demõstrata sunt in Elementis, possunt. Est autem petitionum prima huiusmodi: Linearum omnium, quæ eisdem terminis continentur, rectam esse breuissimam. Esto enim in plano linea recta terminata hæc a b: & altera itẽ linea quædam a c b, eisdẽ contenta terminis a b, postulat sibi concedi ipsam a b minorẽ esse ipsa a c b. Dico igitur, quod hoc cũ uerum existat, petitũ est. notetur itaq; in ipsa a c b, utcunq; punctum c: & iũgantur a c, c b, constat ergo, ipsas a c, c b esse ipsa a b maiores. Item sumantur in ip



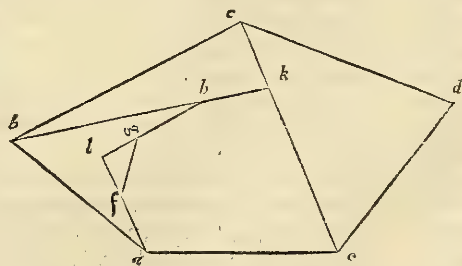
sis

sis a c, c b lineis alia utcunq; puncta d e, & iungantur a d, d c, c e, e b. similiter iam hic cōstat duas a d, d c esse maiores a c. & duas c e, e b maiores c b. Quare hæ a d, d c, c e, e b multo maiores erunt ipsa a b. Similiter autem & si alia puncta intermedia sumpta notauerimus, & iunxerimus rectas ad puncta nunc sumpta, inuen e mus ipsas item maiores a b. et hoc assidue faciendo, quæ magis accesserint ad lineam a b rectę maiores inuenientur. quare constat ex his, eam a c b esse ipsa a b maiorem, cum possimus in tota ipsa punctum notare, & ipsam iungentes lineam ex rectis compositam, ut eam talem esse lineam ostendamus, quæ eadem ratione ipsa a b probetur maior. neq; enim inconueniens est, in demonstrationibus eorū quæ confessa habentur, huiusmodi assumere conceptiones.

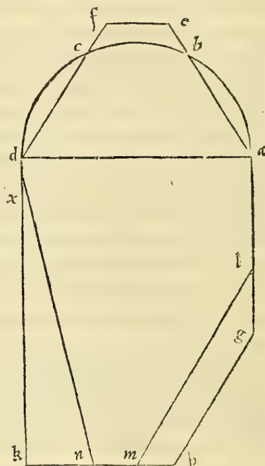
Post hæc dicit, se sumere hoc: earum quæ eosdem terminos habeāt linearum, illas esse inæquales, quæ in easdem cauas extiterint eo quo suprà dictum fuit modo. Non solum autem dixit in hoc inæquales esse, hoc quod est in easdem cauas esse: uerum etiam quum altera alteram, aut totam complectitur, aut eius partem complectitur: partem autem habet communem & complectentem complexą maiorem esse. Intelligantur autem, ut & hoc manifestum fiat, in plano duæ lineæ a b c d e f, & a g h f, eosdem terminos habētes hos a, f, & in eadem cauæ. & quoniam tota a g h f complexa est ab ipsa a b c d e f eosdem terminos habēte hos a, f. dico istas inæquales esse, & quæ comprę hendit comprӕhensa maior est. Iungantur itaq; b h, e f, d f. Quoniam igitur si intelligatur iuncta h a, ad unum laterum ipsius a b h, intus constitutæ sunt hæ a g, g h, his a b, b h, cōmuni posita h f. Hæ igitur a g, g h, h f, minores sunt his a b, b h, h f. Verum b h, h f, minores sunt his b c, c f. nam sunt intus rursus super unam b f cōstitutæ. multo magis ergo a b, b c, c f maiores sunt his a g, g h, h f. Verum hæ c d, d f, maiores sunt hac c f. & hæ d e, e f, sunt ipsa d f maiores. multo magis ergo hæ a b c d e f, sunt his a g h f maiores.



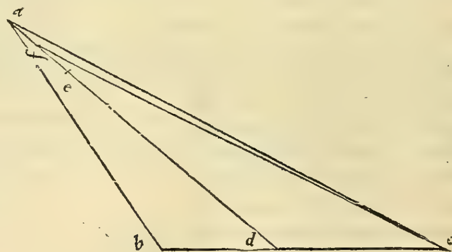
Declarationis enim gratia supponantur & aliæ lineæ similiter prædictis, uelu ti hæ a b c d e, a f g h k e. Dico comprӕhendentem esse maiorē. Intelligantur enim a f, g h erectæ in l. Quoniam igitur rursus f l, l g maiores sunt f g, adiectis communibus a f, g h, hæ a l, l h maiores sunt a f, f g, g h. Verum a l, l h maiores sunt his a b, b h. multo magis ergo a b, b h maiores sunt his a f, f g, g h. adiecta communi h k, erunt a b, b k maiores his a f g h k. Verū b h, h k minores sunt b c, c k. Multo magis ergo maiores a b c k, his a f g h k, adiecta communi k e, erunt hæ a b c k e maiores his a f g h k e. Verum hę c k, k e minores sunt his c d, d e, multo magis ergo hæ a b c d e, maiores sunt a f g h k e.



Et si circumferentiæ sint uel comprendentes uel comprensæ, aut utrumque, idem licet inspicere. nam si puncta cõtinuata in eisdem notentur, & in eadem iungantur, recte: sumentur lineæ ex rectis compositæ, quibus accommodabitur prædicta demonstratio, his quæ ex rectis componuntur quales illæ fuerint factis adiectis. unde & omnem lineam in continuatione punctorum existentiã habentem notato. Quod aũt conuenienter inæqualitatem linearum non solum ex hoc quòd in eadem cauæ sint, denotauit: uerum addidit etiam hoc, oportere alteram ab altera compræhendi, & ab ea quæ eosdem habeat terminos recta. nam nisi hoc fuerit, nõ erit hoc utiq; uerũ, omnino lineas tunc inæquales esse: uti conspicere licet in figuris infrascriptis. nam linea a b c d. & a e f d, eosdem terminos habent, & in eandem cauæ sunt: nec tamen constat, utra earũ sit altera maior. nam potest esse ut æquales sint, & possint utræq; in eadem cauæ intelligi, & eosdem terminos habere. ambæ autem contraria inter se positione cõstitutæ, ut utrauis earum quæ sunt dictæ ipsi a g h k d: et ita incognitum est si inæqualitas aut æqualitas earum hoc pacto sequatur. quare opportunè adiectum est, aut totam alteram comprehendi ab altera recta oportere, quæ eosdẽ terminos habeat: aut partem quidem compræhendi, partem autem cum ea communem habere: sicuti in his a g h k d, & a l m n x d. in his enim quædam compræhenduntur, quædam communes sunt, uti a l m n.

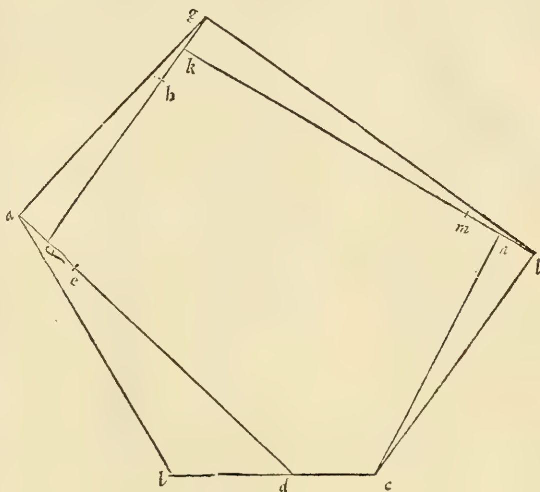


Opportunè autem admodum & illud ad inæqualitatis iudicium assumptum est, oportere lineas eosdem terminos habere. Si enim non fuerit illud, neq; altera alteram compræhendere poterit. Quomodo igitur inæquales erunt, nisi casu. nã quãdoq; erunt æquales. & contingit esse compræhensam aliquando cõpræendente maiorem. Vt autẽ hoc declaretur, intelligantur in plano duæ rectæ, a b, b c, obtusum angulum ad b continentes: & sumatur in b c punctũ utcunq; d. iungantur a d, a c. Quoniam igitur a d, maior est ipsa a b, ponatur a b æqualis ipsi d e, & diuidat᷑ ae in duo æqua puncto f, & iungatur f c. Quoniã igitur duæ a f, f c maiores sunt a c, & æqualis a f est ipsi f e, erit e f, f c maior ipsa a c, adiecta eorum a b, erunt hæ d f, f c maiores his b a, a c. quare linea b a c intellecta una esse, & in eadem caua, altera uero d f c compræhensa ab altera quæ eosdem terminos non habeat, non solum comprehendens non est maior cõ præhensa, uerum ostenditur minor esse.



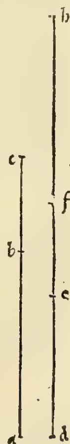
Et in lineis ex pluribus rectis compositis hoc idem licet inspicere. nam intelligantur in plano duæ rectæ hæ a b, b c: & pũctum d quodcunq; contingat, & iungatur a d, Rursus ponatur d e æqualis ipsi a b, & e a diuidatur in duo æqua puncto

ćto f, & ducatur a g ad angulos rectos ad ipsam a d, & iungatur f g. & ponatur f h æqualis ipsi a g. & item diuidatur h g in duo æqua puncto k, & ducatur g l ad angulos rectos ad ipsam f g, & iungatur k l. item k m ponatur æqualis ipsi g l, & diuidatur m l in duo æqua puncto n. & item ducatur l c ad angulos rectos, ad ipsam k l, et iũgatur n c. Ex prędemonstratis igitur cõstat, d f maiorem esse ipsa a b, & f k ipsa a g, ipsam k n ipsa g l, ipsam n c ipsa l c. quare et totã lineã d f k n c, maiorem ipsa a b g l c. Opportune ergo adiectũ fuit, eas oportere eosdem habere terminos, in his quæ esse debeant inæquales. Potest autem qui hæc considerarit, idem de superficiebus demonstrare omnibus, quando cum his quæ prædictæ sunt conditionib. superficies sumptæ, eosdem terminos cum planis habuerint.



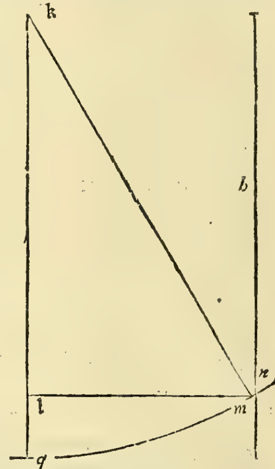
IN SECVNDVM THEOREMA.

At uero a c sibi ipsi supercompositum, excedet ipsum d, uidelicet sic: cum ipsum a b superparticulare aut superpartiens contigerit esse ipsius d. Si autẽ sit a b multiplex ipsius d, aut multiplex superparticularis, aut multiplex superpartiens, ablato ab ipso b c æquali d, reliquum c a superabit d, ita ut non amplius necesse sit sumi multiplex ipsi, uerum ut oporteat inde ponere a b æquale ipsi a c, & eandem accommodare demonstrationem. Et componenti ipsi f h ad f g minorem proportionem habet, quàm a b ad b c. nã si primum ad secũdum minorem habeat proportionem, quàm tertiũ ad quartum, componendo eadem proportio sequitur. Ostẽdetur autem sic. Sũto quatuor magnitudines a b, b c, d e, e f. & a b maiorem ad b c habeat proportionem, quàm d e ad e f. Dico igitur componẽdo, a c habere ad b c maiorem proportionem, quàm d f ad e f. Fiat enim sicut c b ad b a, ita f e, ad f h. Ecõuerso igitur, sicut a b ad b c, ita h f ad e f. maiorem aũt habet a b ad b c proportionẽ, quàm d e ad e f. igitũ h f habet ad e f maiorem proportionem, quàm d e ad e f. quare h f maior erit ipsa d e, & totum h e maius toto d f. & propterea h e habet ad e f maiorem proportionem, quàm d f ad f e. Verũ sicut h e ad e f, ita a c ad c b, per compositionem. igitur a c ad c b maiorem habet proportionem, quàm d f ad e f. At uero a c habeat ad c b maiorem proportionẽ, quàm d f ad f e. Dico diuidendo, quod a b habebit ad b c maiorem proportionem, quàm d e ad e f. Rursus enim similiter, si faciamus sicut c b ad c a, ita f e ad e h, fiet ut h e sit maior d f. quare communi e f ablata, erit h f maius d e. quare h f habebit ad f e, quę est sicut a b ad b c,



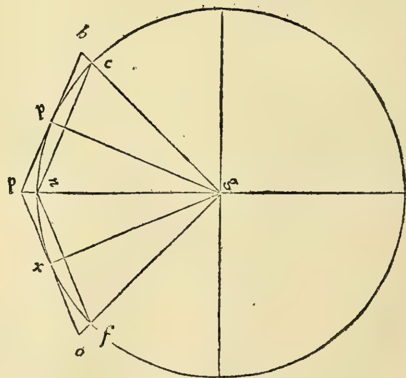
diuidendo maiorẽ proportionẽ, quàm d e ad e f. & cõponendo, & item diuidendo eadem proportio sequet. Ex eisdem aũt euersa proportio constat. habeat enim a c maiorem ad b c proportionem, quàm d f ad f e. Dico quod euertendo c a habebit ad a b proportionem minorem, quàm f d ad d e. Quoniã enim a c habet ad b c maiorem proportionem, quàm d f ad f e: & diuidenti a b habebit ad b c maiorem proportionem, quàm d e ad e f. E conuerso b c ad b a habebit minorem proportionem, quàm f e ad e d: & cõponenti, c a ad a b minorem habebit, quàm f d ad d e.

IN TERTIVM THEOREMA.



ET ab ipso k ducatur æqualis ipsi h, quæ sit k m. hoc fieri potest producta k l ad q, & posita h æquali ipsi k q: & cẽtro quidem k, interuallo autem k q descripto, circulo uidelicet q m n, cõstat k m æqualem esse ipsi k q. hoc est ipsi h.

Latus ergo n c figuræ multiangulæ, & æquilateræ. Angulo enim recto in sesquiquartam proportionem adducto, & sectione per parem diuisionem facta à recto, constat quod circumferentia sesquiquarta in pariter pares numero distribuetur circumferentias. Quare recta quę uni ex illis circumferentijs subtensa fuerit, fiet figuræ multiangulæ & æquilateræ & parilateræ latus unum. Nam si angulo sub x g n, æqualem fecerimus angulum sub p g d, iungentes ab ipso p in g, & producamus usq; ad g h, ęqualem ipsi angulo sub p g d, constat p h esse æqualem ipsi p o, & attingere circulum. Quoniam enim ipsa x g æqualis est ipsi g d. nam ipsa g communis est: æquales enim complectuntur. Ergo basis x p æqualis est ipsi p d. & angulus sub p x g, rectus cum sit, æquatur angulo p d g. quare contingit ipsum p d. Quoniam enim qui ad d anguli recti sunt & qui sub p g d, d g h æquales: & est communis d g, quare g h æqualis est ipsi g p, & ipsa p d ipsi h d. Item ipsa x p ipsi p d ostẽsa est esse ęqualis. quare ipsa h p existit figuræ multiãgulæ æquilateræ & parilateræ latus, descriptæ circa circulum. Quod autẽ similis figurę inscriptę fiat, inde constat. Cum enim ipsa h g sit æqualis ipsi g p, & ipsa c g ipsi g n, æquedistans est h p ipsi c n. eadem ratione & ipsa p o, ipsi n k. Quare angulus sub c n k, æqualis est angulo sub o p h. quare circũscripta figura est inscriptæ similis.



Cum enim angulus a d k c, maior sit angulo sub c g t, si angulo sub c g t constituamus æqualem angulum sub l k r, ipso k intellecto inter ipsa l m, triangulus l k r similis erit triangulo c g t. erit sicut r k ad k l, sic c g ad g t. quare m k ad k l, maiorem proportionem habet, quàm c g ad g t.

IN SEXTVM THEOREMA.

PRopter hoc minus est circumscriptum utroq; simul. Quoniam enim circumscriptum, ad inscriptum minorem habet proportionem, quàm utrumq; ad circulum, multo magis ergo circumscriptum habet ad circulum minorẽ proportionem, quàm utrumq; simul ad circulum. quare circumscriptum minus est utroque simul circulo, communi ablato, erũt reliqua circum residua spacio b minora.

IN OCTAVVM THEOREMA.

PErpẽdiculares igitur à uertice ad a b c ductæ sunt super eas. Intelligatur enim conus seorsum, & esto uertex eius g, centrũ basis eius h, & ab h ad a iungatur h a, & a g, g h. Dico quod g a perpendicularis est ad ipsam d e. quoniam enim g h perpendicularis est ad circuli planum, & omnia secundũ eam plana. quare triangulus g h a erectus est ad basim: & stat erecta super communem sectionem planorum h a, in uno planorum ipsa d e. quare ipsa d e, super ipsam g h a planũ stat, ad angulos rectos: quare & super ipsam, g a. Similiter ostendentur illæ, quæ ad c, b, iunctæ sunt à uertice perpendiculares cũ sint super d f, e f. Sciendum aũt, quod in præmissa opportune additum fuit hoc, oportere omnino pyramidem inscriptam habere basim æquilateram. non enim aliter à uertice ad basis latera ductæ possent esse æquales. In prę senti non est additum, esse basim æquilateram. propterea utcunq; fuerit, idem sequetur.

IN NONVM THEOREMA.

MAiores igitur sunt trianguli a b d, b d c, triangulo a d c. Quoniam enim angulus ad d, solidus est, anguli sub a d b, b d c maiores sunt angulo sub a d c, & si à uertice ad sectionem basis in duo æqua iunxerimus d e perpendicularem super a c, erit angulus sub a d b maior angulo sub a d e. Constituatur itaq; angulo sub a d b angulus, sub a d f æqualis: & postea d f æquali ipsi d c, iungatur a f. Quoniam igitur duæ duabus æquales, & angulus angulo, & triangulus a b d triangulo a d f æqualis, qui est maior ipso a d e: quare triangulus a b d ipso a d e maior est. Similiter quoq; triãgulus a b c, ipso d e c maior. Igitur duo a d b, d b c, ipso a d b maiores sunt.

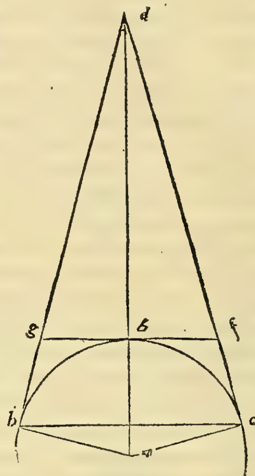
IN DECIMVM THEOREMA.

DVcatur enim g f e contingens circulum, & æquedistans ipsi a c, circumferentia a b c, in duo æqua diuisa puncto b. Quod enim sic ducta æquedistans fiat ipsi a c, ostendetur ductis à centro h, his h a, h d, h c. Quoniam enim a d est æqualis ipsi d c, & d h communis est, duæ duabus æquales, et basis a h basi h c, igitur & angulus angulo æqualis. Sunt autem anguli g b d, d b f recti. nam

à centro

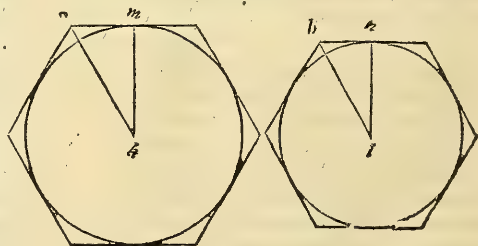
à centro ad contactum ducta est h b. quare reliquus angulus d g b, reliquo d f b æqualis est. idcirco ipsa g d, ipsi d f est æqualis; quare ipsa f g est æquedistans ipsi a c.

Circumscribentes itaque multiangula circa portionem, similiter circumferētijs circumceptis in duo æqua diuisis, ductis lineis cōtingentibus, sumemus quædam residua minora spacio h. de inscriptis quidem ostensum est in Elementis, triangulos portionibus inscriptos maiores esse dimidio portionum illarum. Idcirco possibile fuit, diuidendo in duo æqua circumferentias, & rectas ducendo, relinqui quędam residua spacio dato minora. In circumscriptis autem nondum hoc est ostensum, in Elementatione. Quoniā enim in præmissa hoc dixit, quod est ipsum collegisse per sextum Theorema, colligendum & ostēdendum quod contingens auferat triangulum maiorem dimidia ea in qua fit portione: ueluti in eadem descriptione, quod g d f triangulus maior est dimidio spacio compræhenso sub a d, d c, & circumferentia a b c. ductis enim eisdem, quoniam angulus d b f est rectus, erit ipsa d f maior ipsa b f, & ipsa b f æquatur ipsi f c. nam utraq; earum applicatur. Igitur d f maior est ipsa f c, quare triangulus d b f triangulo b f c maior existit. nam in eadem sunt altitudine. multo magis igitur maior est spacio b f c compræhenso. Eadem ratione & d b g maior est b g a. quare totum d f g, maius est dimidio spacio a d c compræhenso.



IN XIII THEOREMA.

INtelligatur itaq; circulo b circumscriptum, & inscriptum, & circulo a circūscriptum simile circumscripto ipsi b. quemadmodum autem circulo dato sit figura inscribenda polygonia, similis indescriptæ alteri circulo, à Pappo dictum fuit in Cōmentarijs elementorum. Circulo autem dato circumscribere figuram polygoniam, similem circumscriptæ alteri circulo, nondum habemus ab aliquo traditū: quod nunc dicendum est. Nam circulo b inscriptæ similis circulo a inscripta fuit, & circa a circumscriptæ similis inscripta fuit ipsi a, ueluti in tertio Theoremate. & est similis circumscriptæ ipsi b. Et quoniam figuræ rectilineæ circulis a, b circumscriptæ similes sunt, eandem habebunt proportionem, quam illæ quæ ex centris potentia. tale quidem de inscriptis ostensum est in Elementatione. de circumscriptis autem nondum. Ostendetur autem. sic intelligantur enim seorsum circumscriptæ & inscriptę figurę rectilineę, & à centris circulorum iūgantur k e, k m, l h, l n. Constat iā k m l n, ex centris esse circulorum circa circumscriptas figuras multiangulas descriptorum: & ad se inuicem haberi potentia, sicut figurę circumscriptæ. Et quoniam contenti sub k e m, l h n, sunt dimidij angulorum eorū qui sunt in polygonijs, cum ipsa



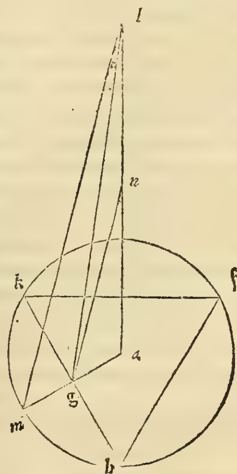
sint

ſint ſimilia, conſtat ipſos quoque æquales eſſe. At uero qui ad m, n, habentur, anguli recti ſunt: quare trianguli k e m, l h n ſunt æquianguli. & eſt ſicut quadratum k e ad quadratum h l, ſic circumſcriptæ inter ſe figuræ. Ergo ſicut quadratum k m, ad quadratum l n, ſic figuræ circumſcriptæ inter ſe habent. Triangulus igitur k d t, eandem proportionem habet ad rectilineam figuram circulo b circumſcriptam, quam triangulus k d t, ad triangulum f r a. Quoniam enim rectilineæ figuræ circulis a, b inſcriptæ ſe habent ad inuicem, ſicuti quæ ex centro potẽtia, hoc eſt ipſa t a ad g potentia, hoc eſt t d ad r f longitudine: hoc eſt ſicut triangulus k d t, ad ipſum f r l. Eſt autem ipſum k t d æquale circumſcripto ad circulũ, ad circulum a. Eſt igitur ſicut k t d, ad circa circulum b deſcriptum, ita triangulus k t d, ad triangulum f r l.

Igitur permutatim priſma habet ad cylindrum minorem proportionẽ, quàm multiangulum circulo b inſcriptum ad circulum b: quod eſt inconueniens. nam ſi faciamus ſicut ſuperficies priſmatis ad ſuperficiem cylindri, ſic inſcriptum circulo b haberi ad quidpiam aliud, erit id minus circulo b, ad quod inſcriptum habet maiorem proportionem, quàm ad circulum. hoc eſt ſuperficies priſmatis ad ſuperficiem cylindri maiorem habet proportionem, quàm inſcriptum ad circulum, & oſtenſum eſt habere minorem, quod admitti non poteſt.

IN XIIII THEOREMA.

Ipſa c ad ipſam d maiorem proportionem habet, quàm polygonium inſcriptũ circulo a ad ſuperficiem pyramidis inſcriptæ cono. nam quæ ex centro circuli ad latus coni maiorem habet proportionem, quàm quæ à centro ad unum latus polygonij ducta perpendicularis, ad perpendicularem ductam à uertice coni ad latus ipſius polygonij. Intelligatur enim ſeorſum deſcriptio in rationali, & polygonium f h k inſcriptum circulo a, & à centro a ad unum latus h k polygonij ducatur perpendicularis a g. Conſtat iam quod ſuperficies contenta ſub perimetro polygonij, & ſub a g, eſt dupla polygonio. Intelligatur item pũctum l uerticem eſſe coni, et ab ipſo l ad g ducta l g eſt perpendicularis ſuper h k, uti oſtenſum eſt, in limmate octaui Theorematis. Quoniam igitur inſcriptum polygonium eſt æquilaterum, & conus eſt æquicruris, erunt omnis ductæ ab l ad unumquodque latus polygonij perpendiculares ipſi, æquales l g. nam unaquæq; earum poteſt quadratum axis, & quadratum a g. Et propter hoc contentum ſub perimetro polygonij, & ſub l g, eſt duplum ſuperficiei pyramidis. quod enim ſub unoquoq; latere, & ſub perpendiculari ducta à uertice ad latus ipſum, quæ & æqualis ipſi l g, duplum eſt triangulo ſecundum ipſam. quare ſicut a g ad g l, ſic polygonium ad ſuperficiem pyramidis, ſumpta cõmuni altitudine perimetri ipſius polygonij ducta g n æquediſtãte ipſi m l, fiet ſicut a m ad m l, ſic a g ad g n. Ipſa uero a g ad g n maiorem proportionem habet, quàm ad g l. nam l g maior eſt ipſa g n. igitur a m ad m l, hoc eſt c ad d maiorem proportionem habet, quàm a g ad g l, hoc eſt quàm polygonium ad pyramidis ſuperficiem.



IN XVI THEOREMA.

ET quoniam contentum sub b a,a g,æquatur cõtento sub b d,d f,& contento sub a d,& sub utraq; simul d f,a g,cũ d f sit æquedistans ipsi a g. quoniã enim d f,est æquedistãs ipsi a g, est sicut b a ad a g, sic b d ad d f,atq; idcirco cõtentũ sub extremis b a,d f,æquatur contento sub medijs b d,a g. Verum cõtentum sub b a, d f,æquatur contento sub b d,d f, & cõtento sub a d, d f, per primum Theorema libri secundi Stoichioseos. Igitur contentum sub b d, a g,æquatur contento sub b d,d f.& contento sub a d,d f,adiecto communi contento sub d a, a g, erit contentum sub b d,& a g,cum contento sub a d,a g:quod est contentum sub b a,a g, æquale erit contento sub b d,d f,& contento sub a d,d f, & itẽ cõtento sub a d,a g.

IN XXIII THEOREMA.

MVltitudo autem laterũ polygonij mensuretur quaternario. Vult latera polygonij numerari quaternario, quia circulo moto circa diametrũ a c,latera omnia ferentur secũdum conicas superficies,cum hoc sit sibi usui in sequentibus. Nam si latera polygonij quaternario non mensurẽtur, quamuis parilaterum fuerit,non possunt omnia ferri secundum conicas superficies,uti percipi potest in lateribus hexagoni. duo enim ex opposito latera eius,inuicem æquedistãtia,contingit ferri secundum cylindricas superficies: quod quidem sibi non est usui ad sequentia,ut dictum est.

IN XXIX THEOREMA.

IPsa uero k h æqualis est diametro circuli a b c d. Si enim a puncto q iunxerimus ad punctum m,quo k f contingit circulum a b c d,quod sit m. similiter autem & ipsam q k:quoniam q k est æqualis ipsi q f,& anguli ad m sunt recti. namq; k m, est æqualis ipsi m f. item ipsa f k ipsi q h est æqualis: igitur q m æquedistans est ipsi k h.& idcirco est sicut h f ad f q, ita k h ad k m. uerum h f dupla est ipsius q f,igitur k h dupla est ipsius q m,quæ est ex centro circuli a b c d.

IN XXX THEOREMA.

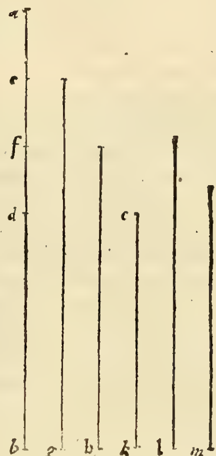
HAbet autem diameter circuli m,ad diametrum circuli ipsius n proportionẽ, quam habet e l ad a k. nam si iungãtur hæ g l,c k,angulis ad k l factis rectis, & ipsa a k æquedistans ipsi l e: triangulus enim g l e est æquiangulus. idcirco est sicut g l ad l e,ita c k ad k a. uerum sicut g l ad l e, sic omnis iungentes angulos circumscriptæ ad diametrum circuli circumscripti. Sicut autem c k ad k a,sic omnis iungentes angulos inscripti ad diametrũ circuli a b c d. Sicut autem diametros ad latus,sic diametros ad latus: quoniam & sicut m e ad e l,sic m a ad a k. & per æquã, sicut omnes iungentes angulos circumscripti ad e l, ita omnes iungentes angulos inscripti ad a k. uerum sicut omnes ad latus e l, sic contentum sub omnibus, & sub e l: hoc est quadratum eius quæ ex centro m, ad quadratum e l,ipsa e l æqualem altitudinẽ sumente. sicut aũt omnes ad a k, sic contentũ sub omnibus,& sub a k,hoc est quadratum eius quæ ex centro n ad quadratum a k, communem altitudinem rursus sumente a k. Est igitur sicut quadratum eius quæ ex centro m ad quadratum e l: ita quadratum eius quæ ex centro n,ad quadratum a k. Igitur sicut ipsa quæ ex centro m ad ipsam e l,ita quæ ex centro n,ad ipsam a k. Et permutatim,sicut quæ ex centro m, ad eam quæ ex centro n,ita e l ad a k. Et duplæ antecedentium: sicut diametros ipsius m ad diametrum ipsius n,sic e l ad a k.

IN XXXII THEOREMA.

HAe autem i h sumptæ,sic ut æqualiter se superent ipsa k ipsam i,& ipsa i ipsam h, & ipsa h ipsam g, propositum est duabus rectis datis duas medias proportionales inuenire in Arithmetica analogia: quod idem est, ut sese æqualiter superent. Hoc autem fiet hoc modo. Sint duæ rectæ datæ a b,c k inæquales,et ablata ab ipsa a b æquali ipsi c k,quæ sit b d,residua d a diuidatur in tria ęqua punctis e,f.& ponatur g æqualis ipsi e b,& h æqualis ipsi b f. Erunt itaq; g h perficientes

tes

tes, id quod propositum est. Dico quod a b, habet ad c k maiorem proportionem quàm triplam eius quam habet a b ad g. Fiat enim sicut a b ad g, sic g ad aliam quandam l. Et quoniam qua sui parte a b superat ipsam g: ipsa g superat eadem sui parte ipsam l. pars uero ipsius a b maior est parte illa ipsius g. Igitur a b maiori excedit ipsam g, quàm ipsa g ipsam l. Tanto autem ipsa a b superat ipsam g, quanto g ipsam h. Igitur ipsa g maiori excedit ipsam h, quàm ipsam l. quare l maior est ipsa h. Si rursus fecerimus sicut g ad l, sic l ad m, multo maior erit ipsa c k. Et quoniam sunt quatuor rectæ a b, g, l, m continuę proportionales, habebit a b ad m proportionem, a b ad g triplicatam. quare a b habet ad c k maiorem proportionem, quàm a b ad g triplicatam.



IN XXXV THEOREMA.

VErum contentum sub e h, & sub e f, c d, k a ostensum est æquale esse contento sub e l, k h. In uigesimo enim secũdo Theoremate ostensum est, quod e f, c d, k a ad h k eãdem proportionem habent, quam l e ad e h. quare contentum sub extremis est æquale contento sub medijs. cõtentum autem sub e l, k h minus est quadrato h a. Cum enim contentum sub l h, h k, sit æquale quadrato h a, uti constat, coniunctà a l: propterea quod triangulus h a k factus est similis triangulo h a l. Est enim sicut l h ad h a, sic a h ad h k, & ideo contentum sub extremis æquale quadrato mediæ.

IN XXXVII THEOREMA.

HAbebit iam idem centrum cum circulo a b. Si enim a d e iũgantur rectæ ad h e l, æquales erunt, proptera quod ductæ a d ad contactus rectæ sunt perpendiculares ad aptatas, & diuiduntur adaptatæ in duo æqua ad contactum. aut quando fiat maior enim est superficies superficie: quoniam enim m f secundum superficiem conicam fertur, secundum coluri coni superficiem feretur, quæ est æqualis circulo, cuius quæ ex centro sit media proportionalis inter f m, & dimidiã utriusque simul f g, & m n. Similiter & superficiei coluri coni factæ ab m a, æqualis est circulus, cuius quæ ex centro sit media proportionalis inter rectam m a, & dimidiam utriusq; simul a b & m n. Et ipsa quidem f m maior ipsa m a, & ipsa f g ipsa a b maior, igitur media, quare & superficies superficie. Superficies igitur contenta sub f m, m g, maior est superficie contenta sub m a, n b.

IN XXXVIII THEOREMA.

SVperficies igitur figuræ k f l maior est circulo, & cætera quæ sequũtur, obscure uidetur collegisse quod dictum est. Dicatur autem aperte hoc modo. Quoniam circulus n est æqualis superficiei figuræ. quæ autem ex centro ipsius n, potest contentum sub m h, f g: contentum autem sub m h, f g maius est cõtento sub c d, d x. nam m h ostensa est æqualis ipsi c d, & ipsa f g maior d x. Igitur circulus n maior est circulo cuius quæ ex centro potest contentum sub c d, d x. contentum autem sub c d, d x, æquatur quadrato d a. Igitur circulus n, hoc est superficies circumscripti, maior est circulo cuius quæ ex centro æqualis est ipsi d a.

IN XXXIX THEOREMA.

VErum spacia prædicta sunt ad inuicem, sicut quadratum lateris e k, ad quadratum lateris a l. Si enim iungatur d l k, cum e k sit ęquedistans ipsi a l, erit sicut e d ad d a, ita e k ad a l, Sicut autem e d ad d a, sic e f ad a c: igitur sicut e k ad

a l, ita e f ad a c, & dimidia ipsius e f ad dimidiam ipsius a c. Similiter & in omnib. iungentibus angulos polygonorum ostendetur, quod eandem inter se habeant proportionem, quam e k ad a l. Igitur sicut unum ad unum, sic omnia ad omnia. quare sicut e k ad a l, sic omnis iungentes angulos polygoni circumscripti, cum dimidia base portionis maioris, ad omnes iungentes, cum dimidia base minoris portionis. quare sicut quadratum e k, ad quadratum a l, sic contentum sub e k, & omnibus, ad contentum sub a l, & omnibus. Figuræ enim rectilineæ similes sunt dupla laterum similium proportione, & proportionis e k ad a l dupla est quadrati e k ad quadratum a l proportio. Coiungentium autem angulos maioris, ad coiungentes angulos minoris dupla est ea quæ contenti sub e k, & omnibus, ad contentum sub a l, & omnibus. Similia enim & ipsa, cum habeant latera proportionalia. Et est sicut e k, ad eam quæ ex centro minoris sphæræ, sic a l ad ductam à centro ad à l perpendicularem. Si enim à centro ad contactum iungatur, recta erit ducta perpendicularis ad utrasque e k, a l. & est sicut e d ad d a, hoc est e k ad a l: sic quæ ex centro ad contactum ducta, hoc est quæ ex centro minoris sphæræ, ad eam quæ ex centro ad a l ducta est perpendicularis.

Ostensum est autem, sicut e k ad a l, sic quæ ex centro circuli m, ad eam quę ex centro circuli n. Quoniam ostensum est, sicut polygonium ad polygonium, sic circulus m ad circulum n: hoc est quadratum eius quæ ex centro m, ad quadratū eius quæ ex centro n.

IN XL THEOREMA.

VTraq; enim proportio dupla est eius quam habet latus circumscripti polygoni ad latus inscripti. Ostensum est enim in hoc, quod est sicut quæ ex centro circuli æqualis superficiei circumscripti, ad eam quæ ex centro circuli æqualis superficiei inscripti: sic latus circumscripti polygoni, ad latus inscripti. Circuli autem inter se sunt in dupla proportione suarum semidiametrorum. Superficies igitur ad superficiem, duplam habet proportionem eam, quā habet latus ad latus.

IN XLII THEOREMA.

SOlidum igitur circumscriptum, ad inscriptū, minorem habet proportionē, quàm solidum frustum ad conum h. Si enim circumscriptum solidum ad inscriptum minorem habet, quàm triplicatam proportionē, eam quam habet b ad f, & ipsa d habet ad e minorem, quam eam triplicatam. circumscriptum igitur habet ad inscriptum minorem proportionem, quàm d ad e, & d habet ad e minorem proportionem, quàm frustum ad conum. Circumscriptum ergo ad inscriptum, minorem habet quàm frustum ad conum.

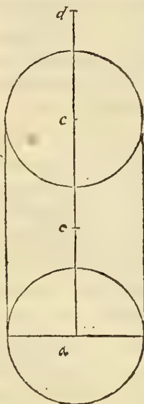
EVTOCII ASCALONITAE COMMENTARIVM, in primum traditionis Archimedis de Sphæra & cylindro, ascriptum Milesio mechanico Isidoro præceptori nostro, finit.

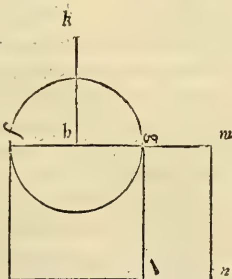
EVTO-

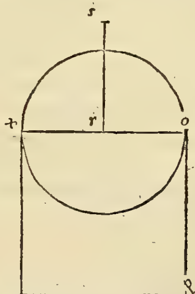
EVTOCII ASCALONITAE COMMENTARIVM IN SECVNDVM de Sphæra & cylindro.



CVM ea quæ in primo libro continentur Theoremata, satis sint à nobis explicata: consequens inde accedit, ut eodem modo his quę in secundo libro theoremata habentur explicandis, studium adhibeamus. Dicit in primo Theoremate: Sumatur dato cono, uel cylindro, sesquialter cylindrus. Hoc autem dupliciter fieri potest, aut seruata in ambobus base eadem, aut altitudine. Et ut apertius fiat quod dictũ est, intelligatur conus, aut cylindrus, cuius basis sit circulus a, altitudo autẽ a c, & sit inuenire eius sesquialterum cylindrum. Supponatur autem prius cylindrus a c, & educatur à c altitudo cylindri, & ponatur c d dimidia ipsius a c. igitur a d erit sesquialtera ipsius a c. Si iam intelligamus cylindrum habentẽ basem circulum a, altitudinem uero rectam a d, ipse erit sesquialter cylindri a c propositi. nam coni & cylindri in eadem base constituti, habent se ad inuicem, sicut eorum altitudines. Si autem conus sit a c, diuisa a c in duo æqua puncto e: si rursus intelligatur cylindrus, qui basem habeat circulum a, altitudinem autem a e, erit sesquialter coni a c. Cylindrus enim qui basim habeat circulum a, & altitudinem a c rectam, triplus est coni a c, & duplus cylindri a e. quare constat cylindrum a e sesquialterum esse coni a c: cuius eadẽ base saluata, & in proposito & in sum pto efficietur problema. Licet autẽ idem fieri, & si basim contigerit diuersam esse, axe manente eodem. Esto enim rursus conus, aut cylindrus, cuius basis circulus f g, altitudo h k recta, cuius opus est inuenire cylindrũ sesquialterũ, qui habeat altitudinẽ æqualem ipsi h k. Describatur quadratũ f l ab f g diametro circuli, & producta f g ponatur g m dimidia ipsius, & cõpleatur parallelogrãmũ f n. Erit igitur f n sesquialterum ipsi f l, & ipsa f m ipsi f g. Cõstituatur enim parallelogrãmo f n, æquale quadratum x p: & circa diametrum, unum laterum eius x o, describatur circulus. Est itaq; x o sesquialter ipsi f g. nam circuli sic se habẽt, sicut quadrata suarum diametrorũ.

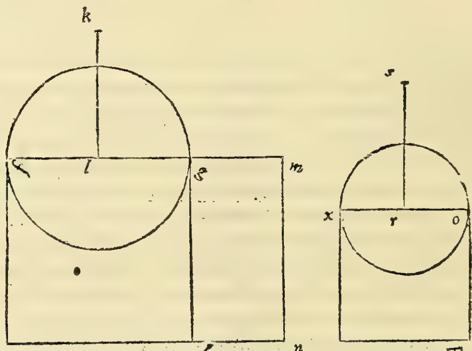


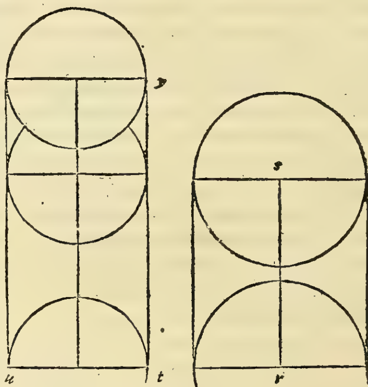




Item si intelligatur cylindrus, qui basim habeat circulum x o, & altitudinem æqualem ipsi h k, erit sesquialter cylindri habentis basim circulum f g, altitudinem uero h k. Si autem sit conus, idem facientes, & constituentes quadratum x p, æquale tertiæ parti perallelogrãmi, & describẽtes circa unũ latus eius x o circulum, intelle-

intellexerimus ex ipso cylindrum habentem altitudinem h k: habebimus eum sesquialterum coni propositi. Quoniam enim parallelogrāmum f n est triplum quadrati x p, & sesquialterum ipsi f l, erit f l duplum ipsi x p. quare & circulus circulo duplus, & cylindrus cylindro. Verū cylindrus habens basem circulum f g, altitudinem uero h k, triplus est cono circa eādem basim & altitudinē cōstituto. Quare cylindrus basim habens circulum x o, altitudinem uero æqualem h k, sesquialter est proposito cono. Si autem oporteat neq; basem, neque altitudinem esse eandem, rursus hoc dupliciter fiet. aut enim basim habebit æqualem datæ, aut axem cylindrus propositus. Esto prius basis data circulus x o. Et opus esto cylindrum inuenire sesquialterum dato cono, aut cylindro à base x o, id est qui basim habeat x o. Sumatur ut prædictum est, cylindrus u y sesquialter cono, aut cylindro dato, eandem basim habens cum proposito: & fiat sicut quadratū x o ad quadratum t u, sic altitudo u y ad ipsam r s. Erit igitur cylindrus ab x o base habēs altitudinem r s, equalis u y. nā bases se habent mutuò ut altitudines, & factū erit imperatū. Si autem basis non sit data, sed axis, eadē ratio ne prolato u y, fiet id quod proponit.





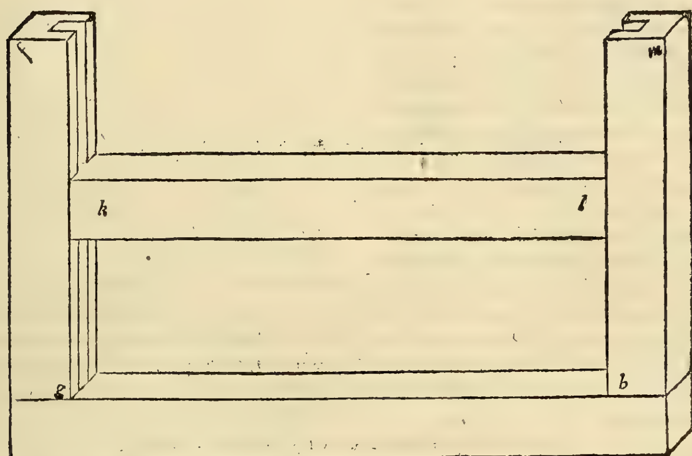
IN COMPOSITIONEM PRIMI.

HOc sumpto, quoniam ad eius resolutionem proueniūt ea quæ in problemate sunt, resolutiōe ad hoc terminata, ut oporteat duab. rectis datis duas eis medias proportionales inuenire. dixit in cōpositione, inueniātur. Harum aūt inuentionem ab eo traditam nusquā adhuc penitus inuenimus. multorum autem clarorum uirorum scripta in manus inciderunt, in quibus hoc problema tractatum inuenimus, ex quib. solam Eudoxi Cnidij descriptionē repudiauimus. Nam in procemijs quidem dixit se per lineas curuas eam inuenisse. uerum in demonstratione, præter id quod non curuis lineis utatur, uerum & disiunctam proportionalitatem constituens, ea uti continua utitur, quod sanè absurdum est. Sed quid dico de Eudoxo, uerumetiam de quibusdā qui mediocriter in Geometria uersati sunt. Vt autem eorum quæ ad nos peruenerunt hominum sententiæ planè haberi possint, eorum uniuscuiusq; inueniendi modum istic deinceps describemus.

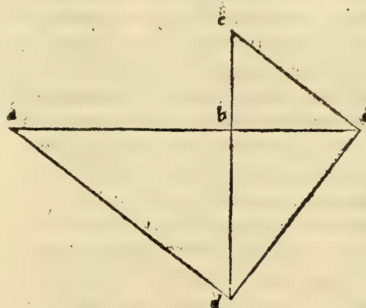
MODVS PLATONIS.

DVabus rectis datis, duas rectas medias illis proportionales in continua proportionalitate inuenire. Sint duæ rectæ datæ a b, b c inuicem perpendiculares.

res, quibus opus sit duas medias proportionales inuenire. Producantur in directũ ad d, e: & paretur angulus rectus sub f g h: & in uno eius crure, puta f g, moueatur regula k l, in quodam constituto in f g, ita ut permaneat æquedistans



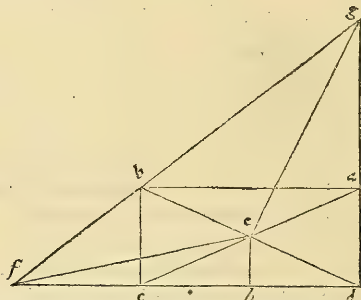
ipsi g h. Fiet autem hoc, si intelligamus alteram regulam confixam ipsi h g, æquedistantem ipsi f g, puta in Superioribus enim ipsarum f g, h m, superficiebus firmatis assialibus, & coaptatis ipsi k l, ad dictos erit tunc motus ipsius k, semper æquedistãs ipsi g h. His ita paratis, applicetur unum crus anguli quodcunq;, puta g h, cõtingẽs c: & regula attingat a, ita uti in descriptione habetur. fiat angulus rectus, portionem habens, puta c d e, & regula k l positionem habeat, puta e a. nam his ita confectis, propositum effectum est. Cum enim anguli ad d e, sint recti, erit sicut c b ad b d, ita b d ad b e, & e b ad b a.



MODVS HERONIS IN MECHANICIS INTRO-
ductionibus, & in telis fabricandis.

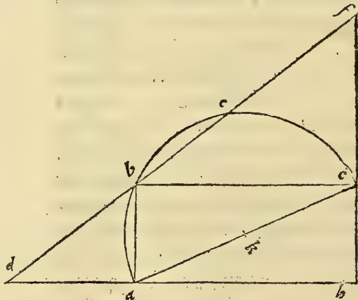
SInt duæ rectæ datæ a b, b c: quibus opus sit duas medias proportionales cõstituere. disponantur ita, ut ambiant angulum rectum ad b, & compleatur b d parallelogrammũ, & iungantur a c, b d. constat eas æquales esse, & se mutuo per æqualia secare puncto e. nam circulus circa alteram earum descriptus, per terminos alterius transibit, cum perallelogrammũ sit orthogoniũ. producantur hæ d c, d a usque ad f g, & intelligatur regula, puta f b g, mota circa quendam clauum fixum in b: & moueatur, donec abscidantur æquales ab e ductæ: hoc est e g, e f. & intel-

intelligatur sectio positionem habere, puta f b g, factis e f, e g æqualibus, ut dictũ est. Ducatur ab e perpendicularis ad c d, puta e h, constat eam secare ipsam c d in duo æqua. quoniam itaq; c d, in duo æqua secatur puncto h, & additur ei c f, fit ut contentum sub d f, c f, cum quadrato c h, æquetur quadrato h f, quadrato e h communi adiecto erit cõtentum sub d f, f c: cum quadratis harũ c h, h e, æquale quadratis f h, h e. quadratis autem f h, h e æquatur quadratum f e. Igitur contentũ sub d f, f c, cum quadrato c e, æquatur quadrato e f. Similiter autem ostendetur, quod cõtentum sub d g, g a, cũ quadrato a e, æquat̃ quadrato e g, & a e est æqualis ipsi e c, & ipsa g e ipsi e f. Igitur contentum sub d f, f c, æquatur contento sub d g, g a. Si aũt contentum sub extremis fuerit æquale contento sub medijs, erũt quatuor lineæ illæ proportionales. Est igitur sicut f d ad d g, ita a g ad c f. Verum sicut f d ad d g, sic f c ad c b, & b a ad a g. nam in triangulo f d g ducta est c b, æquedistans ipsi d g, item a b æquedistans ipsi d f. Sicut ergo b a ad a g, ita a g ad c f, & c f ad c b. Igitur inter a b, b c sunt factæ mediæ proportionales a g, c f.



MODVS PHILONIS BYSANTII.

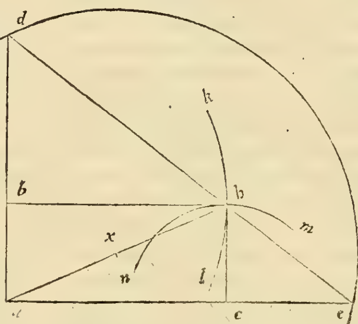
Sint duæ rectæ datæ a b, b c, quibus opus sit duas medias proportionales inuenire. Disponantur ita ut ambiant angulum rectum ad b, & iuncta a c describatur super eam semicirculus a b e c: & ducatur a d secundum angulos rectos ad ipsam b a, & item c f ad ipsam b c. & applicetur regula mobilis ad b, secans a d, c f, & moueatur circa b, donec quæ ab ipso b ad ipsum d sit æqualis ei quæ ab e in f: hoc est, ei quæ est inter circumferentiam circuli, & ipsam c f. Intelligat̃ itaq; regula habere positionem, puta quam habet d b, e f, d b æquali ipsi e f, ut dictum est. Dico itaq;, a d, c f esse medias proportionales inter a b, b c. Intelligantur enim d a, f c protractæ & concurrentes in h. Constat itaq;, cum b a, f h sint ęquedistãtes, quod angulus ad h est rectus, & circulus a e c perfectus transibit per h. Quoniam igitur d b est æqualis ipsi e f, igitur contentum sub e d, d b est æquale contento sub b f, f e. Verum contentum sub e d, d b æquatur contento sub h d, d a. nam utrũq; est æquale quadrato cõtingentis à puncto d ductæ. Contentum autem sub b f, f e, æquatur contento sub h f, f c. nam utrumque similiter æquatur quadrato contingentis ductæ à puncto f. qũare contentum sub h d, d a, æquatur contento sub h f, f c. Idcirco sicut d h ad h f, sic c f ad d a. Verum sicut h d ad h f, sic b c ad c f, & d a ad a b. nam in triangulo d h f, ducta est b c ęquedistans ipsi d h, item b a æquedistans ipsi f h. Est igitur sicut b c ad c f, ita c f ad d a, & d a ad a b: quod erat propositum. Sciendũ est autem, quod huiusmodi apparatus est idem fere cum illo superiori Heronis. nam parallelogramum b h, idem cũ eo quod sumptum fuit in apparatu Heronis, & latera producta h a, h c eadem, & regu-



regulà mota ad b. Hoc solum differunt, quod in illo quidem mouebatur regula donec ductæ à sectione ipsius a c, per æqualia, puta ab ipso k separarentur æquales coincidentes ad h d, h f, puta k d, k f. In hac uero mouetur, donec d b sit æqualis e f. in utraque autem figuratione idem sequitur. Quod autem nunc dictum est, facilius in usu ponitur. nam ipsę d b, e f seruabũtur æquales, diuisa d f regula per æqualia & continua. hoc autem multo facilius est, quàm circino tentare eas quæ ab ipso k ad d & f ductæ fuerint, æquales facere.

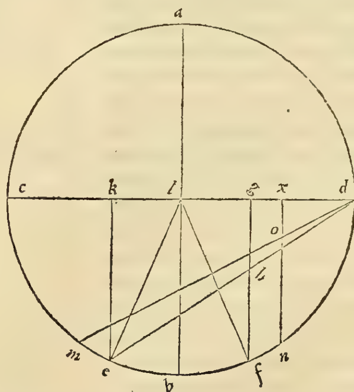
MODVS APOLLONII.

SInt duæ rectæ, quæ a b, a c: quib. opus sit duas medias proportionales inuenire, quæ ita aptentur, ut ambiãt angulum rectũ ad a. & centro b, interuallo a c describatur circumferẽtia circuli k h l. item centro c, interuallo a b, describatur circumferentia circuli m h n, quæ secet ipsam k h l in puncto h. & iungãtur h a, h b, h c. Igitur b a c h est parallelogrãmũ, cuius est h a diametros. diuidatur h a, in duo æqua puncto x, & centro x describatur circulus secans ipsas a b, a c, productas in punctis d e: ita ut puncta d e sint in eadem linea recta cum ipso h. quod utique fiet, cum regula mota circa h, & secãte ipsas a d, a e, & diducta, donec ductæ à puncto x ad puncta d e sint æquales. Hoc enim facto habebimus quæsitum. Ita utique figuratio eadem est cum illa Heronis & Philonis, & constat eandem demonstrationem adhiberi.



MODVS DIOCLIS IN LIBRO DE PIrijs pulcherrimus.

IN circulo ducantur duæ diametri ad angulos rectos a b, c d, & separentur duæ circumferentiæ æquales utrinque ad b, hæ e b, b f. & per f ducatur æquedistãs ipsi a b, quæ sit f g, & iungatur d e. Dico quod inter c g, g h sint duæ mediæ proportionales hæ f g, g d. Ducatur enim per e linea e k, æquedistans ipsi a b. igitur e k æqualis est ipsi f g, & k c ipsi g d. Hoc autem constat, ductis à puncto l rectis ad e f. nã anguli c l e, f l d sunt ęquales. & recti ad k, g. igitur omnia omnibus, propterea quod l e æquatur ipsi l f. igitur reliqua c k est ęqualis ipsi g d. Quoniam igitur est sicut d k ad k e, sic d g ad g h. item sicut d k ad k e, ita e k ad k c. nã e k est media proportionalis harum d k, k c. Sicut ergo d k ad k e, ita e k ad k c: & sic d g ad g h. & d k est æqualis ipsi c g, & ipsa e k ipsi f g, ipsa k c ipsi g d. Igitur sicut c g ad g f, ita g f ad g d, & d g ad g h. Si item utrinque ex b sumantur æquales circumferentiæ hæ m b, b n, & per n ducatur n x æquedistans ipsi a b, & iungatur d m, erũt rursus inter c x, x o mediæ proportionales hæ n x, x d. Pluribus itaque hoc



pacto æquedistantibus continuis, productis inter b d, & circumferentijs depræhensis ab illis uersus b, ponendo alias æquales uersus c, & ad puncta facta iungendo rectas lineas à puncto d, ita ut similiter fiant ipsis d c, d m: diuidentur parallelæ quæ sunt inter b d secundum quædam puncta, in proposita descriptione, puncta o h: quibus regula applicata iungentes rectas, habebimus quandam lineam in circulo descriptam. in qua si sumatur quodcunq; punctum, & per ipsum ducatur æquedistans ipsi l b, erunt ipsa ducta, & illa quæ abscinditur ab illa, ex diametro uersus d, mediæ proportionales, inter lineam ab eadem ex diametro uersus c abscisam, & partem eius contentam à puncto in illa signato ad diametrum.

Istis ita constitutis, sint duæ rectæ a, b, quibus opus sit duas medias proportionales inuenire: & sit circulus, in quo duę diametri se secent ad angulos rectos c d, e f. & describatur in ipso d h f linea, per puncta continua, uti prædictum est, & fiat sicut a ad b, ita c g ad g k: & iuncta c k, & producta diuidat lineam puncto h, & per h ducatur l m, æquedistans ipsi e f. per præscripta igitur inter c l, l h medię sunt proportionales hæ m l, l d. Et quoniam est sicut c l ad l h, ita c g ad g k. Sicut autem c g ad g k, ita a ad b. Si autem in eadem proportione ipsarum c l, l m, l d, l h cōstituamus inter a b, puta istas n, x, illæ sumptæ erunt inter a b mediæ proportionales: quod erat inueniendum.

MODVS PAPPI IN MECHANICIS

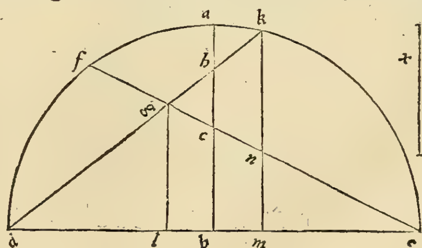
introductionibus.

PRopoſuit Pappus inuenire cubū, qui haberet ad cubum datum proportionem datā: & si quæ ad huiusmodi proportionem demonstrandam requiruntur, inuenerimus, cōstat nos inuenisse propositū. Duabus enim rectis datis, si ex illis duabus, quæ debent esse mediæ proportionales, secundam inuenerimus, tertiam quoq; deinde facile deprehendemus. Describatur itaque, uti dicit ipse, semicirculus a b c, & à centro d ducatur d b ad angulos rectos, & moueatur regula circa a punctum, ita ut unus terminus eius quodam clauulo circumponatur pūcto a. Esto reliqua pars eius uti circa centrū, circa clauulum moueatur inter b c. His constitutis, proponatur duos cubos

cubos inuenire, habentes inter se datam proportionem, & fiat proportio b d ad d e, qualis est proportio data & iuncta c e. producatur ad f. adducat iam regula inter b c, donec pars eius intercepta inter rectas f e, e b, æqualis sit rectę quæ est inter rectam b e, & circumferentiam b k c. Hoc enim tentantes, & regulam dimouentes, facile assequemur. Fiat iam, et positionē habeat, puta a k, ita ut g h, & h k ęquales sint. Dico quod cubus ab ipsa b d, ad cubum ab ipsa d h, proportionem habet propositam: hoc est eam quæ b d ad d e. Intelligatur circulus perfectus, & iuncta k d protendatur ad l, & iungatur l g, cui est æquedistans ipsa b d, quia k h est æqualis ipsi g h, & ipsa k d ipsi d l. iungatur ipsa a l, & l c. Quoniam enim angulus a l c est rectus, quia est in semirculo, & l m est perpendicularis, erit igitur sicut quadratum l m ad quadratum m a, hoc est c m ad m a, sic quadratum a m ad quadratum m g. Proportione igitur ipsius a m ad m g posita cōmuni, erit proportio cōposita ex proportione c m ad m a, & ex proportione a m ad m g: hoc est proportio c m ad m g, eadem est compositæ ex proportione quadrati a m ad quadratum m g, & ex proportione a m ad m g, quæ est eadem ei quam habet cubus ab a m ad cubum ab m g. Igitur proportio c m ad m g eadem est ei, quā habet cubus ab a m ad cubum ab m g. Verum sicut c m ad m g, sic c d ad d e. sicut autem a m ad m g, ita a d ad d h. igitur sicut b d ad d e, hoc est sicut data proportio, ita cubus ex b d ad cubum ex d h. Earum igitur quas opus erat medias proportionales inuenire, secunda fuit d h. & si fecerimus sicut b d ad d h, ita d h ad aliam quandam, erit tertia inuenta. Est autem aduertēdum, quod hæc descriptio eadem est ei quam Diocles suprà tradidit: hoc solum differens ab ea, quod ille solum lineam quādam per continua puncta describit intermedia ipsi a b, in qua sumebat g producta c e, & diuidente dictam lineam. In hoc autem datur g, per regulam a k, motam circa a. quod enim g sit idem, siue sumatur ut hic per regulam motam, siue sicut Diocles, ita discemus: producta m g ad n, iūgatur k n. Quoniam igitur k h est æqualis ipsi h g, & g n est æquedistans ipsi h b, & k x æqualis est ipsi x n, & ipsa x b communis est & ad angulos rectos. nam k n in duo æqua diuiditur, & ad angulos rectos ab ea quæ per centrum. Igitur basis æqualis basi: idcirco & circumferentia k b, ipsi b n. Igitur g est id quod est in linea Dioclis, & demonstratio eadem. Dixit enim Diocles, quod sicut c m ad m n, ita m n ad m a, & m a ad m g. Est autem m n æqualis ipsi m l. nam diametros secat eam ad angulos rectos. Est igitur sicut c m ad m l, sic l m ad m a, & m a ad m g. Igitur harū c m, m g, mediæ proportionales sunt l m, m a. Verum sicut c m ad m g, ita c d ad d e: sicut autē c m ad m l, ita a m ad m g: hoc est c d ad d h. & duarum mediarum, harum c d, d e secunda est d h, quàm Pappus efficiebat.

MODVS SPORI.

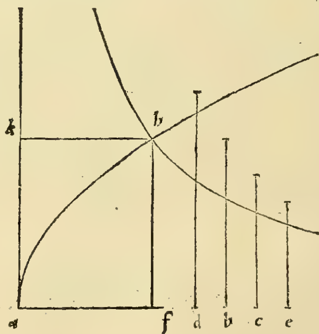
Sint duæ rectæ datæ a b, b c: quibus opus est duas medias proportionales inuenire. Ducatur ex b ipsa d b e, ad angulos rectos ad a b: & centro b, interuallo autem b a describatur semicirculus d a e: & ab e ad c iūgatur recta, & ducatur ad f: & ducatur ab ipso d recta quædam ita, ut g h sit æqualis ipsi h k. Hoc enim fieri potest, & ducantur à punctis g, k, perpendiculares ad d e, istæ g l, k m. quoniā igit͂ est sicut k h ad h g, ita m b ad b l, & ipsa k h est æqualis ipsi h g, igit͂ ipsa m b est æqualis ipsi b l: quare & reliqua m e ipsi l d. Tota ergo d m, est



æqualis ipsi l e, et propter hoc sicut m d ad d l, ita l e ad m e. Verum sicut m d ad d l, ita k m ad g l. Sicut autem l e ad m e, ita g l ad m n. Rursus quoniam sicut d m ad m k, ita k m ad m e. Igitur sicut d m ad m e, ita quadratum d b, hoc est quadratum a b ad quadratum h b. nam d b est æqualis ipsi a b. Rursus quoniam sicut m d ad d b, ita l e ad e b. item sicut m d ad d b, ita k m ad h b. Sicut autem l e ad e b, ita g l ad c b. Igitur sicut k m ad h b, ita g l ad c b. & permutatim, sicut k m ad g l, ita h b ad c b. Verum sicut k m ad g l, ita m d ad d l, hoc est d m ad m e: hoc est, quadratum a b ad quadratum h b. Igitur sicut quadratum a b ad quadratum h b, ita b h ad b c. Sumatur harum h b, b c media proportionalis hæc, x. Quoniam igitur sicut quadratum a b ad quadratum b h, ita h b ad b c. Verum quadratum a b ad quadratum h b, habet proportionem a b ad b h duplicatam, & h b ad b c. habet proportionē h b ad x duplicatam. Igitur sicut a b ad b h, ita b h ad x. Verum sicut a b ad x, ita x ad b c. Igitur a b ad b h, sicut b h ad ad x, & x ad b c. Cōstat autem, quod hæc quoque eadem est illi quæ à Diocle dicta fuit, & Pappo.

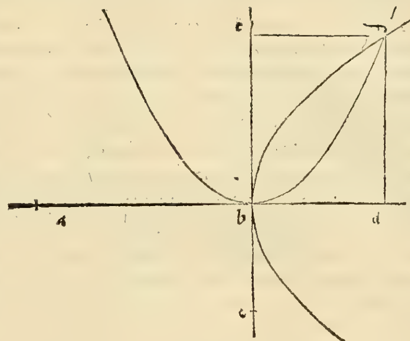
MODVS MENECHMI.

Sint duæ lineæ rectæ datæ a e, quibus iubemur duas medias proportionales inuenire. Esto hoc factum, & sint illæ b c. & ponatur recta positione hæc d g terminata ad d. & uersus d sumatur d f, æqualis ipsi c: & ducatur ad angulos rectos h f, quæ ponatur æqualis ipsi b. Quoniā igitur tres lineæ a b c rectæ sunt proportionales, contentū sub a c æquatur quadrato b. Contentū igitur d data, & c, hoc est a f, æquatꝰ quadrato b, hoc est quadrato f h. quoniā rectāguli coni, in parabole. igitur punctum h, per punctum a d, secundum primam descripta ducātur æquedistantes h k, a k. & quoniam contentum sub b c est datum, cum sit æquale contento sub d e: contentum igitur sub k h, h f datum, quoniam hyperbole, igitur ipsum h in non coincidentibus cum his k a, a f. igitur h datum: quare & f datum. Componetur autem sic. Sint duæ rectæ datæ hæ d e, & positione ipsa a g terminata ad a, & describatur per a sectio rectanguli coni, cuius axis est a g, & rectū speciē latus d. quæ autem ductæ sint ad ipsam a g ad angulos rectos possint spacia ipsi d, apposita latitudinē habētia abscisas ab eis uersus punctum a, describatur & esto a h, et erecta a k. & in non coincidētibus cum his k a, a f, describatur sectio obtusianguli coni: à qua ductę equedistātes ipsis k a, a f, facient spaciū ęquale spacio cōtēto sub d e. Scindet aūt sectionem rectanguli coni. diuidat eam in puncto h, & ducātur h k, h f perpendiculares. Quoniam igitur quadratum f h æquatur contento sub d a, a f, erit sicut d ad f h, ita f a ad e. Verum sicut d ad f h, ita f h ad f a, & f a ad e. Ponatur itaq; g b æqualis ipsi f h, & c æqualis ipsi a f. erit igitur sicut d ad b, ita b ad c, & c ad e. igitur d b c e sunt continuę proportionales, quod erat inueniendū. Aliter idem.



Sint duæ rectæ datæ ambientes angulum rectum a b, b c: & fiant earū mediæ proportionales d b, b e, ita ut quæ c b ad b d, ea sit b d ad b e, & b e ad b a: & ducantur ad angulos rectos d f, e f. Quoniam igitur est sicut c b ad d b, ita b d ad b e. Contentum igitur sub c b b e, hoc est cōtentum sub data, & b e, æquatur quadrato b d: hoc est ipsius e f. Quoniam igitur contentum sub data, & b e, æquatur quadrato e f, igitur f applicatur sectioni rectanguli coni circa axem b e constitutæ. Rursus, quoniam sicut a b ad b e, ita b e ad b d, contentum igitur sub a b, b d, hoc est sub da-

ſub data; & b d æquat̃ quadrato e b, hoc eſt ipſius e f. Igit̃ f applicat̃ ſectioni rectã-guli coni circa axem b d conſtitutę. Erat etiam applicatum alteri datæ, circa b f conſtitutæ. igit̃ pũctum f datũ, et perpendiculares f d, f e. igitur pũcta d e data. Cõponetur aũt ſic, ſint duæ rectæ datæ angulũ rectũ ambientes a b, b c: & educantur ab ipſo b in infinitũ, et deſcribatur circa axem b c ſectio coni rectanguli. Rurſus circa axem d b deſcribatur ſectio rectãguli coni, ita ut ductæ poſſint iuxta ipſam a b, ſectiones ductæ ſe mutuò ſecabunt. ſecent ſe in puncto f,

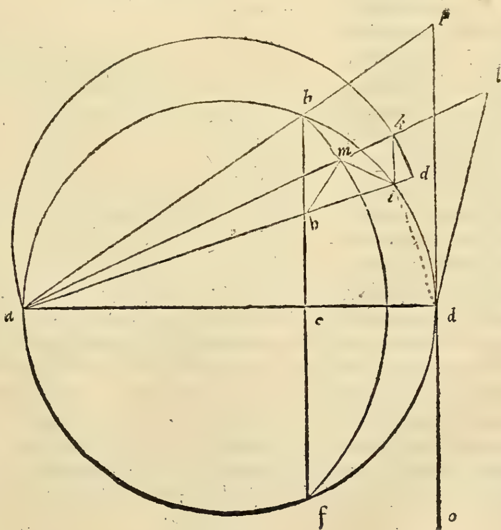


& ab ipſo f ducantur perpendiculares f d, f e. Quoniam igitur in ſectione rectanguli coni ducta eſt f e, hoc eſt d b, cõtentum ſub c b, b e erit æquale quadrato b d. Eſt igitur ſicut c b ad b d, ita b d ad b e. Rurſus quoniam f d ducta eſt in ſectione rectanguli coni, hoc eſt ipſa b e: contentum igitur ſub d b, b a, eſt æquale quadrato e b. Eſt igitur ſicut b d ad b e, ita b e ad b a. Verum ſicut d b ad b e, ita c b ad b d, eſt ſicut c b ad b d, ita b d ad b e, & e b ad b a, quod erat inueniendum.

Deſcripta eſt autem ſectio rectanguli coni cum diabeto, inuento à Mileſio mechanico Iſidoro magiſtro noſtro, cum ſit ab eo ſcriptum in Commentum camaricarum Heronis ſibi factum. Diabetum inſtrumentum eſt ſimile elemento græco λ.

INVENTIO ARCHITAE, QVEMADMODVM *Eudemus tradit.*

SVnto duæ rectæ datæ a d, c: quibus oporteat duas medias proportionales inuenire. Deſcribat̃ circa maiorem, puta a d, circulus a b d f, & applicetur a b ipſi c ęqualis, quę educta concurrat in puncto p, cum ea quæ contingit circulum in pũcto d. Ducatur autem b e f æquediſtans ipſi p d o, & intelligatur ſemicylindrus erectus ſuper a b d ſemicirculo, et ſuper a d ſemicirculus erectus in parallelogrã mo cylindri deſcriptus. Hic itaq; ſemicirculus circumductus,



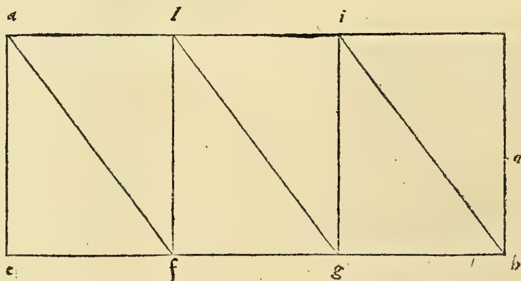
ab ipſo d in ipſum b, termino diametri a quieſcente, diuidet ſuperficiem cylindri-

cam in circumuolutione, et in ea deſcribet lineam quandam. Rurſus ſi quieſcente a d triangulus a p d citcumferatur contrario ſemicirculi motu, faciet ſuperficiē conicam. recta itaque a d circumuoluta concurrat cum linea cylindrica in quodam puncto, ſimul autem & ipſum b deſcribet ſemicirculum in ſuperficie coni. habeat iam poſitionem in loco cōcurſus linearum ſemicirculus motus, hanc puta d k a, & triangulus in contrariū motus habeat hanc d l a. punctum dicti concurſus eſto k. Eſt item ſemicirculus deſcriptus per b, iſte b m f: & eſto b f communis ſectio eius, & circuli b d f a, & ducatur ab ipſo k ad planum ſemicirculi b d a perpendicularis: cadet itaq; ipſa in circumferentia circuli, cum cylindrus ſit erectus. incidat, & ſit k i: & ducta ab i ad a, incidat in b f in puncto h, & ipſa a l incidat ſemicirculo b m f in puncto m. iungantur autem k d, m i, m h. quoniam igitur uterque ſemicirculorum d k a, b m f, eſt erectus ſuper ſubiectum planum, erit eorum communis ſectio m h, ad rectos angulos ſuper plano circuli. quare & ad ipſam b f erecta eſt ipſa m h. Igitur contentum ſub b h, h f, hoc eſt ſub h a, h i, eſt æquale quadrato m h. Igitur triangulus a m i, ſimilis eſt utriq; horum m i h, m a h: & angulus i m a rectus, item angulus d k a rectus: igitur k d, m i, ſunt æquediſtantes. & erit ſicut d a ad a k, hoc eſt k a ad a i, ita i a ad a m, propter triangulorum ſimilitudinem. Igitur quatuor hæ d a, a k, a i, a m, ſunt conſequenter proportionales: & a m eſt æqualis ipſi c, quia & ipſi a b. Duabus igitur rectis ad c datis, duæ a k, a i mediæ proportionales inuentæ ſunt.

MODVS ERATOSTHENIS.

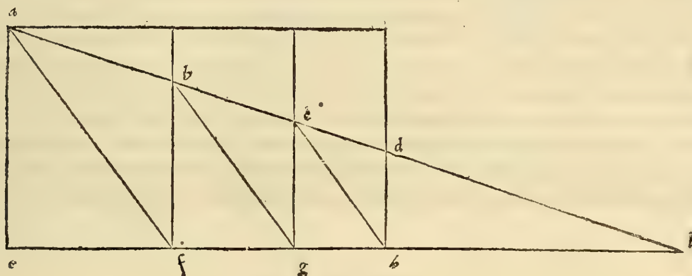
ce trad. est un ignorant il y a dans le grec σηκος. qui signifie templum delubrum vel etiam domus. loculamentum puis il y a une omission de la traduction de ces mots,

Regi Ptolemæo Eratoſthenes lætari. Vetuſtiſſimorū aiunt tragœdum quendam introduxiſſe Minoa, ſepulchrum Glauco extruentem. Cum autem audiſſet illud centum undiq; pedum ambitu claudi, dixiſſe, Paruum utiq;. inde ſubieciſſe, Regij ciron ſepulchri duplū eſto. Videbitur erraſſe. lateribus enim duplatis, planum fit quadruplum, et ſolidum octuplum. Quærebatur autem iam à Geometris, quonā pacto ſolidum datū ſub priſtina figura ad duplum augeri poſſet. et appellabāt hoc problema, cubi duplatio. Supponētes enim cubum, tentabant ipſum duplum reddere. Cunctis itaq; multo tem-



pore dubitantibus, Hippocrates Chius primus inſpexit, quod ſi duabus lineis rectis, quarum maior eſſet minoris dupla, duę mediæ proportionales inueniuntur, tunc duplare poſſe cubum. quare dubium eius in nō minus dubium uerſum eſt. Tempore aūt quodā pōſt ferunt Delios iuſſos per oraculum, duplare quandam aram, in hanc difficultatem incidiſſe. implorantes autem eos qui tunc apud Platonem erant in Academia Geometras, poſtulare, ut quæſitum ab eis inueniretur. Cum aūt illi diligenter ſibi ipſis inſiſterent, & ſcrutarentur, quo pacto duabus rectis datis duas medias proportionales inſtituerent, Archita Tarentinus fertur eas per ſemicylindros inueniſſe, Eudoxus autem per lineas quæ curuæ appellantur. Accidit autem omnibus his deſcripſiſſe demonſtratiuè, uerum non poſſe, quæ inuenerant, manu efficere, & in uſum deducere, præterquā in breuitate Menethmi:

mi: & hæc difficulter. Excogitata autem est à nobis quædam instrumenti structura facilis, per quam inuenire poterimus non solum duabus datis rectis duas medias, uerum quodcunque quis iusserit. quo inuento, poterimus uniuersaliter solidum quodcunque datum æquedistantibus lateribus contentum, in cubum reducere, aut ex altera in alteram figuram transformare, & similem ei facere, & ipsum augere retinendo similitudinem. quare & aras & templa poterimus, & humidorum & siccorum mensuras, puta medimnarũ metrum in cubum reuocare, & per huius latus dimetiri uasa horum receptiua, quantum capere possint. Vtile autem est excogitatum istud, his qui student impulsiua & expulsiua lapidum instrumẽta augere. nam oportet omnia illa proportionaliter augeri: & crassitudines, & magnitudines, & perforationes, & chienicidas, & neruos iniectos, si debeat & statuatur proportionaliter augeri. Hæc autem absque mediarum inuentione fieri non possunt. Demonstrationem autem & structuram dicti instrumenti tibi descri-



psi. Dentur itaque duæ rectæ a e, d h inæquales: quibus duas medias proportionales inuenire oporteat. & statuamus a e ad angulos rectos super aliquam rectam, puta e h: & super e h cõstituantur tria parallelogramma deinceps a f, f i, i h. & ducantur diametri in eis a f, l g, i h, quæ erunt æquedistantes. manente autem parallelogrammo medio f i, compellatur a f supra medium, & i h infra, ueluti in secunda figura, donec puncta a b c d fiant in una linea recta. & ducatur per puncta a b c d linea recta, quæ coincidat cũ e h, educta ad k. Erit itaque sicut a k ad k b, in parallelis a e, f b, ita e k ad k f. in parallelis autem a f b g, sicut f k ad k g. Sicut igitur a k ad k b, ita e k ad k f, & k f ad f g. Rursus quoniam b k ad k c in parallelis b f, c g, sicut f g ad k g: in parallelis autẽ b g, c h, sicut g k ad k h. Sicut ergo b k ad k c, ita f k ad k g, & g k ad k h. Verum sicut f k ad k g, ita e k ad k f. Igitur sicut e k ad k f, ita f k ad k g, & k g ad k h. Verum sicut e k ad k f, ita a e ad b f. Sicut autem f k ad k g, ita b f ad c g, & c g ad d h. Inuentæ igitur sunt duabus a e, d h, duæ mediæ b f, c g proportionales.

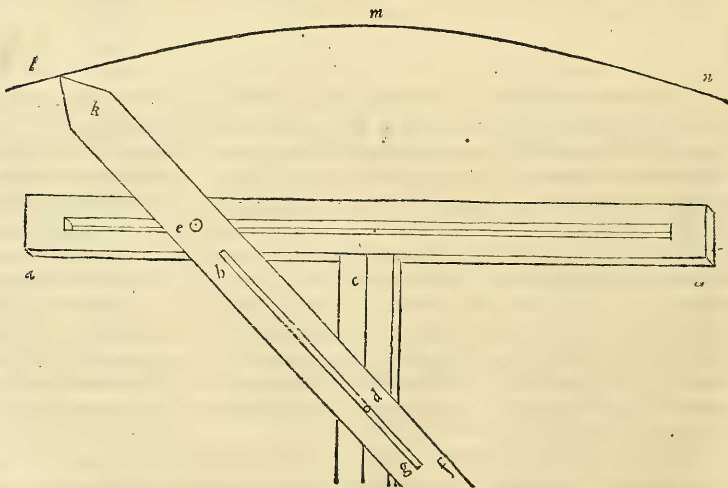
Hæc igitur in superficiebus Geometricis demonstrata sunt. Vt autem & instrumento possimus duas medias sumere, fabricetur plinthus ligneus, uel eburneus, uel æreus, habens tres tabellas æquales, & quàm leuissimas, quarum media cõfixa sit, reliquæ duæ pelli possint magnitudinibus & commensurationibus omnes sibiipsis consentiẽtes. Demõstratio autem similiter perficietur. Ad lineas uero certius sumendas, arte incumbendum est, ut inducta tabellarum omnia retineantur parallela, & non hiantia, et regulariter inuicem coaptata. In anathemate autem est instrumentum æreum, & aptatum est sub coronam ipsius colũ

næ,

næ adnexum plumbo, ſub ipſo eſt demonſtratio compendioſius expreſſa, & figura, poſt ipſum uero ſuperſcriptio epigramma. Hęc autem tibi ſcribuntur, ut habeas ea ſicut in anathemate habentur. Duarũ aũt figurarum ſecũda eſt in columna deſcripta: duabus rectis datis, duas medias proportionales in proportione continuã inuenire. Dentur duæ a e, d h. conduco itaq; tabellas in organo, donec pũcta a b c d ſint in recta una. intelligantur ſicut ſe habent in ſecunda figura. Eſt igitur ſicut a k ad k b, in parallelis a e, b f, ita e k ad k f. in ipſis uero a f b g, ita f k ad k g. igitur ſicut e k ad k f, ita k f ad k g. Sicut autem illę inter ſe, ita a e ad b f, & b f ad c g. Similiter autem oſtendemus, quod ſicut f b ad c g, ita c g ad d h. Igitur iſtæ a e, b f, c g, d h ſunt proportionales. Igitur duabus datis, duę mediæ inuentæ ſunt. Quod ſi datæ nõ ſint æquales ipſis a e d h, facientes illis proportionales has a e, d h, harũ medias ſumemus, & inducemus ad illas, & fecerimus illud quod imperatũ fuit. Si autem plures medias iubeamur inuenire, ubi tabellas cõſtituerimus in inſtrumento una plures, quàm ſint mediæ inueniendæ, idem conſequemur, & demonſtratio prorſus eſt eadem.

MODVS NICOMEDIS IN LIBRO *de lineis conchoidibus.*

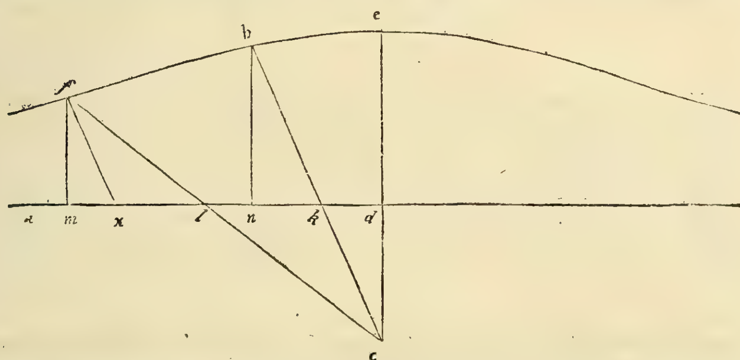
DEſcribit Nicomedes in lib. ſibi ſuperſcripto de Conchoidibus, talem inſtrumenti ſtructuram, quo eadem neceſſitas ſuppletur: in quo uir iſte uidetur ſupra modum gloriari, multumq; inuentis Eratoſthenis irridere, ueluti quæ fieri non poſſint, neq; imaginari, ac ſimul Geometrica doctrina priuata ſint. Hãc uero partim quòd explete quæ circa hoc problema elaborata ſunt, tradidit: partim, ut eius ad Eratoſthenem cõparatio haberi poſſit, inter iſta cõſcripſimus, quæ ſic ferè deſcribitur. Imaginari oportet regulas duas ad angulos rectos inuicem cõ-



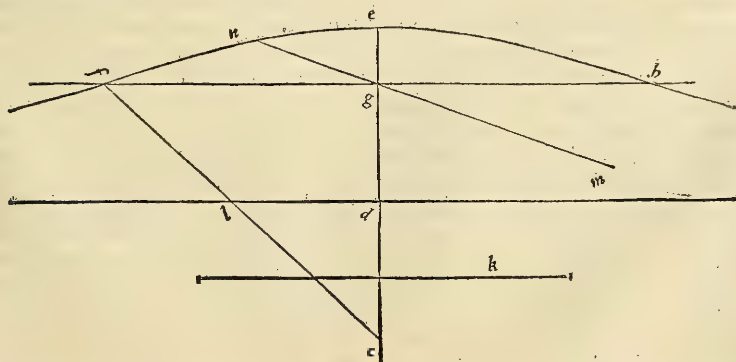
pactas, ita ut una ſit earum ſuperficies: ueluti ſunt a b, c d, & in a b aſſialem, in quem percurrere poſſit. in ipſa uero c d, ad partem d, ad rectam quæ diuidit latitudinem eius, cylindrulus configatur regulæ, & parum excedat ſuperficiẽ ſuperiorem regulæ. alterã item regulam, puta e f poſt breue quoddam interuallũ ad terminum f, inſecturam habentem, puta g h, quæ poſſit cylindrulo d inſerto circum

circumuerti.ad ipſum e uero quæ incumbat in axem confixum per-currenti in ſolmo aſſiali exiſtente in regula a b. inſita itaq; regula e f per inſecturã g h, in cylindrulo ad f ſtatuto, & per e in axe confixo ipſi chelonario, ſi quis comprendens k extremum regulæ ipſam mouerit in partes a, deinde in partes d, punctum e ſemper in regula a b continebitur. ac uero g h in ſectura mouebit, uerſus cylindrulum d, ſemper recta regulæ e f media in motu intellecta ſecũdum axem qui eſt ad cylindrum d, & ipſa c k ſupereminentia regulæ ſemper manente eadem. Si itaq; intelligamus ad k graphium quoddam attingens pauimentum, deſcribet quædã linea qualis eſt l m n, quã Nicomedes appellat conchilem primã lineam. & interuallum quidẽ eius lineæ eſt e k, magnitudo regulæ, polus uero d.

Hac itaq; linea contingit oſtendere eam perpetuò minus accedere ad a b regulam, & quod omnis recta inter regulam a b, & ipſam lineam ſecat ipſam lineam. Primũ quidem accidens facile comprehenditur in altera deſcriptione, intelligendo regulam a b polo c, interuallo d e, linea cõchili f e h. procedãt ab ipſo c duæ c h, c f, æqualibus uidelicet factis his k h, l f. Dico quod f m perpendicularis minor eſt perpendiculari h g. Cum enim angulus m l c, ſit maior angulo m k c, reliquus relictus in duos rectos, puta angulus m l f, reliquo m k h minor eſt. Propterea cũ an-



guli ad m, g ſint recti, angulus ad f maior eſt angulo ad h conſtituto. & ſi angulus m f x, fiat æqualis angulo ad h, ipſa k h, hoc eſt ipſa l f ad h g, eãdem habebit proportionem, quam x f ad f m. quare f l ad h g, habet minorẽ proportionem, quàm ad f m. quare h g maior eſt ipſa f m.



Secundum autem fuit, lineam rectam ductam inter a b & lineam ſecare ipſam

lineã. & hoc quoq; sic patebit. Ipsa enim ducta aut est æquedistãs ipsi a b, aut non. Esto prius æquedistãs, puta f g h: & fiat sicut d g ad g c, ita d e ad aliam quandã, puta k. & cẽtro c, interuallo k, circumferentia descripta secet f g, in puncto f, & iungatur c f. Est igitur sicut d g ad g c, ita l f ad f c, uerum sicut d g ad g c, ita erat d e ad k: hoc est ad ipsam c f. Igit̃ d e est æqualis ipsi l f, quod esse nõ potest, oporteret enim f esse ad lineam. At uero non sit ipsa ducta æquedistans, puta m g n, & ducatur per g æquedistans ipsi a b, puta f g. ipsa igitur f g concurret cum linea: quare multò magis ipsa m n. Cũ igitur hæc instrumento accidentia colligantur, eius ad propositum utilitas ita demonstrabitur.

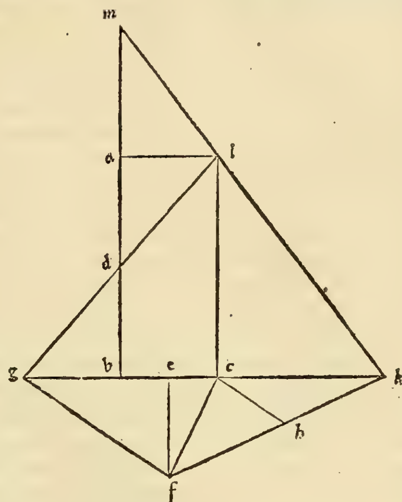
Rursus angulo a dato, & puncto extra c ducere c g, & facere eam ęqualem datæ. ducatur perpendicularis a puncto c ad ipsam a b, quæ sit c h. & educatur, & esto d h æqualis datæ, & polo c, interuallo d h dato. regula uero a b describatur

conchilis linea prima e d f. concurrit igitur ipsi a g, per prædemonstratum, cõcurrat in g, & iungatur c g. Igitur k g est æqualis datæ.

His demonstratis, dentur duæ rectæ c l, l a, ambientes angulum rectum, quibus oporteat duas medias continuè proportionales inuenire, & compleatur parallelogrammum a b c l, & diuidatur utraq; harum a b, b c in duo æqua punctis d, e. & iuncta d l educatur, & cõcurrat cum ipsa b c, educta in puncto g, & sit ipsi c b ad angulos rectos ipsa e f. & producatur ipsa c f, quæ sit æqualis ipsi a d, & iungatur ipsa f g, & ei ęquedistans ipsa c h, & angulo existente eo qui sub k c h a puncto f dato, deducatur ipsa f h k, faciens ipsam h k ad g k æqualem ipsi c f. Hoc autem quo modo fieri possit, ostensum est per lineam cõchilem, & ipsa k l iungatur, & educatur ut concurrat ipsi a b eductæ in pũcto m. Dico itaq;, quod est sicut c l ad k c, ita k c ad m a, & m a ad a l. Quoniam enim b c diuiditur in duo æqua puncto e, & additur ei k c: cõtentum ergo sub b k, k c, cum quadrato c e, æquatur quadrato e k, quadrato e f communi adiecto, contentum sub b k, k c, cum quadratis e c, e f, hoc est quadrato c f, æquatur quadratis k e, e f: hoc est quadrato k f. Et quoniam sicut m a ad a b, ita m l ad k l. Sicut autem m l ad k l, ita b c ad c k. igitur sicut m a ad a b, ita b c ad c k. & est a d dimidia ipsius a b, & c g est dupla ipsius b c. quoniam & l c, ipsius a d. Erit igitur sicut m a ad d a, ita g c ad k c. Verũ sicut g c ad c k, ita f h ad h k. cum g f, & c h sint æquedistantes. Igitur componenti sicut m d ad d a, ita f k ad k h. Supposita est autem ipsa d a æqualis ipsi h k, cum c f sit æqualis ipsi d a. Igitur ipsa m d æqualis est ipsi f k. quare quadratũ m d est æqua

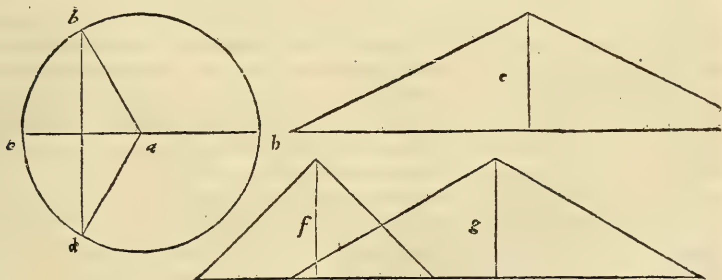
le

le quadrato f k. Est autem contentum sub b m, & m a, cum quadrato d a, æquale quadrato m d. quadrato autem f k ostensum est æquale esse contentum sub b k, k c, cum quadrato c f: quoniam quadratum a d, æquatur quadrato c f. nã ipsa a d supposita est æqualis esse ipsi c f. Igitur quod sub b m, m a æquatur contento sub b k, k c. Sicut ergo m b ad b k, ita k c ad a m. Verũ sicut b m ad b k, ita c l ad c k. Igitur sicut l c ad c k, ita c k ad a m. Est autem sicut l c ad c k, ita m a ad a l. Igitur sicut l c ad c k, ita c k ad a m, & a m ad a l, quod erat demonstrandũ. Duab. igitur rectis datis, duæ mediæ continuæ proportionales inuentæ sunt.



IN SECVNDVM THEOREMA.

ET componenti sicut ipsa d h ad h c, ita c a ad a e. hoc est quadratũ c b, ad quadratũ b e. Sicut enim in rationalis descriptione, quoniam in triangulo rectangulo c b a, ab angulo recto ad basem ducta est b e perpẽdicularis, distincti trianguli ad perpendicularẽ sunt inuicẽ similes, & toti, iccirco sicut c a ad a b, ita b a ad a e, & c b ad b e. quare sicut quadratũ c a ad quadratũ a b, ita quadratũ c b ad quadratum b e. Verum sicut quadratũ c a, ad quadratũ b a, ita ipsa c a ad ipsam a e. Sicut enim prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratum secundæ. Sicut ergo c a ad a e, ita quadratum c b ad quadratum b e. Eadem autem ratione ostenditur, quod sicut c a ad c e, ita quadratum a b, ad quadratum b e. Propter similitudinem enim triangulorum est rursus, sicut a c ad c b, ita b c ad c e: hoc est, sicut quadratum a c, ad quadratum c b, ita ipsa a c ad ipsam c e. Sicut autem quadratum a c ad quadratum c b, sic quadratum a b, ad quadratum b e. Igitur sicut a c ad c e, ita quadratum a b, ad quadratum b e. Postea deinceps tentãs ostendere conũ b k f,



æqualem esse portioni sphæræ b a f, exponens conũ n, qui basim habeat æqualem superficiei portionis, & altitudinẽ æqualem ei quæ ex centro sphæræ, dixit conũ n esse æqualem frusto f a b h solido, sicut ostensum fuit in primo libro. Verum sciendum est, in primo libro non esse ostensum tale frustum esse æquale cono taliter sumpto, sed illi qui esset compræhensus à coni superficie, & superficie sphærica minore hæmisphærio, quod proprie in Diffinitionib. uidebatur frustũ solidum appellare. Dixit enim: Frustum autẽ solidum uoco, cum sphærã conus secet, qui habeat uerticem ad sphæræ centrum, figuram compræhensam à superficie coni intra conum. Figura enim nunc proposita continetur à conica superficie, habente uerticem ad centrum sphæræ, & sphærica superficie, sed non à compræhensa intus à cono. Quod autem & talis figura sit æqualis cono habenti basim æqualem superficiei sphæricæ complectenti portionem, altitudinem uero æqualem ei quæ ex centro sphæræ, sic demonstrabitur per ea quæ in primo libro ostensa sunt. Intelligatur enim seorsum sphæra, & secetur plano quodam non per centrum circulo circa diametrum b d, centrum sphæræ a: & intelligatur conus basim habens circulum circa diametrum b d, uerticem punctum a. Exponatur item conus e: cuius basis, sit æqualis superficiei sphæræ, altitudo ea quæ ex sphæræ centro. Igitũ conus ille est æqualis ipsi sphæræ. nam quadruplus est coni basem habentis maximum in sphæra circulum, altitudinem uero eandem, cuius quidem sphæra est ostensa esse quadrupla. Exponantur item alij duo coni hi f g, quorum f basem habeat æqualem superficiei portionis b c d, altitudinem uero eam quæ ex centro sphæræ. g uero basem habeat æqualem superficiei portionis b h d, & altitudinem eandẽ. Conus igitur f est æqualis frusto cuius uertex est a, & superficies sphærica quę est secundum b c d. Quoniam igitur basis e est æqualis basibus conorum f g, & sunt in eadem altitudine: igitur e conus, hoc est ipsa sphæra, est æqualis conis f g. Verũ conus f ostensus est æqualis esse frusto, quod est secundum b c d solido, uerticem habenti a. Igitur reliquus g conus æqualis est reliquæ portioni, basem habenti superficiem quæ secundum b h d portionem, altitudinem uero eam quæ ex centro. Deinde rursus dixit, Aequalis est igitur conus n, hoc est frustum b h f d, figuræ b h f d. quoniam enim adductus est conus n æqualis cono cuius basis est circulus circa b f, diametrum & altitudo h k: conus autem cuius basis est eadem, altitudo uero e k, æqualis est cono dicto, & cono habenti basim eandem, altitudinem uero e h. Habent enim se ad inuicem, sicuti eorum altitudines: ablato communi cono, eo qui basim habet eandem, altitudinem uero e h, reliqua b h f k figura erit æqualis cono basem habenti circulum circa diametrum b f, altitudinem autem h k: hoc est cono n, hoc est b a h f frusto. Inducẽs itaque ex collectis corolariũ, perficit Theorema. Deinceps per alterã demõstrationem cõducit extremã partem theorematis, hoc est quod b a f portio sphæræ est æqualis cono b k f. & procedens dicit, Sicut ergo k h ad h c, ita h d ad d c, & tota k d ad d h, sicut d h ad d c. Quoniã enim sicut k h ad h c, ita h d ad d c: & permutatim, sicut k h ad h d, ita h c ad c d, & componenti. sicut k d ad h d, ita h d ad d c, hoc est k h ad h a. Erat enim sicut k h ad h c, ita h d ad d c. Est autem h c æqualis ipsi h a. Et parum pòst: Sicut ergo k h ad h d, ita a e ad e c. Sicut ergo quadratum k d ad contentum sub k h, h d: ita quadratũ a c, ad cõtentum sub a e, e c. Intelligantur enim seorsum positæ hæ k d, a c: & sit sicut k h ad h d, ita a e ad e c. Dico quod est sicut quadratum k d, ad cõtentum sub k h, h d, ita quadratum a c ad contentum sub a e, e c. Quoniã enim est sicut k h ad h d, ita a e ad e c. & componenti, sicut k d ad d h, ita a c ad c e. quare est quadratum k d ad



ad quadratum h d, ſicut quadratum a c, ad quadratum c e. Rurſus quoniam eſt ſicut k h ad h d, ita a e ad e c. Verum ſicut k h ad h d, ita contentum ſub k h, h d ad quadratum h d, ſumpta h d altitudine communi. Sicut autem d e ad e c, ita contentum ſub a e, e c, ad quadratum e c, ſumpta rurſus altitudine cōmuni e c. Sicut ergo contentum ſub k h, h d, ad quadratum h d, ſic contentum ſub a e, e c, ad quadratū e c. Oſtenſum eſt autem, ſicut quadratum h d, ad quadratum d k, ſic quadratum e c ad quadratum a c. Igitur per æquam, ſicut contentum ſub k h, h d, ad quadratum k d, ſic contentum ſub a e, e c ad quadratum a c: & econuerſo, quod erat demonſtrandum.

IN TERTIVM THEOREMA.

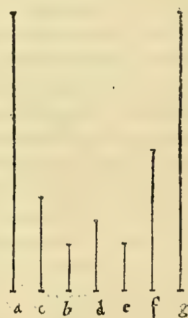
SIcut autem dicti circuli ad inuicem, ita quadratum a d, ad quadratum d b, hoc eſt ipſa a c ad ipſam c b. Sicut enim in ipſa rationalis deſcriptione, quoniā in triangulo rectangulo a d b ducta eſt perpendicularis, ab angulo recto d c media proportionalis, inter baſis partes & trianguli ad perpedicularem inuicē ſunt & toti ſimiles. quare ſicut b c ad c d, ita b d ad d a. igitur & earum quadrata. Verū ſicut quadratum b c, ad quadratum c d, ita prima b c ad tertiam c a. Sicut ergo b c ad c a, ita quadratum b d ad quadratū d a. Proportio autem a c ad c b eſt data, quare punctum c eſt datum. quoniam ſupponitur ſphæra, igitur diametros eius a b data, & proportio a c ad c b eſt data. Si magnitudo data in proportionē datam diuidatur, utraq; partium eſt data. quare ipſa a c data, & a datum. nam in communi ſectione lineis poſitione datis, datum eſt c punctum.

IN QVARTVM THEOREMA.

EAdē ratione qua ſuprà ex apparatu, ſicut l d ad d k, ita k b ad b r, & d q ad q b. in præcedenti enim collectū fuerat hoc modo: Quoniā eſt ſicut utraq; ſimul k d, d q ad d q, ita r q ad q b. & diuidenti, ſicut k d ad q d, ita r b ad b q: & permutatim, ſicut k d, hoc eſt k b ad b r, ita d q ad q b. Rurſus quoniam eſt ſicut l q ad q d, ita utraq; ſimul k b, b q ad q b. Diuidenti, & permutatim, ſicut l d ad d k, ita d q ad q b. Erat autem & ſicut d q ad q b, ita k b ad b r. Sicut ergo l d ad d k, ita d q ad q b, & k b ad b r. Tota igitur r l ad k l, ſicut k l ad l d. Sicut enim unum ad unum, ita antecedentia omnia ſimul, ad ſequentia ſimul omnia. Sicut ergo r l ad l d, ita quadratum r l ad quadratum l k. Quoniam enim eſt ſicut r l ad l k, ita k l ad l d. Sicut igitur prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad ſecundæ quadratum. Eſt igitur ſicut r l ad l d, ita quadratum r l ad quadratum l k. Verum ſicut quadratum r l ad quadratum l k, ita quadratum l k ad quadratum l d. Sunt enim proportionales. Sicut ergo r l ad l d, ita quadratum l k ad quadratum l d. ponatur b f æqualis ipſi k b. Quod enim extra r cadet, manifeſtū eſt. Quoniam ſicut d q ad q b, ita k b ad b r. Eſt aūt d q maior ipſa q b. igit̄ ipſa k b maior eſt ipſa b r. igitur f extra r cadet.

Quoniam autem proportio d l ad l q, & ipſius r l ad l q, & ipſius r l ad l d proportio data. Quoniam enim ſicut utraq; ſimul k b, b q ad b q, hoc eſt f q ad q b, ita l q ad q d: euertenti, ſicut q f ad f b, ita q l ad l d. Et econuerſo, ſicut b f ad f, ita l d ad l q. Proportio autem b f ad f eſt data, quoniam ipſa f b æqualis eſt ei quæ ex centro ſphæræ datæ. ipſa uero b q terminis eius b q datis, per ſuppoſitionē ſphæra diuiſa à plano per a c ducto, & ipſa d b ad angulos rectos ipſi a c exiſtēte. Data eſt & idcirco tota q f, & proportio q f ad f b data, quare & proportio d l ad l q data. Rurſus quoniam proportio portionum eſt data, erit coni l a c, ad conum a r c proportio data. quare & proportio l q ad q r data. nam ſe habent inuicem, ſicut eorum altitudines. Totius ergo r l ad l q proportio eſt data. Quoniam igitur utriuſq; harū r l, l d ad l q eſt proportio data, erit r l ad l d proportio data. nam quæ habent ad idem proportionem datam, habēt quoque inter ſe proportionem datam. Quoniā igitur proportio r l ad l q coniungitur, ex proportione r l ad l d, & l d ad l q. quod quidem cōpoſitio proportionū ſumatur, ſumpta media l d, ueluti & in Stoichioſi

ſumebatur, conſtat. Quoniam autem indearticulatè quodammodo, & non ita ut mentem expleat dictum eſt, uti comprærhendi poteſt his qui in Pappum & Theonem & Archadium inciderunt, in multis compoſitionibus non demonſtratiuè, ſed inductione hoc dictum conſtituunt. Nullum igitur inconueniens, ſi perpaululum in ratione uerſati hoc ipſum manifeſtius fecerimus. Dico igitur, quod ſi ſumantur duo numeri, uel duæ magnitudines, quibus aliquis medius terminus cõſtituatur, proportio prius ſumptorum numerorum, uel magnitudinum componitur ex proportione primi ad medium, & medij ad tertium proportione. Cõmemorandum tamẽ prius, quomodo proportio dicatur ex proportionibus componi. Sicut enim in libro Elementorum, quando quantitates proportionum in ſeipſas multiplicatę faciant quandam quantitatem, quãtitate uidelicet dicta, ſecũdum eũ numerũ quo & denominatur proportio data, uti dicunt alij, & Nicomachus in primo de Muſica, & Heronas in Commentario in Arithmeticam introductionem. Idem autem eſt, ac ſi dicatur eodem numero multiplicato in terminum ſequentem proportionis produci antecedentem, & proprie magis in multiplicibus ſumetur quantitas. In ſuperparticularibus autem & ſuperpartientibus non iam quãtitatem ſumi datur, cum ſit unitas indiuiſibilis. Quare in illis unitas eſt diuidenda. quanquã hoc minimè cõueniat Arithmeticæ, ſed ratiocinatiuæ, & computatiuæ attribuatur. Diuiditur autem unitas in partem, aut partes, à quibus proportio denominabitur: quemadmodum fit, ut apertius dicatur, ſeſquialteræ quantitas ad unitatem addit unitatis dimidium, & ſeſquitertiæ ad unitatem tertiam. Quare ſicuti ſuprà dictum eſt, conſtat proportionis quantitatem in terminũ ſequentem multiplicatã producere antecedentẽ. Nouem enim ad ſex cum ſit proportio ſeſquialtera, cuius quãtitas eſt unitas & dimidium, hæc multiplicata in ſenarium, producit nouenariũ. & in alijs quoq; licet hoc inſpicere. His autem ita declaratis, redeundum eſt ad propoſitum. Sunto igitur duo dati numeri a b. ſumatur medius inter eos c, oſtendẽdum quod proportio a ad b componitur ex proportione a ad c, & proportione c ad b. Sumatur enim quantitas a ad c, quæ ſit d, & eius quæ eſt c ad b ſit e. igitur c multiplicans d, producit a: et ipſe b multiplicans e producit c. ipſe uero d multiplicans e producat f. Dico quod f eſt quantitas proportionis a ad b: id eſt f multiplicans b producit a. nam b multiplicans f, faciat g. Quoniam igitur b multiplicans f facit g, & multiplicans e producit c: erit ſicut f ad e, ita g ad c. Rurſus quoniã d multiplicans e facit f, & multiplicans c facit a: erit ſicut e ad c, ita f ad a. Igitur permutatim, ſicut e ad f, ita c ad a: & econuerſo ſicut f ad e, ita a ad c. Verum ſicut f ad e oſtenſum eſt eſſe, ita g ad c. Igitur ſicut g ad c, ita a ad c. quare a eſt æquale ipſi g. Verum b multiplicans f producit g, igitur b multiplicans f producit a.



quare erit f quãtitas proportionis a ad b. Et eſt f productus ex d in e multiplicato, hoc eſt ex quantitate proportionis a ad c, in quantitatem proportionis c ad b. Igitur proportio a ad b componitur ex proportione a ad c, & ex proportione c ad b. Quod erat demonſtrandum. Vt autem exemplo quoq; hoc quod dictum eſt fiat manifeſtum, incidat inter duodenum & binũ medius quaternus. Dico itaq;, quod duodecim ad duo proportio eſt compoſita ex proportione duodecim ad quatuor, & quatuor ad duo. Id eſt proportio ſextupla componitur ex tripla, duodecim ad quatuor, & dupla quatuor ad duo. Si enim quantitates proportionum inuicem multiplicemus, hoc eſt tria in duo, fient ſex, qui eſt quantitas duodecim

ad

ad duo proportionis quæ est sextupla, quod propositum fuerat declarare. Si autē qui incidit non fuerit maior minore, & minor maiore, sed aut econuerso, aut maior aut minor utroq;, & hoc modo prædicta compositio consequetur. Nam inter nouem & sex cadat medius duodecim, utroq; illorum maior. Dico igitur quod ex subsesquitertia, quæ est nouem ad duodecim proportione, & ex dupla quæ est duodecim ad sex, componitur sesquialtera, quę est nouem ad sex. Quantitas enim quæ est nouem, ad duodecim est tres quartæ, hoc est dimidium & quarta. Quātitas autem quæ est duodecim ad sex, est binarius. Si igitur multiplicauerimus binarium in dimidium & quartam, fit unitas & dimidium, quæ quantitas est sesquialterę proportionis, quam habent nouem ad sex. Similiter autem si inter nouē & sex quatuor medius incidat, ex dupla sesquiquarta & subsesquialtera componitur sesquialtera. Rursus enim quantitatem duplæ sesquiquartæ, quæ est nouem, ad quatuor multiplicemus, in quantitatem subsesquialteræ, quæ est duæ tertiæ, & habebimus unum & dimidium, quod est quantitas sesquialteræ, ut dictum est, & similiter in omnibus eadem ratio accommodatur. Constat autem ex dictis, quod si duorum numerorum datorū aut magnitudinum non fuerit unus medius, sed plures medij termini sumantur, extremorum proportio componitur ex omnium intermediorum proportionibus, incipiendo à primo, & procedendo ad ultimum, secundum ordinem se sequentium. Duobus enim terminis a b incidant plures uno c d. Dico quod proportio a ad b cōponitur ex proportione a ad c, & c ad d, & d ad b. Quoniam enim a ad b componitur ex a ad d, & d ad b, uti dictum est suprà: & a ad d componitur ex a ad c, & c ad d. Igitur a ad b, proportio componitur ex ea quæ est a ad c, c ad d, d ad b. Similiter autem & in reliquis ostendetur.



Item in rationali dixit: Verū sicut r l ad l d ostēsum est, ita esse quadratum b d ad quadratū d q. Quoniam enim ostensum est, sicut r l ad l d, ita quadratum l k ad quadratum l d. Sicut autem quadratum l k ad quadratum d l, sic quadratum b d ad quadratum b q. Ostensum est enim, sicut k l ad l d, ita b d ad d q, propter compositionem. Igitur sicut r l ad l d, ita quadratum b d ad quadratum d q. Fiat autem sicut r l ad l q, ita b f ad f h, utcunq; punctum h ceciderit, quomodocunq; quidem si positum sit, quantum ad consequentiam demonstrationis nullum affert rationi impedimentum. Quod autem si quemadmodum in descriptione fit ponatur, semper cadet inter b r, sic declaratur. Quoniam enim sicut l k ad d k, hoc est ad k b, ita k r ad r b. Sicut ergo unum ad unū, ita omnia ad omnia: sicut r l ad r k, ita k b ad r b. Maiorem autem proportionem habet r l ad r q, quàm r l ad r h. igitur l r ad r q maiorem habet proportionem, quàm k b ad b r, hoc est f b ad b r. Euertēti r l ad l q, minorem habet proportionem, quàm b f ad f r. Si enim fecerimus sicut r l ad l q, ita b f ad quandam aliam maiorem f r, manifestū inde est quod f h maior est ipsa h b. Quoniā enim ostensum est, sicut l d ad d k, ita d q ad q b, & k b ad b r. Est autem d q maior ipsa q b. igitur l d maior est ipsa d k, & k b ipsa b r, quare & l d ipsa b r. Tota igitur l q maior est ipsa q r. quare & h f maior ipsa h b.

Reliquum igitur est, sicut quadratum b d, quod est datum, ad quadratum d q, ita f q ad f h. Quoniam enim portioni b f ad f h ostensum est eandem proportionem componi ex proportione quadrati b d ad quadratum d q, & ipsius b f ad f q. Eadem uero ei quæ est b f ad f h est, & composita ex proportione b f ad f q, & ex q f ad f h. Composita igitur ex proportione quadrati b d ad quadratum d q, & ex b f ad f q, est eadem proportioni compositæ ex b f ad f q, & ex q f ad f h. Si igi

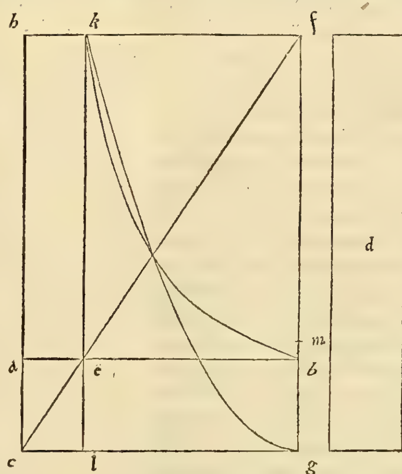
tur

tur communem in ambabus proportionem b f ad f q auferamus, reliqua quadrati b d ad quadratum d q proportio eadem est ei quæ est q f ad f h. & est datū d f diuidere puncto q, & facere sicut q f ad datam, hoc est ad f h, sic datum, hoc est quadratum b d ad quadratum d q. Hoc autem sic simpliciter dictum, habet determinationem, adhibitis quæ istic habentur problematis: hoc est, ipsam d b duplam esse ipsius b f, & ipsam b f maiorem esse ipsa f h. Quātum autem ad resolutionem, nō habet determinationem, & est problema tale.

Duabus rectis datis d b, b f, & ipsa d b dupla ipsius b f, & puncto h sumpto, in b f diuidere ipsam d b puncto q, & facere sicut quadratum d b ad quadratum d q, ita q f ad f h. Vtraq; enim hæc in fine resoluentur, & componentur. In fine quidē antedictum pollicebatur se ostensurū, in nullis autem scriptis hoc promissum inueniri potest. Nihil etiam inuenimus Dionysodorū, ne quidpiam quidem horū attigisse, uerum putare fieri non posse, ut in limma assumptum perueniatur, atq; idcirco alteram totius problematis uiam ingressum esse, quam deinceps conscribemus. Diocles quidem & ipse in libro de Pirijs confecto ab ipso, pollicitum fuisse existimans Archimedem non fecisse pollicitationē, & ipse perficere aggressus est, & eius epicherima deinceps describemus. nam & ipsum nullum habet ad assumptā rationem. Similiter autem euenit Dionysodoro, qui alia demonstratione construit problema. In quodam utiq; uetusto libro (non enim à multorum abstinuimus inquisitione) incidimus in Theoremata scripta, quæ quidem ex ptesmatibus obscuritate magna tenebantur: in figuratione errore multiplici constituta, quæsitorum quidem habebant suppositionem, in parte autem gratam Archimedi linguam doricam seruabant, & consuetis Archeo rerum nominibus erant inscripta, ubi parabole sectio rectanguli coni nominata est, & hyperbole sectio coni ambligonij, ita ut ex ipsis intelligatur. Non igitur ipse fuerit, qui quæ in fine promissa sunt, describi sit prosecutus. Vnde studiosius incumbentes, ipsum quidem rationale, uti scriptum fuit, propter errorum multitudinem, ut suprà dictum fuit, difficile inuenientes, ipsam ferè mentem denudantes, communius & apertius quantum fieri potuit dictio, conscripsimus. Vniuersaliter autem primū Theorema scribetur, ut quod de eo dictū est, declaretū circa diffinitiones. Deinde & his quæ in problemate resoluta sunt, accommodabuntur.

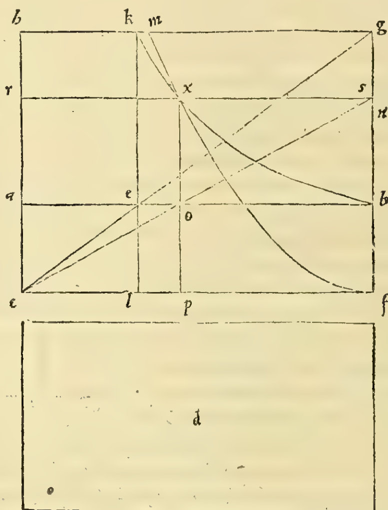
Recta data a b, item altera a c, & spacio d, proponatur in a b sumendum punctum, puta e, ita ut sit sicut a e ad a c, ita spacium d ad quadratum e b. Factum sit, & ponatur a c ipsi a b ad angulos rectos, & iuncta c e producatū in f, et ducatur per c æquedistans ipsi a b, ipsa c g, & per b ducatur æquedistans ipsi a c ipsa f b g, cōcurrens cum utraque harum c e, c g, & compleatur g h parallelogrammum. Et per e ducatur k e l, æquedistans utriuis harū c h, g f. Et sit contentum sub c g, g m æquale ipsi d. Quoniam igitur sicut e a ad a c, ita d ad quadratum e b. Sicut autē e a ad a c, ita c g ad g f. Sicut autem c g ad g f, ita quadratum c g ad contentum sub c g, g f. Igitur sicut quadratum c g ad contentum sub c g, g f, ita d ad quadratum e b, hoc est ad quadratum k f. & permutatim. sicut quadratum c g ad d, hoc est ad contentum sub c g, g m, ita contentum sub c g, g f ad quadratum f k. Verum sicut quadratū c g ad contentū sub c g, g m, ita c g ad g m. Igitur sicut c g ad g m, ita contentum sub c g, g f ad quadratū f k. Verum sicut e g ad g m, ipsa f g sumpta cōmuni altitudine, ita contentū sub c g, g f, ad contentū sub m g, g f. Sicut igitū contentū sub c g, g f ad contentū sub m g, g f, ita contentū sub c g, g f ad quadratum f k. Igitur quadratū f k, est æquale contento sub m g, g f. Si igitur circa axem f g describatur parabole per g, ita ut ductæ æquedistantes ipsi c g possint secundum g m, ipsa ibit per k: & erit positione data, cum g m sit data magnitudine, quæ cum g c data continet datum d. Igitur punctum k aptatur positione datæ parabolæ. Describatur igitur uti dictum est, & esto sicuti g k. Quoniam rursus spacium h l, æquatur

tur ſpacio c b: hoc eſt contentum ſub h k, k l, contento ſub a b, b g. Si per b circa inconcurrentes has h c, c g deſcribatur hyperbole, tranſibit per k ex conuerſo octaui theorematis libri ſecundi Elementorum conorum Apollonij: & erit poſitione data, cum utraq; harũ h c, c g ſit data. amplius quidem, & b poſitione datũ eſt. Deſcribatur ut dictum eſt, & eſto ſicut b k. Igitũ k aptatur hyperbolę poſitione datę. Item aptatum eſt parabolæ, poſitione datæ. igitur k datum eſt, & eſt perpendicularis ab ipſo k e ad datam poſitione a b. Igitur e datum. Quoniam igitur ſicut e a ad datam ipſam a c, ita d datum ad quadratum e b. Duorũ igitur ſolidorum, quorũ baſes hæ, quadratũ e b, & d: altitudines uero hæ e a, a c, mutua proportione habent baſes cum altitudinibus. quare ſolida æqualia ſunt. Igitur quadratũ e b ſuper ipſam e a, eſt æquale d dato ſuper ipſam c a. Verum quadratum b e, ſuper ipſam e a, eſt maximum omnium ſimiliter ſumptorum in ipſa b a. quando ipſa b e eſt dupla ipſi e a, uti demonſtrabitur. Oportet igitur datum ſuper datam non maius eſſe quadrato b e ſuper ipſam e a.



Componetur autem ſic. Eſto data recta a b, & alia item data a c. & ſpacium datum d, & opus ſit ſecare ipſam a b, ita ut ſicut una pars habeat ad datam a c, ita datum ſpacium d ad quadratum reliquæ partis. Sumatur ipſius a b tertia pars a e. Igitur d ſuper ipſam a c, aut maius eſt quadrato b e ſuper ipſam e a, aut æquale ei, aut minus eo. Siquidem igitur maius eſt, non componetur, ut in reſolutione oſtenſum eſt. Si autem æquale punctum e, efficiet problema. nam ubi ſolida ſunt æqualia, baſes altitudinibus habent mutuæ: & erit ſicut e a ad a c, ita d ad quadratum b e. Si autem minus eſt d ſuper a c, quadrato b e, ſuper e a componetur, hoc pacto. Statuatur a c ad angulos rectos ad ipſam a b, & ducatur per c æquediſtans ipſi a b ipſa c g. Et per b ducatur b f æquediſtans ipſi a c, educatũ ad g, & compleatur parallelogrammum f h, & per e ducatur k e l æquediſtans ipſi f g. Quoniam igitur d ſuper ipſam a c minus eſt quadrato e b ſuper ipſam e a: erit ſicut e a ad a c, ita d ad minus quidpiam quadrato e b, hoc eſt quadrato g k. Eſto igitur ſicut e a ad a c, ita d ad quadratum g m, & ipſi d ſit æquale contentum ſub c f, f n. Quoniam igitur ſicut e a ad a c, ita d, hoc eſt contentum ſub c f, f n ad quadratum g m. Verum ſicut e a ad a c, ita c f ad f g. Sicut autem c f ad f g, ita quadratum c f ad contentum ſub c f, f g. Ergo quadratum c f, ad contentum ſub c f, f g, ita contentum ſub c f, f n ad quadratum g m: & permutatim, ſicut quadratum c f ad contentum ſub c f, f n, ita contentum ſub c f, f g, ad quadratum g m. Verum ſicut quadratum c f ad contentum ſub c f, f n, ita c f ad f n. Sicut autem c f ad f n, f g communi altitudine ſumpta, ita contentum ſub c f, f g, ad contentum ſub n f, f g. Sicut igitur contentum ſub c f, f g, ad contentum ſub n f, f g, ita contentum ſub c f, f g ad quadratum m g. Igitur quadratum g m æquatur contento ſub g f, f n. Si igitur per f circa axem f g deſcribamus parabolam, ita ut ductæ poſſint iuxta ipſam f n tranſibit per m, deſcripta ſit, & eſto puta m x f. Et quoni-

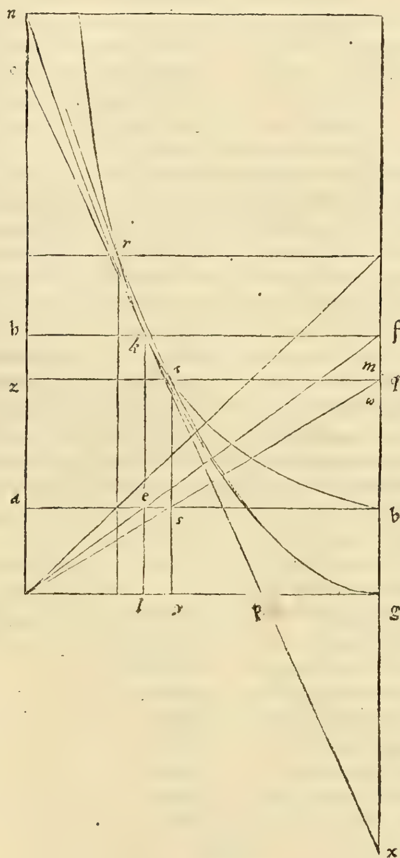
am h l æquatur ipſi a f, hoc eſt contentum ſub h k, k l, contento ſub a b, b f: ſi per b circa incoincidentes h c, c f deſcripſerimus hyperbolem, ipſa tranſibit per k, per conuerſionem octaui theorematis ſecundi Elementorum conicorum Apollonij. Deſcribatur, & eſto puta b k ſecans parabolem puncto x, & ab ipſo x ducatur x o p perpendicularis ad a b, & per x ducatur æquediſtãs ipſi a b, ipſa r x ſ. quoniã itaq; b x k eſt hyperbole, & ipſe h c, c f incoincidentes, & ductæ æquediſtantes r x, x p ipſis a b, b f: contentum ſub r x p eſt æquale cõtento ſub a b, b f. quare r o eſt æquale o f. Si igit̃ ab ipſo c iungatur ad s recta, tranſibit per o. peruenerit, & eſto c o ſ. Quoniam igitur ſicut o a ad a c, ita o b ad b ſ: hoc eſt c f ad f ſ. Sicut autem c f ad f ſ, ita f n cõmuni altitudine ſumpta contentum ſub c f, f n, ad contentum ſub f ſ, f n. Igitur ſicut o a ad a c, ita contentum ſub c f, f n ad contentum ſub ſ f, f n. Sed contentum ſub c f, f n eſt æquale ſpacio d, & cõtento ſub ſ f, f n æquatur quadratum ſ x, hoc eſt quadratum b o, propter parabolam. Vt igit̃ o a ad a c, ita ſpacium d ad quadratum b o. Sumptum eſt igitur punctum o, quò problema perficitur.



Quod autem ipſa b e exiſtẽte dupla ipſius a e, quadratum b e ſuper ipſam e a maximũ ſit omniũ ſimiliũ ſumptorũ ſuper ipſam b a, hoc pacto demonſtrabitur. Eſto enim ſicut in reſolutione rurſus recta data ad angulos rectos ipſa a c ipſi a b, & iuncta c e educatur, & concurrat lineæ æquediſtanti ductæ per b ipſi a c in pũcto f: & per puncta c, f ducantur h f, c g, æquediſtãtes ipſi a b: & producatur c a ad h, & huic ducatur æquediſtans k e l per punctum e, & fiat ſicut e a ad a c, ita contentum ſub c g, g m ad quadratum e b. Igitur quadratum e b ſuper ipſam e a erit æquale contento ſub c g, g m ſuper ipſam a c, eo quod duorum ſolidorum baſes altitudinibus mutuò afficiũtur. Dico igitur, contentum ſub c g, g m ſuper ipſam a c maximũ eſſe omnium ſimilium ſuper ipſam b a ſumptorũ. Deſcribatur enim per g, circa axem f g parabole, ita ut ductæ poſſint iuxta ipſam g m, ipſa tranſibit per k, ſicut in reſolutione oſtenſum eſt, & ipſa educta concurret ipſi h c æquediſtanti diametro ſectionis ex uigeſimoſeptimo theoremate primi libri Apollonij Elementorũ conicorũ. Educatur itaq;, & concurrat in puncto n, & per b circa incoincidentes has n c, c g deſcribatur hyperbole, quæ trãſibit per k, ſicuti in reſolutione dictum eſt. Peruenerit igitur, puta b k, & ipſi f g productæ ponatur g x æqualis, & iungatur x k, & producatur in o. Conſtat igitur, quod cõtingit parabolam ex conuerſione trigeſimi quarti theorematis primi libri Elementorum conicorum Apollonij: quoniam b e dupla eſt ipſius e a. ſic enim ſuppoſitum eſt: hoc eſt ipſa k f ipſius k h, & triangulus o h k ſimilis eſt triangulo x f k, & ipſa x k dupla erit ipſius k o, & eſt ipſa x k dupla ipſius k p: quia ipſa x f dupla ipſius x g. & quia

p g

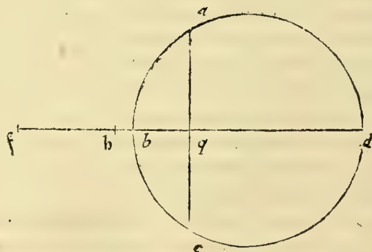
p g est æquedistans ipsi k f, igitur o k est æqualis ipsi k p. Igitur o k p contingens hyperbolem, & coniuncta & collibrata cum incoincidentibus in duo æqua diuiditur. applicatur igitur ipsi hyperbolæ, per conuersionẽ tertij theorematis secundi libri Elementorum conicorũ Appollonij. Applicabatur autem & ipsi parabolæ secundum idem k. Igitur parabola applicatur ipsi hyperbolæ in pũcto k. Intelligatur igitur & hyperbole producta, puta ad r, & sumatur in a b quodlibet punctum f, & ducatur per f ipsa τ f y æquedistans ipsi k l, & concurrat cum hyperbole in pũcto τ, & ducatur per τ ipsa z τ q æquedistans ipsi c g. propter hyperbolen igitur & incoincidẽtes, erit z y æquale ipsi c b: ablato c f communi, fit z f æquale f g: & idcirco recta ab ipso c ad q producta permeabit per f. permearit, & sit puta c f q: & quoniam quadratum u q est æquale contento sub q g, g m propter parabolen: quadratum t q minus est contento sub q g, g m. Fiat igitur quadrato t q æquale cõtentum sub c g, g ω. Quoniã igitur est sicut s a ad a c, ita c g ad g q. Item sicut c g ad g q, ipsa g ω cõmuni altitudine sumpta, ita cõtentũ sub c g, g ω ad cõtentum sub q g, g ω: & ad ęquale illi quadratum q t, hoc est ipsius b f. Cõtentum ergo sub q g, g ω super ipsam f a, est æquale contento sub c g, g ω super ipsam c a. Cõtentum uero sub c g, g ω super ipsam c a, minus est contento sub c g, g m super ipsam c a. Quadratum igitur b f super ipsam f a, minus est quadrato b e super ipsam e a. Similiter autem ostendetur in omnibus punctis sumptis inter puncta, e, a. Verum sumatur inter puncta e b punctum s. Dico quod & hoc modo quadratũ b e super ipsam e a, maius est quadrato b s, super ipsam s a. Eisdem enim præparatis, ducatur per s ipsa s r æquedistãs ipsi k l, & concurrat cum hyperbole in R. concurrit enim ei propterea, quod æquedistans est incoincidenti: & ipsa r b ducta æquedistans ipsi a b per r cõcurrat ipsi f g eductæ in pũcto b. & quoniã rursus proptet hyperbolem ipsum c h est æquale ipsi a g, recta ab ipso c ad b iuncta permeabit per s. Permearit, et sit puta c s, b. Et quoniã rursus propter parobolen quadratũ a b æquatur cõtento sub b g, g m: erit quadratum r b minus contento sub b g, g m. Fiat contentum sub b g,



g ω æquale quadrato r b. Quoniã igitur est sicut s a ad a c, ita c g ad g b. Verum sicut c g ad g b, ita communi g ω altitudine sumpta, contentum sub c g, g ω ad contentum sub b g, g ω, hoc est ad quadratum r b, hoc est ad quadratũ b s. Igitur quadratum b s super ipsam s a, æquatur contento sub c g, g ω super ipsam c a, & contentum sub c g, g m maius contento sub c g, g ω. Igitur quadratum b e super e a maius est quadrato b s super s a. Similiter autem ostendetur in omnibus punctis inter e b puncta sumptis. Ostensum est autem & in omnibus sumptis inter e a, & in omnibus sumptis inter e b. Omnium igitur in ipsa a b similiter sumptorum maximum est quadratum b e, super ipsam e a, quando ipsa b e dupla sit ipsius e a.

Cognoscere aũt est opus, & ea quæ sequuntur secundum dictam descriptionem. Quoniam enim ostensum fuit quadratum b f super f a, & quadratum b s super s a, minus esse quadrato b e super e a, fieri potest, ut spacio dato, quod sit super datam minus quadrato b e super e a, per duo puncta diuisa ipsa a b, problema fiat ex principio. Hoc autem fiet, si intellexerimus circa diametrum q g descriptã parabolam, ita ut deductæ possint iuxta ipsam g ω. talis enim parabola transit omnino per r. & quoniam necessariò ipsam incidit in c n æquedistãtem diametro, constat quod secat hyperbolen in alio puncto superiore ipso k, sicuti istic in τ, & perpendicularis ducta ab ipso r ad ipsam a b, uti istic r s secat ipsam a b puncto s, ita ut punctum s faciat problema, & fiat quadratum b s super s a æquale quadrato b s super s a ueluti ex prædictis demonstrationibus patet. Quare cũ duo puncta possint in ipsa b a sumi quibus perficeretur quæsitũ, licet utrum libuerit cuiq; accipere, aut punctum inter e b, aut quod sit inter e a. Siquidem enim quod inter e b, ut dictum est, parabola descripta per puncta g t in duobus punctis secante hyperbolen, id quod propinquius fuerit ipsi g, hoc est axi parabolæ, inueniet id quod est inter e b: ueluti istic r inuenit s. id quod remotius est, inuenit id quod est inter e a, ueluti istic ipsum t inuenit ipsum f.

Vniuersaliter quidem igitur sic resolutum est, & compositum problema. Vt autem & uerbis Archimedis accommodetur, intelligatur ut in ipsa determinati descriptione diametros sphæræ ista d b, & quæ ex centro ista b f, & data f h. Descendimus igitur in hoc, dixit, Secare ipsam d f secundum q, hoc pacto, ut sicut q f ad datam, ita datum ad quadratum q d. Hoc autem simpliciter dictum, habet determinationem. Si enim datum super datam maius fuerit quadrato d b super b f, tunc fieri nõ potest problema, uti ostensum est. Si autem æquale punctum b faciebat problema, & hoc modo nihil pertinebat ad Archimedis ex principio propositionem. Sphæra enim hoc modo non diuideretur in proportionem datam. Simpliciter enim dictam habebat determinationem. Additis autem his problematibus istic existentibus, scilicet duplam esse ipsam d b ipsius b f, & hoc, ipsam b f maiorem esse ipsa f h, non habet amplius determinationem. nam quadratum d b datum, super f h datam, minus est quadrato d b super b f, quia b f maior est ipsa f h. quod cum esset, ostendimus tunc posse problema, & inde tunc prouenire. Animaduertendum est autem, & hæc quæ ab Archimede dicta sunt, consonare his quæ nos resoluimus. Primum quidem post suam resolutionẽ uniuersaliter id in quod incidit proferens, dixit, Oportet datam d f secare, & facere sicut q f



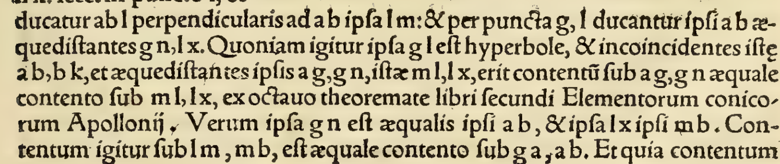
ad

ad datam, ita datum ad quadratum d q. Deinde dicens tanquam uniuersaliter dictum habeat determinationem: adiectis autem problematibus ab eo inuentis, hoc est ipsam d b duplam esse ipsius b f, & ipsam b f maiorem ipsa f h, non amplius habet determinationem magis particularẽ. Resumit problema, & dicit, quod est tale problema hoc: Duabus rectis datis his d b, b f, & ipsa d b dupla ipsius b f, & puncto in b f ipso h, secare ipsam d b pũcto q, non iam sicut prius ipsam d f dicens, sed d b oportere diuidi, propter id quod nos suprà demonstrauimus, quod ipse inspiciebat duo puncta sumpta esse in d f, quæ facerent problema: unum quidem inter d b, alterum uero inter b f, quorum quod est inter d b ad propositionem ex principio pertinebat.

Hæc igitur consentanea uerbis Archimedis, prout potuimus, apertè descripsimus. Quoniam autem, ut prędictũ est, Dionysodorus nullo pacto descriptis in fine ab Archimede prænunciatis incidens: adnixus autem ad inuenienda, quæ non exposita essent, aliam uiam ingressus totius problematis, conscripsit haud indignum inuentionis modum necessarium: quem existimaui oportere istis connectere fideliter, quantum potuimus. nam & ipse nimia hominum negligentia magnam demonstrationum partem multitudine errorum deletam habens, in omnibus quibus nos incidimus scriptis ferebatur.

MODVS DIONYSODORI.

Datam sphæram plano ita secare, ut portiones eius habeant inuicem proportionem datam. Esto data sphæra, cuius diametros a b, & proportio data quam habeat c d ad d e. Oportet igitur sphęram plano erecto ad ipsam a b secare, ita ut portio cuius uertex a, ad portionem cuius uertex b, habeat proportionem, quam habet c d ad d e. producatur b a in f, & ponatur a f dimidia ipsius a b. & quã proportionem c e habet ad d e, habeat eam f a ad a g, & sit ipsa a g ad angulos rectos ad ipsam a b, & sumatur a h media proportionalis istarum a f, a g. Igitur a h maior est ipsa a g, & circa axem f b per f describatur parabole, ita ut deductæ possint iuxta ipsam a g, quæ ibit per h, quoniam contentum sub f a, a g est ęquale quadrato a h. Describatũ itaq;, & sit puta f h k, & per b ducatũ k b æquedistans ipsi a h, & secet parabolam pũcto k, & per g circa incoincidentes has f b, b k describatur hyperbole, quæ diuidet parabolen inter h k: secet in puncto l, &



ducatur ab l perpendicularis ad a b ipsa l m: & per puncta g, l ducantur ipsi a b æquedistantes g n, l x. Quoniam igitur ipsa g l est hyperbole, & incoincidentes istę a b, b k, et æquedistantes ipsis a g, g n, istæ m l, l x, erit contentũ sub a g, g n æquale contento sub m l, l x, ex octauo theoremate libri secundi Elementorum conicorum Apollonij. Verum ipsa g n est æqualis ipsi a b, & ipsa l x ipsi m b. Contentum igitur sub l m, m b, est æquale contento sub g a, a b. Et quia contentum

sub extremis æquatur contento sub medijs, quatuor rectæ proportionales sunt. Erit igitur sicut quadratum l m ad quadratū g a, ita quadratum a b ad quadratum b m. Et quoniam propter parabolen quadratum l m æquatur contento sub f m, a g. erit ergo sicut f m ad m l, ita m l ad a g. Sicut ergo prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratum secundæ, & quadratum secundæ ad quadratum tertiæ. Sicut ergo f m ad a g, ita quadratum l m ad quadratum g a. Verum sicut quadratum l m ad quadratum a g, ita ostensum est quadratum a b ad quadratū b m. Igitur sicut quadratum a b ad quadratum b m, ita f m ad a g. Verum sicut quadratum a b ad quadratum b m, ita circulus cuius quæ ex centro est ęqualis ipsi a b ad circulum cuius quæ ex centro est æqualis ipsi b m. & sicut circulus cuius quæ ex centro est ęqualis ipsi a b, ad circulum cuius quæ ex centro est æqualis ipsi b m, ita f m ad a g. Conus ergo basem habens circulum cuius quæ ex centro est æqualis ipsi a b, altitudinem uero ipsi a g, æqualis est cono habenti basem circulum, cuius quæ ex centro æqualis est ipsi b m, altitudinem uero ipsi f m. Nam coni quorum bases contrario altitudinibus afficiūtur, sunt æquales. Verum conus habens basem circulum cuius quæ ex centro æqualis est ipsi a b, altitudo autem ipsi f a, ad conum basim habentem eandem, & altitudinem ipsam a g, se habet sicut f a ad a g, hoc est c d ad e d. Quoniam enim bases easdem habent, ad inuicem se habebunt sicut altitudines eorum. Conus igitur basim habens circulum, cuius quæ ex centro æqualis est ipsi a b, altitudinem uero æqualem ipsi f a, ad conum habentē basem circulum cuius quæ ex centro æquatur ipsi b m, altitudinem uero ipsam f m, est sicut c e ad e d. Verum conus habens basem circulum cuius quæ ex centro æqualis est a b, altitudinem uero ipsam f a, est æqualis sphæræ: & conus basim habens circulum cuius quæ ex centro est æqualis ipsi b m, altitudinem uero f m, est æqualis portioni sphæræ cuius uertex est b: altitudo uero b m, sicuti deinceps ostendetur. igitur sphęra habet ad dictā portionem, eam proportionē, quam habet c e ad e d. & diuidenti portio cuius uertex est a, altitudo autem a m, ad portionem cuius uertex est b, altitudo uero b m, eam habet proportionem, quam c d ad d e. Planum igitur perductum per ipsam l m erectum ad a b secat sphæram in proportionem datam: quod erat faciendum.

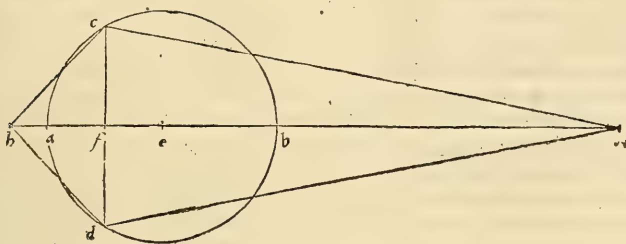
Quod autem conus basem habens circulum, cuius quæ ex centro est æqualis ipsi b m, altitudinem uero ipsam f m, æquatur portioni sphæræ cuius uertex b, et altitudo m b, hoc pacto demōstrabitur. Fiat enim sicut f m ad m a, ita o m ad m b. Igitur conus basem habens eandem cum portione, altitudinem uero ipsam o m, æquatur portioni. Et quoniam sicut f m ad m a, ita o m ad m b. & permutatim, sicut f m ad m o, ita a m ad m b. Verum sicut a m ad m b, ita quadratum p m ad quadratum m b: & ita circulus cuius quæ ex centro est æqualis ipsi p m, ad circulū cuius quæ ex centro est æqualis ipsi m b. Sicut igitur circulus cuius quæ ex cētro est æqualis p m, ad circulum cuius quæ ex centro est æqualis ipsi b m, ita m f ad m o. Sic igitur conus basem habens circulum, cuius quæ ex cētro æqualis est ipsi m b, altitudinem uero ipsam m f, æquatur cono habenti basim circulum, cuius quæ ex centro est æqualis ipsi p m, altitudinem uero ipsam m o. nam bases eorum altitudinibus contrario afficiuntur. quare & portioni est æqualis.

MODVS DIOCLIS.

SCribit autem & Diocles in libro de Pirijs, primum hæc dicēs: In libro de sphæra & cylindro Archimedes demonstrauit, quod omnis sphæræ portio æquatur cono basem habenti eandem cum portione, altitudinem uero rectam quandā habentem proportionem ad perpendicularem ductam à uertice ipsius portionis ad basem, quā utraq; simul ea quæ ex centro, & quæ permutatim habetur, ad portionem perpendicularis, ad perpendicularem permutatæ portionis. Vt si sphæra sit a b c, & secetur plano quodam circulo circa diametrum c d constituto, & diame

tro

tro a b, existente centro e: & fecerimus sicuti utraque simul e a, f a ad f a, ita g f ad f b. Item sicut utraque simul e b, b f ad f b, ita h f ad f a. Ostensum est portionem c b d sphæræ, æqualem esse cono, cuius basis quidem circulus circa diametrum c d con



stitutus, altitudo uero ipsa f g. Et portionem c a d æqualem esse cono habenti eandem basem, altitudinem uero h f.

Proposito itaque sibi hoc, datam sphæram plano secare, ita ut portiones sphæræ ad inuicem habeant proportionem datam, cōstruens ea quæ sunt dicta, ait: Proportio igitur data est coni basis, cuius est circulus circa diametrum c d, altitudo uero ipsa f h, ad conum cuius basis est eadem, altitudo uero ipsa f g. Etenim hoc demonstratum est: coni, qui in eadem base consistunt adinuicem se habent sicut eorum altitudines: igitur proportio h f ad f g data. & quia est sicut h f ad f a, ita utraque simul e b, b f ad f b: diuidēti, sicut h a ad a f, ita e b ad f b. Eadem ratione sicut g b ad f b, ita ipsa eadem recta ad ipsam f a. Factū est igitur problema tale: Recta a b positione data, & duobus punctis a b datis, & data e b, secare ipsam a b pūcto f, & adiicere has h a, b g, ita ut portio h f ad f g sit data. Item sicut h a ad a f, ita data recta ad ipsam f b. Sicut autem g b ad b f, ita ipsa data recta ad ipsam f a. Hoc autem deinceps est demonstratum. Archimedes enim longius hoc ostendens, & sic in alterum problema abigit, quod nō demonstrat in libro de sphæra & cylindro.

Recta a b positione data, & duobus punctis a b datis, & proportione quā habet ipsa c ad ipsam d, diuidere ipsam a b pūcto e, & adiicere ei has f a, g b, ita ut sit sicut c ad d, ita f e ad e g. Item sit sicut f a ad a e, ita quędam recta data ad b e: & sicut g b ad b e, ita eadem recta data ad e a factum sit. et ipsi a b ad angulos rectos addātur h a k, l b m, & ipsi rectæ datæ ponatur utraque æqualis a k, b m, & iunctæ hæ k e, e m educantur ad l, h. Iungatur autem & k m, & ducatur per l ipsa l n æquedistans ipsi a b, & per e ducatur x e o p, æquedistans ipsi n k. Quoniam igitur est sicut f a ad a e, ita m b ad b e, hoc enim supponitur. sicut autem m b ad b e, ita h a ad a e, propter similitudinem triangulorū. Sicut ergo f a ad a e, ita h a ad a e. Igitur f a est æqualis ipsi h a: eadem ratione & b g ipsi b l. Et quoniam est sicut utraque simul h a, a e, ad utrāque simul m b, b e, ita utraque simul k a, a e, ad utramque simul l b, b e. utraque enim earum proportionum eadem est ei quę est a e ad e b. Contentum igitur sub utraque simul h a, a e, & sub utraque simul l b, e b, æquatur contento sub utraque simul k a, a e: & utraque simul m b, b e. Ponatur ipsi k a æqualis harū utraque a r, b s. Quoniam igitur utraque simul h a, a e, æqualis est ipsi f e: utraque autem simul l b, b e æqualis ipsi e g: & utraque simul k a, a e æqualis ipsi r e: & utraque simul m b, b e æqualis ipsi s e. Et ostensum est, contentum sub utraque simul h a, a e, & utraque simul l b, b e, esse æquale contento sub utraque simul k a, a e, & utraque simul m b, b e. Contentum igitur sub f e, e g æquatur contento sub r e, e s. Propter hoc quando

r ea-

r cadit inter a f, tunc ſ exterius ipſo g cadet, & ecõuerſo. Quoniam igitur ſicut c ad d, ita f e ad e g. Sicut autem f e ad e g, ita contentum ſub f e, e g ad quadratum e g. Sicut ergo c ad d, ita contentum ſub f e, e g ad quadratum e g. Contentum autem ſub f e, e g oſtenſum eſt eſſe æquale ſub r e, e s. Eſt igitur ſicut c ad d, ita contentum ſub r e, e s ad quadratum e g. Ponatur ipſi b e æqualis ipſa e o, & iuncta b o educatur utrinque, & à punctis ſ, r ductæ ad angulos rectos hæ ſ t, r y concurrant ei in pũctis y t. Quoniam igitur per b datum, ad poſitione datam a b ducta eſt t y, faciens angulum datũ hunc e b o dimidium recti, ipſa t y erit poſitione data. Et à datis r ſ poſitione, hæ r y, t ſ ductæ ſecant eã punctis t y. Igitur & puncta t, y data. quare et ipſa t y data, põ ſitione & magnitudine. & quia propter ſimilitudinem triangulorum e o b, ſ t y eſt, ſicut t b ad b o, ita ſ b ad b e: & cõponenti, ſicut t o ad o b, ita ſ e ad e b. Verum ſicut b o ad o y, ita b e ad e r. Igitur per æquam ſicut t o ad o y, ita ſ e ad e r. Verum ſicut t o ad o y, & ſ e ad e r, ita contentum ſub t o y, ad quadratum o y. Sicut autem ſ e ad e r, ita contentum ſub ſ e, e r ad quadratum e r. Sicut ergo contentum ſub t o, o y ad quadratum o y, ita contentum ſub e ſ, e r, ad quadratum e r. Et ſicut ergo contentum ſub t o, o y ad quadratum o y, ita contentum ſub ſ e, e r, ad quadratum e r. Et permutatim, ſicut contentum ſub t o, o y ad contentum ſub ſ e, e r, ita quadratum o y, ad quadratum e r. Quadratum autem o y duplum eſt quadrato e r. quandoquidem & quadratum o b duplum ad quadratum b e. Igitur contentum ſub t o, o y, duplum eſt contento ſub ſ e, e r. Contentum autem ſub ſ e, e r oſtenſum eſt habere ad quadratum e g eam proportionem, quam habet ipſa c ad ipſam d. Et quadratum e g æquatur quadrato x o. nam utraq; e g, x o eſt æqualis utriq; ſimul l b, b e. Igitur contentum ſub t o, o y habet ad quadratum x o eã proportionem, quam habet dupla ipſius c ad ipſam d. Proportio autem duplæ ipſius c ad ipſam d data eſt. Igitur contenti ſub t o, o y, ad quadratum x o proportio data. Si igitur fecerimus ſicut d ad duplam ipſius c, ita t y ad aliam quãdam, puta u. & circa ipſam t y deſcribamus ellipſim, id eſt ſectionẽ coni acutiãguli, ita ut deductæ in angulo ſub x o b, hoc eſt in dimidio recti poſſint ea quæ iuxta u deficientia, ſimili contento ſub t y, & u tranſibit per x per conuerſionem uigeſimi theorematis primi libri Elementorũ conicorum Apollonij. deſcribatur, & ſit puta y x t. Punctum igitur x applicatur ellipſi poſitione datæ. Et quoniam ipſa l k eſt diagonialis ipſius n m, parallelogrammum erit contentum ſub n x p æquale contento ſub a b, b m. Si igitur per b circa incoincidentes has h k, k m deſcripſerimus hyperbolen, ipſa tranſibit per x, & erit poſitione data, quia b punctum poſitione datum eſt. & utraq; harum a b, b m. Et quia hæ h k m incoincidentes deſcriptę ſunt, & eſto puta x b. igitur punctum x aptatur hyperbolæ poſitione datæ. Aptabatur autem & ellipſi poſitione datæ. Igitur punctum x datum, & perpendicularis ab ipſo x e. igitur e datum. Et quoniam eſt ſicut m b ad b e, ita f a ad a e. & a e data eſt: igitur a f data, & eadem ratione ipſa g b data.

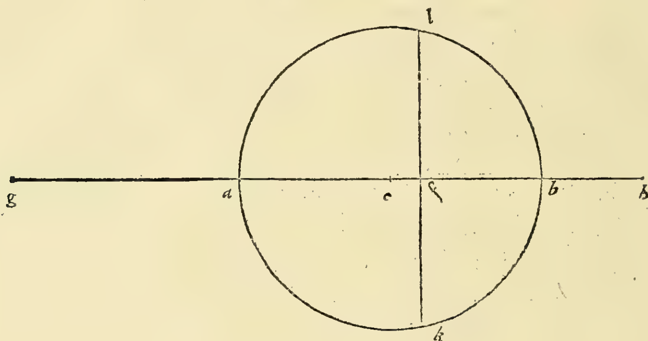
Componitur autem hoc modo. Sicut enim in eadem deſcriptione, eſto data re

cta

cta a b, quam oporteat diuidere, et altera data a k: proportio data sit c ad d. ducatur ipsi a b ad angulos rectos ipsa b m, æqualis ipsi a k: & iungatur k m, & ponatur utraque a r, b s æqualis ipsi k a. à punctis r s ducantur ad angulos rectos hæ r y, s t. Et ad punctum b constituatur dimidium recti anguli sub a b o, & educta b o in utranque parte, diuidat ipsas s t, r y, punctis t y: & fiat sicut d ad duplã ipsius c, ita t y ad ipsam u. & circa t y describat ellipsis, ita ut eductæ in dimidio recti possint ea quæ adiaceant ipsi u deficientia simili contento sub t y, & u. Et per b circa incoinciden tes has a b, k m describatur hyperbole b x, secans ellipsim in x: & ducatur ab x per pendicularis x e ad ipsam a b, & educatur in p, & per x ducatur æquedistans ipsi a b ipsa l x n, & educantur k a, m b ad l, h: & ipsa m e iuncta, educatur & concurrat ipsi k n in h. Quoniam igitur b x est hyperbole, & incoincidentes hæ h k, k m, contentum sub n x, x p æquatur contento sub a b, b m, per octauum theorema secundi libri Elementorum conicorum Apollonij. Idcirco ipsa k e l recta est. Ponat itaque a f æqualis ipsi h a, & ipsa b g ipsi l b. Quoniã igit est sicut dupla ipsius c ad ipsam d, ita ipsa u ad t y. Sicut autem ipsa u ad t y, ita contentum sub t o, o y ad quadratum x o, per uigesimum theorema primi libri Elementorũ conicorum Apollo nij. Et ideo sicut dupla ipsius c ad ipsam d, ita cõtentũ sub t o, o y, ad quadratũ x o. Et quoniam est sicut t b ad b o, ita s b ad b e: & componenti, sicut t o ad o b, ita s e ad e b. Verum sicut b o ad o y, ita b e ad e r. Per æquam igitur, sicut t o ad o y, ita s e ad e r. Sicut ergo contentum sub t o, o y ad quadratum o y, ita contentum sub s e, r e ad quadratum e r: & permutatim, sicut contentum sub t o, o y ad contentũ sub s e, e r, ita quadratum o y ad quadratum e r. Verum quadratum o y ad quadratum e r duplum est, quia & quadratum b o ad quadratum b e. nam b e æqualis est ipsi e o, quia uterque angulorum ad b & o est dimidium recti. Igitur cõtentum sub t o, o y duplum est contento sub s e, e r. Quoniam igitur ostensum est, sicut dupla ipsius c ad ipsam d, ita contentum sub t o, o y, ad quadratum x o, & antecedentium dimidia. Sicut ergo c ad d, ita contentũ sub r e, e s, ad quadratũ x o, & ad quadratũ e g, cum x o æqualis sit ipsi e g, quia utraque earum est æqualis utrique simul l b, b e. Quoniam igitur est sicut utraque simul h a, a e, ad utramque simul m b, b e: sic utraque simul k a, a e, ad utramque simul l b, b e. Vtraque enim earum proportionum est eadem proportioni a e ad e b. Contentum igitur sub utraque simul h a, a f, & utraque simul l b, b e æquatur contento sub utraque simul k a, a e, & utraque simul m b, b e. Verum utrique simul h a, a e æqualis est ipsa f e: & utrique simul l b, b e æqualis est ipsa e g. utrique simul k a, a e æqualis est ipsa r e: utrique simul m b, b e æqualis est ipsa e s. Contentum igitur sub f e, e g æquatur contento sub r e, e s. Verum sicut c ad d, ita contentum sub r e, e s ad quadratum e g. Et sicut c ad d, ita contentum sub f e, e g, ad quadratum e g. Verum sicut contentum sub f e, e g ad quadratum e g, ita f e ad e g, & ideo sicut c ad d, ita f e ad e g. Et quoniam est sicut m b ad b e, ita h a ad a e, & h a æquatur ipsi f a. Sicut ergo m b ad b e, ita f a ad a e. eadem ratione sicut k a ad a e, ita g b ad b e. Recta igitur data ipsa a b, & altera itẽ data k a, & proportione c ad d, sumptum est in ipsa a b quoddam punctum, puta e, & adiectæ rectæ hæ f a, g b: & facta est f e ad e g in data proportione. Item sicut data m b ad b e, ita f a ad a e. Sicut autem ipsa k a data ad a e, ita g b ad b e: quod fuerat faciendum.

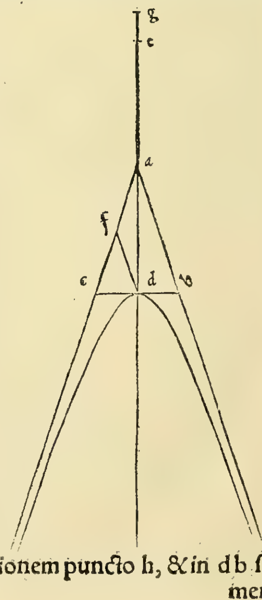
His igitur ita demonstratis, potest data sphæra secari in proportionem datam, hoc modo. Esto enim datæ sphæræ diametros a b, proportio autem quam opus sit partes sphæræ inter se habere, sit c ad d, centrum sphæræ sit c: & sumatur in a b punctum f, & adijciantur g a, h b, ita ut sicut c ad d, ita sit g f ád f h. Item ut sit sicut g a ad a f, ita e b data ad b f. ut autem h b ad b f, ita eadem data e a ad a f. Hoc autem quo pacto fieri possit, prius demonstratum est. & per ipsum f ducatur k f l ad angulos rectos ipsi a b, & per k l planum perductum erectum ad ipsam a b secet ipsam sphæram. Dico itaque, eas sphęræ portiones habere inuicem proportio-

nem quæ est c ad d. quoniam enim est sicut g a ad a f, ita e b ad b f. componenti, sicut f g ad f a, ita utraque simul e b, b f, ad b f. Conus igitur basem habēs circulum circa diametrum k l, & altitudinem f g, æquatur portioni sphæræ basem eandem



habenti, altitudinem autem f a. Rursus quoniam sicut h b ad b f, ita e a ad a f. & componenti, sicut h f ad b f, ita utraqꝫ simul e a, a f ad a f. Igitur conus basem habens circulum circa diametrum k, altitudinem ipsam f h, æquatur portioni sphæræ eandem basem habenti, & altitudinem ipsam b f. Quoniam igitur dicti coni eadem in base constantes, habentur inuicem sicut eorum altitudines, hoc est sicut h f ad f g, hoc est c ad d. Portiones igitur sphæræ inuicem habent proportionem datam, quod initio fuerat faciendum.

Quo autem pacto per punctum datum describi circa datas incoincidentes hyperbole debeat, hoc modo ostendemus: quoniā non inde ponitur in conicis Elementis. Sint duæ rectæ c a, a b complexæ quemcunqꝫ angulum ad a, & detur punctum quoddam puta d, & proponatur per d circa incoincidentes has c a, a b describere hyperbolen. iungatur a d, & ducatur a d e, & ponatur ipsa d a æqualis ipsi a e, & educatur per d ipsa d f æquedistans ipsi a b, & ponatur f c æqualis ipsi a f, & iungatur c d, & educatur ad b: & quadratū c b sit æquale contento sub d e, e g: & educta a d circa eam describatur hyperbole per d, ita ut deductæ possint ea quæ iuxta e g addētia simile cōtento sub d e, e g. Dico quod hyperbolæ descriptæ sūt incoincidētes c a, a b. Quoniā em̄ d f est æquedistās ipsi b a, & ipsa c f æqualis ipsi f a: igitur c d est æqualis ipsi d b. Igitur quadratū c b quadruplū est quadrato d c, & quadratū c b æquatur contento sub d e, e g. Igitur hæc c a, a b sunt incoincidentes ipsi hyperbolæ, per primum theorema secūdi libri Elementorum conicorum Apollonij.



IN COMPOSITIONEM QVARTI.

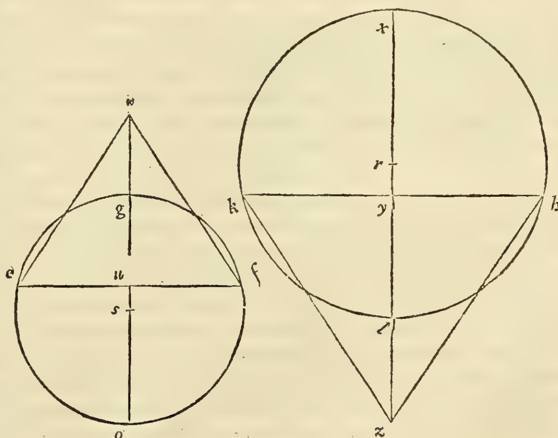
IN compositione autem producens diametrū sphæræ ipsam d b, & ponens dimidium eius æquale ipsi b f, & diuidens eam in datam proportionem puncto h, & in d b sumens

mens q, ita ut sit sicut q f ad h f, ita quadratum b d ad quadratum d q, & eadem apparans quæ prius dicit, quod fiat sicut utraque simul k d, d q ad d q, ita r q ad q b, & ponit ipsum r inter h f. Quod autem hoc sic habeatur, est ostendendum. Quoniam enim sicut utraque simul k d, d q ad d q, ita r q ad q b, diuidenti erit k d ad d q, sicut r b ad q b. Et permutatim, sicut k d ad r b, ita d q ad q b. Verum d q maior est ipsa q b. igitur k b maior r b, hoc est f b ipsa b r: quare punctum r inter ipsum b & f cadet. Quod autem & extra h, similiter ostendetur eis quæ in resolutione præcesserunt, in tota theorematis compositione. Colligitur enim, quod est sicut r q ad q l, ita f h ad h b. Quare componenti, & propterea fit consequens supradictis, & his quæ sunt istic dicta demonstratio.

Et per æquam in proportionalitate perturbata, &c. Perturbatã proportionalitatem in Elementis didicimus, quando tribus magnitudinibus, & alijs numero totidem sit, sicut antecedens ad consequens in primis magnitudinibus, ita in secundis antecedens ad consequens. Sicut autem consequens ad aliud quoddam in primis, ita in secundis aliud quoddam ad antecedens. & istic igitur ostensum est, sicut antecedens r l ad consequens l d, ita antecedens q f ad consequens f h. Sicut autem consequens l d ad aliud quoddam d q, ita aliud quoddam a f ad antecedens q f. Sequitur igitur, ut ostensum est per æquam in quinto Elementorum, sicut r l ad l q, ita b f ad f h.

IN QVINTO.

ET quoniam portio e f g est similis portioni h k l, conus igitur e f o similis est cono z h k. Intelligãtur enim descriptiones seorsum positæ, & iunctæ e g, g f, e o, o f, h l, l k, h x, x k. Quoniam igitur portiones e f g, h k l similes sunt inter se, erũt anguli e g f, h l k æquales: quare & eorum dimidia, & recti sunt hi, qui ad u, y. Igitur reliquus reliquo æqualis. igitur triangulus g u f est æquiangulus triangulo l y k. & est sicut g u ad u f, ita l y ad y k. Eadem ratione cum trianguli u f o, y k x sint inuicem æquianguli, erit sicut f u ad k y, ita f o ad k x, & u o ad y x. per æquam igitur sicut g u ad u o, ita l y ad y x. & cõponẽti, sicut g o ad o u, ita l x ad x y. & antecedentiũ dimidia sũt f o, & r x. quare per equam. et cõponenti, sicut utraque simul f o, o u, ad o u, hoc est ω u ad u g: sic utraque simul r x, x y ad x y, hoc est z y ad y l. Verum sicut g u ad u f, ita l y ad y k. per æquam ergo, sicut ω u ad u f, ita z y ad y k: & consequentium dupla sunt e f, & h k. Sicut ergo ω u ad f e, ita z y ad h k. Conorum igitur ω e f, z h k axes sunt proportionales, et diametri basium. igitur coni sunt similes, quod fuerat demonstrandum.



Proportio autem ω u ad e f data. Quoniam enim portiones sphærarum datæ sunt, & diametri basium datæ, & altitudines portionum. quare e f data, & g u. Igi

tur eorum dimidia data erunt: quare & quadrata earum, & quadratum e u æqua tur contento sub g u, u o. Si autem datum iuxta datam applicetur, facit latitudinē datam. igitur u o data. Verum & u g, igitur tota diametros sphæræ data: idcirco & eius dimidia s o data. uerum & o u data: igitur proportio s o ad o u data. & cōponēti, utriusq; simul s o, o u ad ipsam o u, proportio data, hoc est ω u ad u g, & ipsa u g data. igitur & ω u data. Verum & e f data. quare & proportio ω u ad e f data. Eadem autem utiq; dicerentur in portione a b c, & colligetur proportio q t ad a b data. Et quia a b data est, igitur & q t data.

Quod autem si portiones datæ sunt, earum altitudines sint datæ, antea quidē constat. Verum ut hoc quoque coordinationi datorum consequenter colligi uideatur, dicetur. Quoniam enim portiones sunt datæ positione & magnitudine, & e f data, erit angulus in portione datus. Quare & eius dimidium. & si intelligamus iunctam e g, dato eo qui ad u recto, erit reliquus datus, & triangulus e g u datus specie. quare & proportio e u ad u g data erit. & e u data est, cum sit ipsius e f dimidia, igitur u g data. Licet autem & aliter dicere: quoniā e f est positione data, & á puncto u dato cum sit in duo æqua diuidens e f, educta est u g ad angulos recto, ipsi positione datæ, & circumferentia portionis positione data. Igitur g datū est. Erat autem & u datum. quare & ipsa u g data.

Quoniam est sicut z y ad q t, hoc est quadratum b a ad quadratum h k, ita k h ad ipsam d. Quoniam enim factum fuit, sicut z y ad h k, ita q t ad d: erit permutatim sicut z y ad q t, ita h k ad d. Verum sicut z y ad q t, ita quadratum a b ad quadratū h k. Conis enim existentibus æqualibus, bases eorum altitudinibus ecōtrario afficiunt. Sicut aūt bases ad inuicē, ita quadrata diametrorū. Sicut ergo quadratum b a ad quadratū h k, ita h k ad d. Et permutatim, sicut a b ad h k, ita 9 ad d. Quandoquidem proportio b a ad 9, ostensa est eadem proportioni quadrati a b ad quadratum h k, et item k h ad d, et b a ad 9, eadem est proportioni k h ad d. Quare permutatim, sicut b a ad h k, ita 9 ad d.

IN COMPOSITIONEM QVINTI.

QVoniam itaq; proportionales sunt a b, h k 9, d, erit sicut quadratum a b ad quadratum h k, ita h k ad d. Vniuersaliter enim si sint quatuor rectæ continuè proportionales, erit quadratum primę ad quadratum secundæ, sicut secunda ad quartam. Quoniam enim sicut prima ad secundam, ita tertia ad quartam, erit permutatim sicut prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratum secūdæ. igitur sicut quadratum primæ ad quadratum secundæ, ita secunda ad quartam.

IN SEXTVM THEOREMA.

QVoniam k l m portio similis est portioni a b c, erit sicut r l ad r n, ita b p ad p h. Si enim iungantur hæ m n, c h, quoniam portiones sunt similes, erunt anguli ad b & l æquales: & anguli ad m c sunt recti, igitur reliquus reliquo, & trianguli sunt æquianguli, & est sicut b h ad h c, ita l n ad n m. Verum sicut h c ad h p, ita n m ad n r, propter similitudinem triangulorum c p h, & m r n. per æquam igitur, sicut b h ad h p, ita l n ad n r. quare diuidenti, sicut l p ad p h, ita l r ad r n.

Proportio autem e f ad b c data, igitur utraq; earum data. Quoniam enim portiones sphærarum datæ sunt, & diametri basium datæ sunt, & altitudines portionum. quare ipsa a c data est, & eius dimidia p c data erit. & b p data est, & ambiunt angulum rectum: igitur b c data. Eadem ratione & e f data. quare & proportio b c ad e f data.

IN COMPOSITIONEM SEXTI.

POrtiones ergo circulorum quæ in k m, a c insistunt, similes existunt. Si enim sicut in resolutione, iungantur hæ c h, m n, quia anguli ad c m sunt recti: & c p, & m r sunt perpendiculares: erunt mediæ proportionales inter partes basium. quare erit sicut prima b p ad tertiam p h, ita quadratū primæ b p ad quadratum

dratum secundæ c p. Eadem ratione sicut l r ad r n, ita quadratum l r ad quadratũ r m. Sicut ergo b p ad p c, ita l r ad r m, & latera circa angulos æquales sunt proportionalia: igitur trianguli æquianguli. igitur anguli ad b l sunt æquales: & eorum dupli, qui sunt in portionibus. igitur portiones sunt similes.

IN SEPTIMVM THEOREMA.

PRoportio igitur utriusque simul e d, d f ad d f data. Quoniam enim proportio utriusq; simul e d, d f ad d f est data, si magnitudo data habeat ad aliquam sui partem proportionem datam, & ad reliquam habebit proportionem datam: quare utraq; simul e d, d f ad e d habet proportionem datam. Quoniam igitur utraque e d, d f ad utramq; simul e d, d f, habent proportionem datam, habebunt etiam inter se proportionem datam. Proportio igitur data e d ad d f, & e d data. quare reliqua f e dabitur. Quare & contentum sub d f, f b, hoc est quadratum a f, & ideo a f data erit. quare & tota ipsa a c. Aliter autem, dixeris ipsam a c datam esse. Quoniam enim diametros data est d b positione, & punctum f datum, ut petitũ est: & a dato f ducta est a c ad angulos rectos, erit ipsa a c positione data. uerum & circuli circumferentia: quare ipsa a c puncta data, & ipsa a f c data est.

Et quoniam utraque simul e d, d f ad d f maiorem proportionem habet, quàm utraq; simul e d, d b ad d b. Quoniam enim e d maior est q̃ dimidia ipsius d f, erit utraque simul e d, d f, maior quàm sesquialtera ipsius d f. Verum utraque simul e d, d b, est ipsius d b sesquialtera: igitur e d, d f ad ipsam d f maiorem proportionẽ habet, quàm e d, d b ad d b. Aut aliter, quoniam ipsa d b est maior ipsa d f, alia autem quædam e d: igitur e d habet ad d f maiorem proportionem, quàm e d ad d b. componenti utraq; simul e d, d f ad d f, habet maiorem proportionem, q̃ utraq; simul e d, d b ad d b. Cõpositio theorematis manifesta est per ea quę istic dicta sunt.

IN OCTAVVM THEOREMA.

IPsa h f ad ipsam f g minorem habet proportionem, quàm duplicatam eam quã habet quadratum b a ad quadratum a d: hoc est ipsa b f ad f d. Quoniam enim in triangulo rectãngulo ducta est ab angulo recto a f perpendicularis, cum trianguli ad perpendicularem similes existant, erit sicut f b ad b a, ita a b ad b d. Et sicut prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratum secundæ, & quadratum secundæ ad quadratum tertiæ, uti superius ostensum fuit. Sicut ergo f b ad b d, ita quadratum a b ad quadratum b d. Verum sicut b d ad d f, ita quadratum b d ad quadratum d a. Sicut enim prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratũ secundæ. Et per æquam, sicut quadratum b a ad quadratũ d a, ita b f ad f d. Colligetur autem idem & aliter hoc modo. Quoniam enim sicut b f ad f d, ita cõtentum sub f b, b d ad contentum sub b d, d f, ipsa b d cõmuni altitudine sumpta. Est autem contentum sub f b, b d æquale quadrato b a. Cõtento autem sub b d, d f ęquatur quadratum d a. Sicut ergo quadratum b a ad quadratum a d, ita b f ad f d. Et quoniam h f habet ad f k minorem proportionẽ, quàm h b ad b k. Vniuersaliter enim si sint duæ magnitudines inæquales, quibus aliæ æquales addantur, maior habet ad minorem maiorem proportionem, quàm compositum ad compositum. Sunt enim duæ rectæ inequales a b, c d: quibus addantur b e, d f æquales. Dico quod a b ad c d maiorem propornem habet, quàm a e ad c f. Quoniam enim maior est a b ipsa c d, a b ad b e maiorem habet proportionem, quàm c d ad b e, hoc est ad d f. Igitur & componenti, a e ad e b maiorem habet proportionem, quàm c f ad f d, ex prædemonstratis. & euersim, a e ad a b minorem, q̃ c f ad c d. quare permutatim constabit res ipsa.

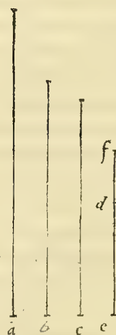


Contentum igitur sub h f, f g minus est quadrato f k. Si enim sint tres rectæ continuæ, sicuti hæ a b c, ita ut a habeat ad b minorem proportionem, quàm b ad c, contentum sub extremis minus erit quadrato mediæ. Si enim fecerimus sicut a ad b, ita b ad quandam aliam, ipsa erit maior ipsa c, siquidem debeat ad eam habere minorẽ proportionem, quàm c: & tunc erit cõtentum sub a, & sub maiore ipsa c, æquale quadrato k. quare contentũ sub a c minus est quadrato b.



Contentum igitur sub h f, f g ad quadratum f g, minorem proportionem habet, quàm quadratum k f ad quadratum f g. Sicut enim h f ad f g, ita contentum sub h f, f g ad quadratum f g. Contentum autem sub h f, f g, quadrato f g minus est: maius autem ad idem maiorem habet proportionem, quàm minus.

Et quoniam b e est æqualis ipsi d e, erit igitur contentum sub b f, f d minus contento sub b e, e d. contentum autem sub b e, e d æquatur quadrato e d. contentum autem sub b f, f d, cum quadrato e f, æquatur eidem. Et cõstat, quod quanto abfuit à bipertitione ipsum f maiori minus est, contento sub æqualibus. Cum maiore enim eo quod fit ab intermedia diuisionum, æquatur cõtento sub æqualibus. quare recta, & si per equalia diuidatur, per pũctum aliud atque aliud, contentum sub partibus propinquioribus bipertitioni, maius est cõtento sub partibus remotioribus. Igitur f b ad b e minorẽ proportionem habet, quàm e d ad d f. Vniuersaliter autem si sint quatuor termini, puta a b, b c, c d, d e: et contentũ sub a b, d e minus sit cõtento sub b c, c d. tunc a b ad b c habet minorem proportionem, quàm c d ad d e. Esto enim contentum sub b c, c d, æquale contẽto sub a b, d f. Est igitur sicut a b ad b c, ita c d ad d f: & d f est maior d e: igitur c d habet ad d e maiorem proportionem, quàm ad d f. Quare a b habet ad b c minorem proportionem, quàm c d ad d e.



Est igitur sicut h b ad b k, ita quadratum h n ad quadratum n k. Quoniam enim quadratum b n æquatur cõtento sub h b, b k, erũt tres rectæ proportionales, sicut h b ad b n, ita b n ad b k. & sicut prima h b ad tertiam b k, ita quadratum secundæ ad quadratum tertiæ, hoc est quadratum b n ad quadratum b k, uti superius demonstratũ fuit. Rursus quoniam est sicut h b ad b n, ita b n ad b k. Componenti, sicut h n ad b n, ita k n ad b k: & permutatim, sicut h n ad n k, ita b n ad b k. Igitur sicut quadratum h n ad quadratum n k, ita quadratum n b ad quadratum b k. Verũ sicut quadratum n b ad quadratum b k: ita esse ostensum est h b ad b k. Igitur sicut h b ad b k, ita quadratum h n ad quadratum n k.

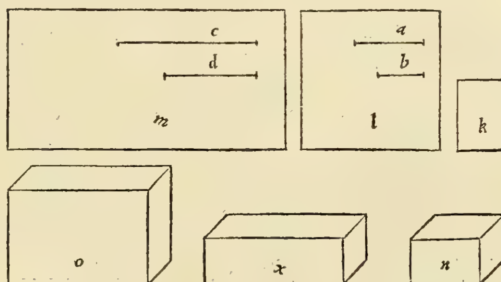
Quadratum autem h f, ad quadratum f k, maiorem habet proportionẽ, quàm quadratum h n ad quadratum n k. Rursus duabus inæqualibus h f, k f adijciatur n f, & per supradictum habet h f ad f k, maiorem proportionẽ, quàm h n ad n k. quare & earum duplæ. igitur quadratum h f ad quadratum f k, maiorem habet proportionem, quàm quadratum h n ad quadratum n k, hoc est h b ad b k, hoc est h b ad b e, hoc est k f ad f g.

Igitur h f ad f g maiorem habet proportionem, quàm sesquialteram eius, quæ est k f ad f g. Intelligantur enim seorsum positæ rectæ, puta a b, c, d: ita ut quadratum

tum a b ad quadratum c maiorem habeat proportionẽ, quàm c ad d. Dico quod a b ad d maiorem habet, quàm ſeſquialteram eius quam habet c ad d. Sumatur enim media inter c & d proportionalis e. Quoniam igitur quadratum a b ad quadratum c maiorem proportionem habet, quàm c ad d. Verum quadrati a b ad quadratum c, eſt proportio dupla, eius quæ eſt à b ad c. Illa uero quæ eſt c ad d, dupla eſt eius quę eſt c ad e. Igitur a b habet ad c maiorem proportionem, quàm c ad e. Fiat autem ſicut e ad c, ita c ad b f. Et quoniam quatuor rectæ conſequenter ſunt proportionales b f, c, e, d: igitur b f habet ad d proportionem, quæ eſt b f, ad c triplicatam. Idem eſt c ad e. Habet autem & c ad d proportionẽ, quæ eſt c ad e duplicatam. Igitur b f ad d habet proportionem ſeſquialteram, eius quæ eſt c ad d. Quare a b ad d maiorem proportionem habet, quàm ſeſquialteram eius, quam habet c ad d.

LIMMA AD SEQVENTIA.

Svnto quatuor termini, a b c d. Dico quod proportio compoſita ex his, ex contento ſub a b, ad quadratum c, & ex proportione b ad d, eadem eſt proportioni collectæ ex contento ſub a b, ſuper ipſam b ad quadratum c, ſuper ipſam d. Eſto itaque contento ſub a b æquale k, & quadrato c æquale l, & fiat ſicut b ad d, ita l ad m. Igitur proportio k ad m componĩ ex k ad l, hoc eſt contenti ſub a b ad quadratum c: & l ad m, hoc eſt b ad d. Etenim k multiplicans b faciat n, ipſa uero l multiplicans b faciat x, & multiplicans d faciat o.



Quoniam igitur contentum ſub a b eſt k, & k multiplicans b facit n: igitur n erit contentum ſub a b, ſuper b. Rurſus quoniam quadratum c eſt l, & l multiplicans d facit o, & multiplicans b facit x: igitur o eſt quadratum c ſuper d, quare proportio contenti ſub a b, ſuper b, ad quadratũ c ſuper d, eadem eſt proportioni n ad o. Oportet igitur oſtendere, quod proportio k ad m eſt ſicut n ad o. Quoniam uterq; k l multiplicans b, produxit utrumq; n x. Eſt igitur ſicut k ad l, ita n ad x. Rurſus quoniam l multiplicans utrumq; b d produxit, utrumq; x o erit ſicut b ad d, ita x ad o. Verum ſicut b ad d, ita l ad m. Igitur ſicut l ad m, ita x ad o. Igitur hi k l m ſunt bini, & bini cum his n x o, in eadem proportione. Per æquam igitur ſicut k ad m, ita n ad o. Et eſt k ad m proportio eadem compoſitæ ex cõtento ſub a b ad quadratũ c, & ex ea quam habet b ad d. Itẽ n ad o eſt eadem proportio proportioni contenti ſub a b, ſuper b, ad quadratum c ſuper d. Igitur proportio compoſita ex proportione contenti ſub a b ad quadratum c, & ex b ad d, eadẽ eſt proportioni contenti ſub a b ſuper b ad quadratum c ſuper d. Manifeſtum autem eſt, quod cõtentum ſub a b ſuper b, æquatur quadrato b ſuper a. Quoniam enim ſicut a ad b, ita contentum ſub a b ad quadratum b, ſumpta b communi altitudine

tudine: si quatuor termini fuerint proportionales, contentum sub extremis æquatur contento sub medijs. Contentum igitur sub a b super b, æquatur quadrato b super a.

IN ALITER OCTAVI.

Dictum est in præassumptis, quod si duarum magnitudinũ medium quoddam sumatur, proportio extremitatum componitur ex proportione primi ad medium, & medij ad tertium. Similiter fiet, & si multa media sumãtur extremitatum, proportio componitur ex proportionibus quas habent media consequenter collecta inter se. Et istic dicit, quod proportio portionis b a d ad portionẽ b c d cõponitur ex ea quam habet portio b a d ad conũ cuius basis circulus circa diametrum b d, uertex uero punctum a. Et idem conus ad conum basem eandem habẽtem uerticem punctum c. Et dictus conus ad portionem b c d, portione uidelicet d a b, & ipsa d c b extremis, sumptis medijs dictis conis. Verum portionis b a d ad conum b a d est proportio g h ad h c, per corolarium secundi theorematis secundi libri. Dicebatur enim, portionem ad conum in seipsa constitutum habere eã proportionem, quam habet utraq; simul quæ ex centro sphæræ, & altitudo reliquæ portionis ad altitudinem reliquæ portionis. Proportio autem coni b a d ad conum b c d est, quæ a h ad h c. Quoniam enim eiusdem basis existentes inuicem se habent sicut eorum altitudines: coni autem b c d ad portionem b c d, sicut a h ad h f, propter corolarium dictum conuersim sumptum. Quare proportio portionis b a d, ad portionem b c d, componitur ex proportione g h ad h c, & a h ad h c, & a h ad h f. Proportio autem composita ex g h ad h c, & a h ad h c, est sicut proportio contenti sub g h, h a ad quadratum h c. nam parallelogramma æquiangula habent inuicem proportionem compositam ex proportione laterum. Proportio autem composita ex proportione contenti sub g h, h a ad quadratum c h, & ex proportione a h ad h f eadem est proportioni contenti sub g h, h a in h a, ad quadratũ c h in h f, ut ostensum est in limmate præassumpto. Proportio autem contenti sub g h, h a in h a, ad quadratum c h in h f, eadem est proportioni quadrati a h in h g, ad quadratum c h in h f. Et hoc quoq; demonstratum fuit in præassumpto. Proportio igitur portionis ad portionem, eadem est proportioni quadrati a h in h g, ad quadratum c h in h f. Quoniam igitur ostendere oportet, quod portio ad portionem minorem habet proportionem, quàm duplam eam quæ est superficiei ad superficiem: oportet igitur ostendere, quod proportio quadrati a h in h g, ad quadratum c h in h f minorem habet proportionem, quàm duplicatam eam quã habet superficies portionis b a d ad superficiem b c d, hoc est quam habet quadratum a b ad quadratum b c. Verum sicut quadratum a b ad quadratum b c, ita a h ad h c. Ostensum est enim hoc in theorematibus præcedentibus. Oportet igitur ostendere, quod quadratum a h in h g, ad quadratum c h in h f, minorem habet proportionem, quàm eam duplicatam quam habet a h ad h c. Verum proportionis a h ad h c dupla est proportio quadrati a h ad quadratum h c. Ostendere igitur oportet, quod quadratum a h in h g, ad quadratũ c h in h f, habet minorem proportionem, quàm quadratum a h ad quadratum h c. Verum sicut quadratum a h ad quadratum h c, sumpta h g communi altitudine, ita quadratum a h in h g ad quadratum c h in h g. Igitur ostendere oportet, quod quadratum a h in h g, ad quadratum c h in h f, minorem habeat proportionem, quàm idem quadratũ a h in h g, ad quadratum h c in h g. Ad quod autem habet idem minorem proportionem, ipsum est maius. Oportet igitur ostẽdere, quod quadratum c h in h f, maius est quadrato c h in h g, hoc est quod maior sit h f quàm h g. Est autem hoc manifestum. inæqualib. enim his a h, h c æquales sunt additæ f a, c g. Hęc dicens ipse quidem non induxit compositionem, nos autem eam apponemus. Quoniam f h maior est ipsa h g, erit quadratum c h in h f, maius eodem in h g. Quare quadrati

ti a h in h g ad quadratum c h in h f minorem habet proportionem, quàm idem
ad quadratum c h in h g. Verum sicut quadratum a h in h g, ad quadratum c h
in h g, ita quadratum a h ad quadrarum h c. Igitur quadratum a h in h g, ad qua-
dratum c h in h f, minorem proportionem habet, quàm quadratũ a h ad quadra-
tum h c. Verum proportio quadrati a h, ad quadratum h c, dupla est eius quæ est
a h ad h c. Quadratum igitur a h in h g, ad quadratũ c h in h f minorem habet pro
portionem, quàm eam duplicatam quæ est a h ad h c. Verum portionum propor
tio est ostensa eadem ei quæ est quadrati a h in o g h, ad quadratũ c h in h f. Et pro
portio superficierum ea est, quam habet a h ad h c. Portio igitur ad portionem ha-
bet minorẽ proportionẽ, quàm sit ea duplicata, quæ est superficiei ad superficiẽ.

Deinceps autem resoluens reliquam partem theorematis, inducit: Dixi iam
quod portio maior habet ad minorem, maiorem proportionem, quàm sesquialte
ram eius quæ est superficiei ad superficiem. Verum portionum quidem propor-
tio ostẽsa est eadem illi quam habet quadratum a h in h g, ad quadratum c h in h f.
Proportionis igitur superficiei ad superficiem illa est sesquialtera, quã cubus a b
habet ad cubum b c. nam eius quę est a b ad b c, illa dupla est quæ est quadrati a b
ad quadratũ b c. tripla uero quę est cubi a b, ad cubum b c. Sicut enim a b ad b c,
ita a h ad h b, propter similitudinem triangulorum a h b, a b c. Si autem sint quatu
or proportionales rectæ, solida quoq; ab eis similia inter se & similiter descripta
sunt proportionalia. quare cubus a h ad cubum h b habet proportionẽ sesquialte
ram eius quam habet quadratum a b ad quadratum b c. hoc est superficies ad su-
perficiem. Verum sicut portio ad portionem, ita quadratum a h in h g, ad quadra
tum c h in h f. Dico igitur, quod quadratũ a h in h g, ad quadratum c h in h f, ma-
iorem proportionem habet, quàm cubus a h ad cubum h b, hoc est quàm quadra
ti a h ad quadratum h b, & ipsius a h ad h b. nam proportio quadrati a h ad qua-
dratum h b, assumpta ea quæ est a h ad h b, eadem est ei quæ est cubi a h ad cubũ
h b. nam utraq; eiusdem est tripla. Proportio autem quadrati a h ad quadratum
h b, cum proportione a h ad h b, est ea quæ est quadrati a h ad contentum sub c h,
h b. Quoniã enim proportio a h ad h b eadem est proportioni b h ad h c, ipsa b h
media proportionali existente, proportio quadrati a h ad quadratum h b, cũ pro-
portione a h ad h b eadem est proportioni quadrati a h ad quadratum h b, cum
portione b h ad h c. uerum proportio b h ad h c eadem est proportioni quadrati
b h ad contentum sub b h, h c, sumpta b h communi altitudine. quare proportio
quadrati a h ad quadratum h b, cum proportione a h ad h b, eadem est proportio
ni quadrati a h ad quadratum h b, cum proportione quadrati b h ad contentum
sub b h, h c. Verum proportio quadrati a h ad contentum sub b h, h c, est compo
sita ex proportione quadrati a h ad quadratum h b, & quadrati b h ad contentum
sub b h, h c, quadrato b h sumpto medio. quare proportio quadrati a h ad qua-
dratũ h b, cum proportione a h ad h b, eadem est proportioni quadrati a h ad con
tentũ sub b h, h c. quadrati aũt a h ad contentum sub b h, h c, proportio eadem est
proportioni quadrati a h in h g, ad contentũ sub b h, h c in h g, sumpta cõmuni al
titudine h g. Dico item, quod quadratũ a h in h g, ad quadratum c h in h f, maiorẽ
habet proportionem, q̃ quadratum a h in h g, ad contentũ sub c h, h b in h g. Ad
quod aũt idem maiorem habet proportionem, illud minus existit. Ostendendum
igitur, quadratũ c h in h f esse minus contento sub b h, h c in h g. Idẽ est ac si osten
datur, quod quadratũ c h ad contentũ sub c h, h b minorem habeat proportionẽ,
q̃ h g ad h f. Si enim fuerint quatuor termini, ueluti istic sunt, quadratum c h con
tentum sub c h, h b, & h g, et h f: & contentũ sub extremis minus sit contento sub
medijs, tunc primus ad secundũ minorem proportionem habet, quàm tertius ad
quartum, uti suprà ostensum fuit. Rationabiliter autẽ oportuerat ostendere, qua
dratum c h in h f maius esse contento sub c h, h b in h g. quod idem est ac si demõ-

Gg stretur

strretur quod quadratum c h ad contentum sub c h,h b minorem habeat proportionem,quàm h g ad h f. Verum sicut quadratum c h ad contentum sub c h, h b, ita c h ad h b. Oportet ostendere quod c h ad h b minorem habeat proportionem, quàm h g ad h f:hoc est h g ad h f maiorem habet proportionem,quàm c h ad h b. Ducatur ab e k ad angulos rectos ipsi e c, & ab ipso b perpendicularis supra eam b l. Reliquum nobis est ostendere,quod g h ad h f maiorem proportionem habeat,quàm c h ad h b. Est autem ipsa h f æqualis utriq; simul h a,k e.nam a f æquatur ei quæ ex centro. Ostendendũ est ergo,quod g h ad utramq; simul h a,k e maiorẽ habeat proportionem,quàm c h ad h b. Et ablata ab ipsa g h ipsa c h,& ab ipsa k e ipsa e l, æquali ipsi b h, oportebit ostendere quod reliqua c g ad reliquam utrãq; simul a h,k l maiorem proportionem habet,quàm c h ad h b. Quoniam enim oportet ostendere,quod g h ad utramq; simul h a, k e maiorem proportionem habeat quàm c h ad h b. Et permutatim,g h ad h c maiorem habeat proportionem, quàm utraq; simul h a,k e ad h b,hoc est ad l e. Et diuidenti g c ad c h maiorem habet proportionem, quàm utraq; simul h a,k l ad l e,hoc est b h. Permutatim quoque g c ad utramq; simul h a, k l maiorem habet proportionem, quàm c h ad b h. Item sicut c h ad b h, ita b h ad h a,hoc est l e ad a h. Quoniam igitur g c ad utramque simul h a,l k maiorem habet proportionem, quàm l e ad a h. Et permutatim, quoniam c g,hoc est k e ad e l maiorem habet proportionem, quàm utraque simul k l,h a ad h a. diuidenti,k l ad l e maiorem proportionem habet, quàm ipsa k l ad h a,hoc est quod minor est l e ipsa h a.

Deinceps autem nos compositionem adijciemus. quoniam l e minor est a h, habebit k l ad l e maiorem proportionem,quàm k l ad a h. Componenti habet k e ad l e maiorem proportionem,quàm utraq; simul k l, h a ad h a. Ipsa uero l e est æqualis ipsi b h. Igitur g c ad b h maiorem habet proportionem, quàm utraque simul k l,a h ad a h. Permutatim igitur,g c ad utramq; simul k l, a h maiorem proportionem habet,quàm b h ad h a,hoc est c h ad h b. Permutatim ergo g c ad c h maiorem proportionem habet, quàm utraq; simul k l,a h ad h b. Componenti igitur g h ad h c maiorem proportionem habet,quàm utraque simul k l,a h,h b ad h b,hoc est utraq; simul a h,k e ad h b. Est autem k e æqualis ipsi a f,igitur permutatim g h ad h f maiorem proportionem habet quàm c h ad h b. Sicut autem c h ad h b,ita quadratum c h ad contentum sub c h,h b. Igitur ipsa g h ad h f maiorem habet proportionem,quàm quadratum c h ad contentum sub c h,h b. Et per prius dicta quadratum c h in h f minus est cõtento sub c h,h b. Igitur quadratum a h in h g,ad quadratum c h in h f,maiorem proportionem habet,quàm ipsum quadratum a h in h g, ad contentum sub c h,h b in h g: hoc est quadratum a h ad contentum sub c h,h g. Proportio autem quadrati a h ad contentum sub c h,h b,sumpto medio quadrato b h, cõponitur ex proportione quadrati a h ad quadratum h b, & quadrati b h ad contentum sub b h ,h c. Proportio autem quadrati b h ad contentum sub b h,h c, eadem est proportioni b h ad h c,hoc est a h ad b h. Igitur quadratum a h in g h,ad quadratum c h in h f,maiorem habet proportionem, quàm quadratum a h ad quadratum h b cum proportione a h ad h b. Proportio autem composita ex proportione quadrati a h ad quadratum h b,& ipsa a h ad h b,eadẽ est proportioni cubi a h ad cubum h b, hoc est cubi a b ad cubum b c. Quadratũ igitur a h in h g, ad quadratum c h in h f,maiorem habet proportionem,quàm cubus a b ad cubum b c. Verum proportio quadrati a h in h g,ad quadratum c h in h f,est ostensa eadem esse proportioni portionum. Proportio uero cubi a b ad cubum b c ostensa est esse sesquialtera proportioni superficierũ. Portio igitur ad portionem habet maiorem proportionem,quàm sesquialteram eius quæ est superficiei ad superficiem.

IN NONVM THEOREMA.

Constat autem, quod ipsa b a minor est ipsa a k, quàm dupla potētia. ea uero quę ex centro, maior quàm dupla. Coniūcta enim ab ipso b ad cētrum b o, & angulo ad centrum facto obtuso b o a, erit quadratum a b maius quadratis late rum angulum obtusum complexorum, cumq; sint ęqualia, quadrato unius eorū, puta quæ ex centro eius, maius erit quàm duplum. Item cum quadratum a b sit æquale quadratis a k, b b, & quadratum a k sit maius quadrato k b, erit quadratū a b minus quàm duplum quadrati a k. Et hæc quidem in figura in qua est signū tale ∂. In altera uero figura contraria istis conuenienter dicentur.

Esto e n æqualis ipsi e l, & à circulo circa h f diametrū conus esto uerticem habens punctum n. Iste autem æquatur hemisphærio secundum circumferentiam h e f. Quoniam enim cylindrus basem habens circulum circa diametrum h f, altitudinem d e, est triplus coni basim eandem & altitudinem æqualem habentis, & sesquialter hemisphærij, erit tale hemisphærium duplum eiusdem coni. Est autē conus basem habens circulum circa diametrum h f, et altitudinem l n, duplus eiusdem coni. Igitur hemisphærium ęquatur cono, basem habenti circulum circa diametrum h f, & altitudinem l n.

Contentum autem sub r c, a r, maius est contento sub a k, k c, quia habet latus suum minus latere minore alterius maius. Dictum est enim superius, quod si recta diuidatur in duo inæqualia, alio & alio puncto, contentum sub partibus propinquioribus bipertitioni, maius est contento sub remotioribus. Ac si dicat, quia latus minus suum habeat latere minore alterius maius. nam quanto minus habuerit, tanto discedet ab æquipartitione.

Quadratum aūt a r æquatur contento sub a k, c x. nam dimidiū est quadrati a b. Si enim iungatur b c, quia in triangulo rectangulo ducta est à recto angulo perpendicularis b k, & trianguli circa cathetum sunt similes inuicem & toti, quod sub c a, a k continetur, æquatur quadrato a b. quare & contentum sub dimidia ipsius c a & a k, hoc est c x, a k, æquatur dimidio quadrati a b, hoc est quadrato a r. Maius est igitur utrumq; simul utroq; simul. quoniam contentum sub c x, a k, æquatur quadrato a r: & contentum sub a r, r c, maius est contento sub a k, k c. Si autem inæqualibus æqualia addantur, tota fient inæqualia, & maius id quod antea fuerit maius. Contento igitur sub a r, r c si addatur quadratum a r, & cōtento sub a k, k c contentum sub c x, a k: fiet contentum sub a r, r c cum quadrato a r, maius contento sub a k, k c, cum contento sub c x, a k. Verum contentum sub a r, r c cum quadrato a r, æquatur contento sub c a, a r, per secundum theorema secundi libri Elementorū. Et contentū sub a k, k c, cū contento sub c x, a k, æquatur contento sub a k, k x per primum theorema secūdi libri eiusdem. Igitur contentum sub c a, a r, maius est contento sub a k, k x. Cōtento autem sub x k, k a, æquatur contentū sub m k, k c. Supponitur enim, sicut x c ad c k, ita m a ad a k. quare componenti sicut x k, k c ad k c, sic m k ad k a: & contentum sub extremis, æquatur contento sub medijs. Cōtentum igitur sub x a, a k, æquatur contento sub m k, k c. Verum contento sub x k, k a, maius est cōtentum sub a c, a r. Igitur contentum sub a c, a r, maius est contento sub m k, k c. quare maiorem proportionem habet ipsa a c ad c k, quàm m k ad a r. Quoniam enim lineæ quatuor rectæ a c, c k, k m, a r sunt, & contentum sub prima c a, & quarta a r, maius est contento sub secunda c k, & tertia k m: habebit prima a c, ad secundam c k, maiorem proportionem, quàm tertia k m ad quartam a r. Quam autem c a habet ad c k, hanc habet quadratum a c ad quadratum b c. iuncta enim b c. Quia itaq; in triangulo rectangulo ab angulo recto est ducta cathetus, fit sicut a c ad c b, ita c b ad c k. Quare sicut prima a c ad tertiam c k, ita quadratum primæ a c ad quadratum c b. Sicut autem quadratum a c ad quadratum c b, ita quadratum a b ad quadratum b k, nam triangulus a b k

similis est triangulo a b c. Est igitur sicut a c ad c k, ita quadratum a b ad quadratũ b k. At uero a c habet ad c k maiorem proportionem, quàm m k ad a r, & antecedentium dimidia, dimidium quadrati a b, quod est quadratum a r, ad quadratum b k, maiorem habet proportionem quàm dimidia ipsius m k ad ipsam a r, hoc est ipsa m k ad duplam ipsius a r. Verũ quadratum f l æquatur quadrato a r. quoniã ipsa a b posita est æqualis ipsi e f, & ipsa e f est ipsi r a potentia dupla. nam ipsa e l æqualis est ipsi a r. Et ipsa n l dupla est ipsius a r, quia & ipsius l f. Quare quadratum f l ad quadratum b k maiorem habet proportionem, quàm m k ad duplam ipsius a r, quæ est æqualis ipsi l n. maiorẽ ergo proportionẽ habet circulus circa diametrum h f constitutus, ad circulum circa diametrum b k, quàm m k ad n l. quare conus habens basem circulum circa diametrum h f, uerticem uero pũctum n, maior est cono basem habente circulum circa diametrum b d, uerticem uero m punctum. Si enim fecerimus sicut circulus circa diametrum f h, ad circulum circa diametrum b d, ita ipsam k m ad aliam quandam, erit ad minorem ipsa l n. Et erit conus habens basem circulum circa diametrum f h, altitudinem uero rectam minorem inuentam, æqualis ipsi cono m b d: quia eorum bases altitudinibus contrà afficiuntur. Et erit minor cono n h x, quia in eadem base ambo constituti habentur inuicem, uti eorum altitudines. Constat igitur, quod hemisphærium quod est secundum circumferentiam e f h, maius est portione quæ est secundum circumferentiam b a d.

EVTOCII ASCALONITAE COMMENTARII in secundum librum Archimedis de Sphæra & cylindro: expositione discursa Milesio Mechanico Isidoro nostro præceptori

EVTOCII ASCALONITAE COMMENTARII IN MENSVRATIONEM circuli *Archimedis.*



CONSEQVENS igitur fuit mihi, intentum meum prosequenti, qui ex his quæ ab Archimede scripta fuerũt, clarioribus & breuiori disciplina indigentibus inciderim, & ea quæ utcunque in eis discussione indiguerint, pro uirib. continua reddere eis, quæ à nobis in libro de Sphæra & cylindro scripta sunt. Cũ uotum sanè dignũ obtigerit, ut & maioribus, & quib. ampliori cura opus erit, nobis sit insistendũ: erit utiq; propositus nobis deinceps Archimedis libellus, cuius inscriptio est Circuli mensuratio, in quo uiri propositionem ex ipsa superscriptione percipimus. Vult enim ostendere, cui spacio rectilineo sit circulus æqualis, rem longè ante ipsum à clarissimis philosophis quæsitam. Constat enim hoc, id quæsitum esse quod Hippocrates Chius, & Antiphon cum studiosè inuestigassent, eos nobis paralogismos inuenerunt, quos illis exquisitè cognitos existimo qui Geometricam Eudemi historiam inspexerunt, & Ceria Aristotelica acceperũt. Verũ est quidem hic libellus, uti ait Heraclides in Archimedis uita, ad usum uitæ necessarius. Ostendit enim circumferentiam diametro triplam & minus septima parte, plus uero quantum sunt decem septuagesimæprimæ. Hoc autem, dicit, proximè demõstratum est: inuenta quidem uera est talis per quasdam spirales recta linea, quæ sit æqualis circumferentiæ dati circuli.

IN PRIMVM THEOREMA.

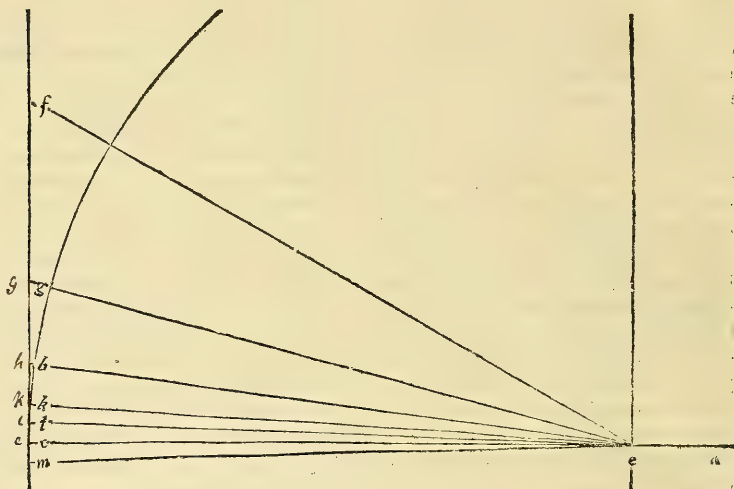
PRimum theorema his qui aliquantulum in mathematicis sint uersati, nullam uidetur habere difficilem perquisitionem, cum ipsa Archimedis uerba palàm exposita sint, & conclusionem propositioni restituant nulla parte neglecta parem. Videtur autem quadam re esse ad demonstrationem abusus, quę res nondum sit demonstrata. Nam exponens triangulum rectangulum, dicit: Habeat latus unum, ambiens angulum rectum, æquale ei quæ ex centro reliquum latus æquale circumferentiæ. Verum rectam circumferentiæ dati circuli æqualem sumere, neq; ante ipsum fuerat ostensum, neq; ab alio traditũ. Considerare tamẽ oportet, nihil præter id quod deceat, ab Archimede scriptum esse. nam circuli circumferentiam esse quandam magnitudinem, nulli prorsus dubium est. Puto autem, & hoc eorum quæ ad unum distant. Est autem rectæ eiusdem speciei, quanquam non utiq; appareat, posse circumferentiæ circuli rectam æqualem præstare. Verumtamen esse rectam quandam ipsi æqualem, à nullo quæsitum est. Quod igitur et ab Archimede propositum est, tale est, triangulum rectangulum qui circa rectũ angulum habuerit latus unum, circumferẽtiæ circuli æquale, uti dictum est. Quare propositum exponens, non ulla utiq; iudicabitur abusione. Admirabilis autẽ magis & istis uidebitur, quod ita supra magnitudinem quæsitorum claram & facilem inuentionem addiderit. Sicut autem dictum est, nulla inquisitione opus est primo theoremati. nam triangulus p o r, quod maior sit figura a f o m, et quod simpliciter circa datum circulum potest figura rectilinea describi, ita ut portiones quę inter circuli circumferentiam & latera circumscriptæ figuræ rectilineæ minores sunt spacio dato, apertè dictum est in his quæ in primo de Sphæra & cylindro conscripsimus.

IN TERTIVM THEOREMA.

IN hoc theoremate continenter iubemur, numero quocunq; dato radicem quadratam inuenire. Hanc autem in numero nõ quadrato præcisam inueniri non est possibile. Numerus enim in se multiplicatus producit quendam numerũ quadratum: partes autem in se multiplicatæ, non explent numerũ, sed partes. Quemadmodum uero oporteat radicem proximè producentem datum numerum inuenire, dictum est ab Herone in metricis, dictum & à Pappo & Theone, & à multis alijs, qui magnam Claudij Ptolemæi compositionem exposuerunt. Quare nõ est opus in hoc nos laborare, cũ liceat studiosis illud ab illis petere. Et angulus c e f, est tertia pars recti. Si enim hexagoni circumferentiã bipertientes, eius dimidium ad tertiæ separantes iunxerimus ipsam e f, erit angulus c e f, tertia recti. nam circũferentia ad c assumpta, cum sit dimidia circũferentiæ hexagoni, est duodecima circuli pars. quare & angulus c e f, qui est ad centrum, est duodecima pars quatuor rectorum. quare est tertia unius recti. Igitur e f habet ad f c proportionem, quam 306 ad 153. Quod autem e f sit ipsius c f dupla, hinc manifestum est. Si enim expro ducentes ipsam f c in c, & æqualem ei constituentes iunxerimus ab ipso e, erit angulus apud e duæ tertiæ recti, & angulus ad f duæ tertiæ recti. Igitur trianguli æquilateri est dimidium triangulus c e f, & quia basis æquilateri æquatur ipsi e f, bipertietur puncto c. igitur e f est dupla ipsius f c. Habet autem ipsa e c ad c f proportionem, quam 265 ad 153. quia enim e f ponitur 306. Si ipsa in seipsam multiplicetur, fient 93636. Ipsa autem c f est 153. quare quadratum eius erit 23409. Quoniam igitur quadratum e f æquatur quadratis harum e c, c f, si à quadrato e f quod est 93636. auferamus quadratum ipsius c f, 23409. relinquetur quadratum e c, quod est 70227. Cuius latus quadratum est 265. Et item pars quædam minima & insensibilis. Deficit enim potentia horum 265, à præciso duab. unitatibus. Multiplicationes autem subijciuntur. Diuidatur itaq; angulus e f c in duo æqua; ducta e g. Est igitur sicut f e ad e c, ita f g ad g c, per tertium theorema sexti libri E-

 lementorum

lementorũ Euclidis: & cōponēti, ſicut utraq; ſimul f e, e c ad e c, ita f c ad c g. Et permutatim, ſicut utraq; ſimul f e, e c ad f c, ita e c ad c g. Eſt autem utraq; ſimul e f, f c maior, quàm 571. Eſt autem f c, 153. Igitur utraque ſimul f e, e c ad e c, maiorem ha



bet proportionem, quàm 571 ad 153. quare e c ad c g maiorem proportionem habet, quàm 571 ad 153. Igitur e c ad g c potentia habet maiorem proportionem, quàm 349450 ad 23409. Concludetur autem hoc ita. quoniam enim oſtenſum eſt, quod e c ad c g maiorem habet proportionem, quàm 571 ad 153. ſi quis poſuerit ipſam e c eſſe 571, & ipſam c g 153, erit quadratum ipſius e c 326041. & quadratũ c g 23409, cum utraq; ſimul ſint æqualia, quadrato ipſius e g, quod eſt 349450. huius radix quadrata eſt 591, & $\frac{1}{8}$ proxime. nã quadratus huius 591 $\frac{1}{8}$ deeſt à præciſo una & uiginti unitatibus & 59 ſexageſimis quartis. Igitur e c ad c g habet potentia proportionē, quam 349450 ad 23409. longitudine uero, quam 591, & $\frac{1}{8}$ proxime ad 153. Multiplicationes autem ſubijciuntur.

Rurſus in duo æqua diuidatur angulus g e c ducta h e, eadem ratione ipſa e c habebit ad c h maiorem proportionē, quàm 1162 $\frac{1}{8}$ ad 153. Fit enim per bipertitionem anguli, ſicut e g ad e c, ita g h ad h c. Et componenti, ſicut utraq; ſimul g e, e c ad e c, ita g c ad c h: & permutatim, ſicut utraq; ſimul g e, e c ad g c, ita e c ad c h. Et eſt quidem e c, 571, & pars quædam. At uero e g 591, & amplius quædã pars maioris. igiť ſunt 1162 $\frac{1}{8}$. Eſt aũt g c 153. igitur utraq; ſimul g e, e c ad g c maiorem proportionem habet, quàm 1162 $\frac{1}{8}$ ad 153.

Item h e, habet ad h c maiorem proportionem, quàm 1173 $\frac{1}{8}$ ad 153. quoniam enim oſtenſum eſt e c habere ad h c maiorem proportionem, quàm 1162 $\frac{1}{8}$ ad 153. Si quis ſuppoſuerit eas ſic habere, erit quadratum e c 1350534, & $\frac{3}{6}\frac{3}{4}$. quadratum uero c h 23409. Quadratum ergo e h æquale quadratis harũ e c, c h erit 1373943, $\frac{3}{6}\frac{3}{4}$ cuius latus eſt 1172 $\frac{1}{8}$ proxime. nam deeſt à præciſa potentia ipſius unitatibus 66, multiplicationes uero ſubijciuntur.

Item angulus h e c diuidatur in duo æqua, ducta e k. Igitur e c ad c k maiorem proportionē habet, quàm 2304 $\frac{1}{4}$ ad 153. Rurſus enim propter bipertitionem an

gu-

guli h e c erit sicut h e ad e c, ita h k ad c k. Et componenti, sicut utraque simul h e, e c ad e c, ita h c ad c k. Et permutatim, sicut utraque simul h e, e c ad h c, ita e c ad c k. Et quia ostensum est ipsam h e esse $1172\frac{1}{8}$. utraque ergo simul h e, e c, maior erit isto $2334\frac{1}{4}$. & h c ponitur 153. Igitur utraque simul h e, e c ad h c maiorem habet proportionem, quàm $2334\frac{1}{4}$ ad 153. Igitur e k ad c k maiorem habet proportionem, quàm $2339\frac{1}{4}$ ad 153. Item quoniam supponit e c $2334\frac{1}{4}$, erit quadratum ipsius e c $5448723\frac{3}{16}$. Quadratum uero ipsius c k 23409. Istis autem æquatur quadratum k e, quod erit $5472232\frac{3}{16}$. cuius latus quadratum est proxime $2339\frac{1}{4}$. deest ab eius præciso quadrato unitatibus $41\frac{1}{2}$. multiplicationes uero subijciuntur.

Item diuidatur angulus k e c in duo æqua, ducta e l. Igitur e c ad e l maiorē habet proportionem, quàm $460\frac{1}{2}$ ad 153. Rursus enim propter bipartitionem anguli sicut k e ad e c, ita k l ad l c. Et componenti, sicut utraq; simul k e, e c ad e c, ita k c ad l c. Et permutatim, sicut utraq; simul k e, e c ad k c, ita e c ad l c. & k e est $2339\frac{1}{4}$. & pars insuper quædam. & e c, $2334\frac{1}{4}$, & particula insuper quædam. Igitur utraque simul k e, e c ad k c maiorem proportionem habet, quàm $4673\frac{1}{2}$ ad 153. Sicut autem utraq; simul k e, e c ad k c, ita e c ad c l. Igitur e c ad c l maiorem proportionē habet, quàm $4673\frac{1}{2}$ ad 153. Quoniam igitur angulus f e c existens tertia pars recti, est duodecima pars quatuor rectorum, eius dimidium erit g e c pars uigesimaquarta, cuius item dimidium h e c erit quadragesimaoctaua, atque item huius dimidium k e c erit nonagesimasexta. rursus huius dimidium centesima nonagesimasecunda. Ponatur, uti dicit, angulus c e m æqualis ei, & educatur f c ad m. Angulus igitur l e m existens duplus anguli l e c, erit nonagesimasexta rectorum quatuor. quare ipsa l m erit latus polygoni habentis latera 96 circa circulum descripti. Quoniam igitur e l ad c l ostensa est habere maiorē proportionem, quàm $4673\frac{1}{2}$ ad 153. & est ipsa a c dupla ipsius e c, & l m ipsius l c. Igitur a c ad l m habet maiorē proportionem, quàm $4673\frac{1}{2}$ ad 153. Econuerso igitur l m ad a l minorem habet proportionem, quàm 153 ad $4673\frac{1}{2}$. Et quoniam l m est latus polygoni habentis latera 96, igitur ambitus polygoni erit 14688. nam 96 multiplicatus in 153 dictum numeri producit. Igitur ambitus polygoni habet ad diametrum a c minorem proportionem, quàm 14688 ad $4673\frac{1}{2}$. Ambitus ergo polygoni erit triplus diametro circuli, & insuper $667\frac{1}{2}$. hic autem minor est, quàm pars septima ipsius diametri. Hic enim septies sumptus producit $4672\frac{1}{2}$ qui minor est diametro unitate. Quoniam igitur polygoni ambitus minor est quàm triplus sesquiseptimus diametro, & circuli ambitus sit minor ambitu polygoni: multo magis igitur circuli circumferentia est minor, quàm tripla sesquiseptima.

Deinceps uero construens reliquam partem theorematis, dicit: Esto circulus circa diametrum a c, & tertia pars recti angulus b a c. Hoc autem erit, si à puncto c sumpta c b, æquali lateri hexagoni iungamus a b. Nam angulus in circumferentia hexagoni ad centrum factus est duæ tertiæ recti, in circumferentia uero trigoni est quatuor tertiæ recti. Quoniā igitur angulus a b c est rectus, & angulus b a c est tertia recti, erit angulus a c b duæ tertiæ recti. Si ergo educentes ipsam c b ad b, & æqualem ei sumpserimus, & ab a iunxerimus e a, fiet triangulus æquilaterus. Et quia a b cathetus est, & bipertitur basim, erit a c æqualis ipsi c b. Si rursus sumpserimus ipsam a c 1560, erit ipsa c b 780. Et quadratum a c 2433600. & quadratum ipsius c b 608400. Et si auferamus quadratum c b à quadrato a c, relinquetur quadratum a b 1825200. cuius latus quadratum 1351 proxime. excedit enim præcisum sola unitate. propterea dixit ipsam a b minorē habere ad b c proportionem, quàm 1351 ad 780. multiplicationes uero subijciuntur.

Diuidatur in duo ęqua angulus b a c, angulo a f g. Quoniā igitur angulus b a g æqua-

æquatur angulo g c b, nam in eadem circumferentia consistunt: item æquatur angulo g a c: igitur angulus g c b est æqualis angulo g a c. & angulus a g c communis est rectus: igitur reliquus g f c, reliquo a c g æqualis. igitur triãguli a g c & c g f sunt inuicem equianguli, & similes. Igitur sicut a g ad g c, ita c g ad g f, & a c ad c f. Nam triangulorum similiũ latera æquos angulos complexa, sunt proportionalia. Verum sicut a c ad c f, ita utraque simul c a, a b ad c b, & a g ad g c. quia enim angulus b a c in duo æqua diuiditur, ducta a f erit sicut b a ad a c, ita b c ad c f. Et permutatim, sicut utraq; simul b a, a c ad b c, ita a c ad c f. Et est a b minor quàm 1351, & a c 1560, & b c 780. igitur utraq; simul a b, c b minorem habet ad b c proportionem, quàm 2911 ad 780. igitur a c ad c f habet minorem proportionem, quàm 2911, & 780. sicut autem a c ad c f, ita a g ad g c. igitur a g ad g c minorem habet proportionem, quàm 2911 ad 780. Ex his igit erit quadratum a g 8473921. quadratum g c, 608400. Et quadratum a c est eis æquale. Erit igitur ipsum 9082321, cuius latus est tetragonicum proxime. nam excedit præcisum quadratum unitatibus 368 $\frac{1}{6}$. Eadem ratione dicit a c ad c g minorem habere proportionem, quàm 3390 $\frac{1}{4}$ ad 980. multiplicationes autem subijciuntur.

Diuidatur in duo æqua angulus c a g, ducta a h. propter bipartitionem igitur anguli & similitudinem triangulorum, & proportionalitatem laterum & componenti, & permutatim, sicut utraq; simul g a, a c ad g c, ita a h ad h c. & supponebatur a c minor quàm 2911. & ipsa a c minor quàm 3013 $\frac{3}{4}$. igitur utraq; simul g a, a c minor est quàm 5924 $\frac{3}{4}$. ipsa uero g c est 780. igitur utraq; simul g a, a c ad g c minorem habet proportionẽ, quàm 5924 $\frac{3}{4}$ ad 780. quare & a h ad h c minorem proportionem habet, quàm 5924 $\frac{3}{4}$ ad 780. quare a h ad h c minorẽ proportionem habet quàm 455 $\frac{3}{4}$ ad 60. nam utraq; utriusq; est pars, & horum quadrupli ipsa a h ad h c minorem proportionem habet, quàm 1823 ad 240. propter hoc enim dicit, quod utraque utriusq; est $\frac{4}{13}$. Et quoniam a h est 1823, erit quadratum eius 3323429. Est autem h c 240, & eius quadratum 57600. & est istis quadratis a h, h c æquale quadratũ a c. Erit igitur 3380429, cuius latus quadratum est 1838 $\frac{9}{11}$. nam huius quadratum excedit, uerum quadratum unitatibus 321 propè. quare a c ad h c minorẽ habet proportionem, quàm 1838 $\frac{9}{11}$ ad 240. multiplicationes uero subijciuntur.

Item in duo æqua diuidatur angulus h a c ducta k a. Rursus propter bipartitionem anguli, & similitudinẽ triangulorũ, & proportionalitatem laterũ, et componẽti, & permutatim, sicut utraq; simul h a, a c ad c h, ita a k ad k c. Verũ utraq; simul h a, a c minor est, quàm 3661 $\frac{9}{11}$. Quoniam enim h a supponit 1823, & a c 1838 $\frac{9}{11}$. Est autem h c 240. Igitur utraq; simul h a, a c ad h c habet minorem proportionem, quàm 3661 $\frac{9}{11}$ ad 240. quare & a k ad k c minorem habet proportionem, quàm 3661 $\frac{9}{11}$ ad 240.

igitur a k ad k c minorem proportionem habet, quàm 1007 ad 66. & quadratum a k 1014049. quadratum uero k c est 4356: quibus æquatur quadratum a c. igitur erit 1018405, quorum latus quadratum est 1009 $\frac{1}{6}$ proximè. nam eius quadratum superat præcisum unitatibus 12 & $\frac{1}{63}$. Igitur a c ad c k minorem proportionẽ habet, quàm 1009 $\frac{1}{6}$ ad 66. multiplicationes autem subijcientur.

Item diuidatur in duo æqua angulus k a c ducta a l eadem ratione, sicut utraq; simul k a, a c ad k c, ita a l ad c l. & est a k minor quàm 1007, & a c minor quàm 1009 $\frac{1}{6}$, & k c 66. Igitur utraq; simul k a, a c, ad k c minorem proportionẽ habet, quàm 2016 $\frac{1}{6}$ ad 66. Igitur a l ad l c minorem proportionem habet, quàm 2016 $\frac{1}{6}$ ad 66. Et quoniam a l supponitur esse 2016 $\frac{1}{6}$ erit eius quadratum 4064928 $\frac{1}{36}$. Et ipsa l c est 66, cuius quadratũ est 4356: æquale uero ipsis ambobus simul quadratum

a c

a c 4 0 6 9 2 8 $\frac{1}{36}$. cuius radix quadrata est 2 0 1 7 $\frac{1}{4}$ proximè. nam quadratum eius excedit præcisum unitatibus 1 3 $\frac{6}{20}$. quare a c ad c l habet minorem proportionem, quàm 2 0 1 7 $\frac{1}{4}$ ad 6 6. multiplicationes autem subijcientur.

Quoniam igitur a c habet ad c l minorē proportionem, quàm 2 0 1 7 $\frac{1}{4}$ ad 6 6. Ecō uerso igitur c l ad c a habet maiorem proportionem, quàm 6 6 ad 2 0 1 7 $\frac{1}{4}$. et quoniā circūferētia c b est sexta pars circuli: erit igit̄ ipsa g c pars duodecima, et ipsa h g uigesimaquarta, & ipsa k c quadragesimaoctaua, & ipsa l c nonagesimasexta. Ambitus ergo polygoni ad diametrum circuli maiorem proportionem habet, quàm 6 3 3 6 ad 2 0 1 7 $\frac{1}{4}$. Hæc autem sunt tripla. etiam supererant 2 8 4 $\frac{1}{4}$, qui quidem minor est decem septuagesimis primis, quarum una est 2 7 $\frac{2}{3}$ proximè. Harum decuplus est 2 7 7. multo magis ergo circumferētia circuli maior est diametro sua, quàm tripla super decies partiens septuagesimas primas. Quemadmodum igitur numeri ab eo positi partiuntur, mediocriter declarati sunt. Sciendum quod Apollonius Pergeus Mocyntocio demonstrauit idē, per alios numeros ducens ad maiorem propinquitatem. id quidem diligētius factum & exquisitius uidetur, nihil autem confert ad Archimedis propositum. Diximus enim, eum in hoc libello proposuisse, se inuenturum propè propter uitæ utilitates. Quare neque Sporus Nicenus percipitur opportunè Archimedem accusare, quod non exquisitè ab eo traditum sit cui rectæ lineæ circuli circumferentia sit æqualis. Ex quib. ipse in Cerijs dicit, præceptorem suum Philonem ~~Apogadarum~~ ad numeros diligentiores rem hanc adduxisse, quàm Archimedes. Omnes enim ex ordine habentur, & uidentur eius propositum nō cognouisse. Vtuntur tamē multiplicationibus myriadū, & diuisionibus, quibus non est facile assequi inductum, & rationibus magnis. Si quis uero uoluerit omnino ad minuta magis hācrem adducere, utatur licet his quæ in compositione mathematica à Claudio Ptolemæo tradita sunt, uel quæ sequuntur ex illis per partes & minutissimum calculum, & per rectas in circulo sitas. Et ego utiq; hoc iam fecissem, nisi quod sæpe dixi, intellexissem, quòd per ea quæ dicta sunt, non potest ad exquisitissimū perueniri, ut inueniatur recta linea, quæ sit circūferentiæ circuli dati ęqualis. Quanquam proximè quis ac ferè habuerit eam. Et quæ ab Archimede sunt hic dicta, sufficiant.

cist ex Gadaris.

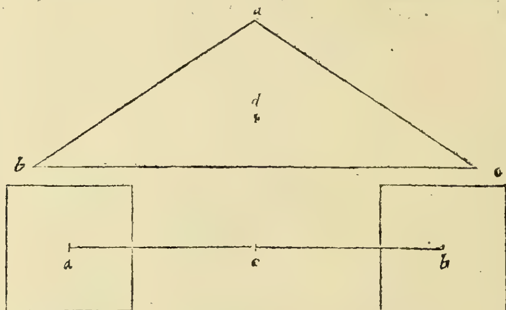
EVTOCII ASCALONITAE COMMENTARII in Circuli mensurationem, editione asscripta Milesio Mechanico Isidoro nostro præceptori.

EVTOCII IN PRIMVM THEOREMA AEQVEPONDERAlium *Archimedis.*

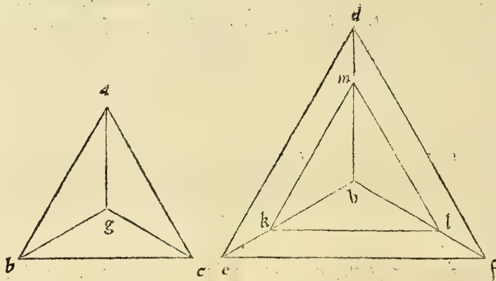


OMENTVM ipsum, ô generosissime Petre, commune grauitatis & leuitatis esse genus, & Aristoteles asserit, & Ptolemeus eum sequutus. Timæus uero apud Platonem, momētum omne dicit grauitate produci. nā existimat leuitatem priuationē quandam esse. quorum opiniones licet disciplinarū studiosis legere, & ex Ptolemæi libro quem de Momentis conscripsit, & ex naturalibus negocijs Aristotelis, & ex Timæo Platonis, & ex his qui illos exposuerūt. Archimedes uero in hoc libro cētrum ponderis figuræ planæ existimat id, ex quo

suspensa manet æquedistãs horizonti, duorum uero uel plurium planorũ centrũ ponderis, hoc est grauitatis, à quo libra suspensa stat horizonti æquedistãs: ut puta sit triangulus a b c, & in medio eius punctum quoddam d, à quo suspensum maneat æquedistãs horizonti. Constat igit̃ quod partes a b c sibi ipsis æquepõderabunt, & nulla tẽdit altera magis ad horizõtem. Similiter autem & posita libra a b, & suspensis ex ea magnitudinib. a b, si suspẽsa libra ex c habeat partes a b æqueponderantes, manebit æquedistãs horizonti, & erit centrum suspensionis magnitudinum a b pũctum c. Bene uidetur Geminus de Archimede dicere, quod dignitates petitiones appellat. nam æqualia grauia ex æqualibus distantijs aut lõgitudinibus æqueponderare dignitas est, & quæ sunt conuenienter. Et sunt clara omnia, his qui ea moderatè inspiciunt.

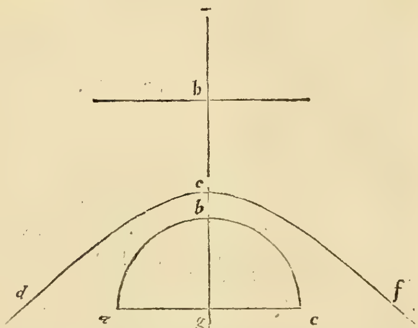


Aequalibus inquit, & similibus planis inuicem coaptatis, & eorũ centra grauitatis inuicem coaptabuntur. Omnes enim eorũ partes coaptabũtur: inæqualiũ uero & similium centra grauitatis erunt similiter sita. Intelligantur autem, uti in subiecta descriptione trianguli a b c, d e f inæquales & similes. & centrum grauitatis ipsius a b c sit g, ipsius uero d e f sit h: & iungantur a g, b g, c g, d h, e h, f h. Dico igitur, quod per æqualia diuidant angulos lineæ ductæ ab ipso g uel h puncto ad angulos. Fiat enim sicut e f ad b c, ita e h ad h k, & f h ad h l, & d h ad h m. Et iungãtur m k, k l, l m. erit iam k l m triangulus similis triangulo d e f. Quoniam enim est sicut e h ad h k, ita h f ad h l: erit e f ęque distans ipsi k l, & similiter m k ipsi e d, & ipsa d f ipsi l m. Igitur triangulus d e f similis est triangulo k l m. Est igitur sicut d e ad m k, ita e f ad k l, & f d ad l m. Supponitur autem propter similitudinem triangulorũ, esse sicut d e ad a b, ita e f ad b c, & d f ad a c. Sunt igit̃ latera a b c æqualia lateribus k l m, quare aptatur unumquodq; unicuiq;. Igitur triangulus a b c, est similis & æqualis triangulo k l m, quare coaptabitur centrum ipsius a b c, in centrũ ipsius k l m. Ipso autem g coaptato in h, & latera a b c coaptabuntur in k l m, & ipse a g, b g, c g in ipsas h k, h l, h m: & facient angulos ad k l m æquales angulis in triangulo a b c. quare & in ipso d e f. Sunt enim eædem rectæ, quæ à puncto h ad d e f, & ad k l m iunctæ fuerunt.



Cuiuscunq; figuræ cuius ambitus in eadem caua consistit, centrum grauitatis intra figuram contineri necesse est. Quas appellat in eadem cauas lineas, iam dictum est à nobis in procemijs de Sphæra & cylindro. Quoniam enim figura quæ ha-

habet ambitum in eadem cauum, partes omnis plani inter ambitum suum complectitur, & angulos. Constat quod & centrum grauitatis intra ipsam figuram continetur. in quibusdam enim figuris centrum est extrà, in quibusdam in limbo. In semicirculo enim a b c centrum figuræ est g. in hyperbole autem d e f, cẽtrum figuræ est extrà, ubi diametri concurrunt inuicem, sicut habet h. Hęc enim dicta sunt in secundo libro Conicorum Apollonij. Verũtamen et in figura a b c, & in d e f, centrum grauitatis, à quo uidelicet figura suspensa maneat æquedistans horizõti, est intra ambitum. nam si foret in ambitu, aliquid extrà in alteram partem tenderet, quod non supponitur.



IN SECVNDVM.

Esto centrũ grauitatis d, si esse potest. Quod enim sit in a b, ostensum est. nam suprà dictum est, quod duarum magnitudinum centrum est, à quo libra suspensa partes habet ęqueponderantes: & æquedistãs manet horizonti. quare centrum magnitudinum a b est in ipsa a b.

IN QVINTVM.

AVt enim quod ab ipso a b maius est ipso c, ita ut æqueponderet, aut non. Hoc dictũ rectè intelligere oportet, non utputa quod magnitudo a b sit omnino maior c: sed posita maior, aut secundum æqueponderãtiam. Potest enim fieri, quod minor magnitudo magis ponderet quàm maior, per longitudinem libræ quæ maior admodum existat, & proportionem faciat inæqualem. Et auferatur ab ipso a b minus excessu, quo a b maius est ipso c, ita ut æqueponderent: ita ut reliquum, puta a sit cõmensuratum ipsi c. Oportet, inquit, auferre ab ipso a b magnitudinem quandam b: puta quod faciat reliquum a commensuratum ipsi c, & maius ipsum a ipso c secundum æqueponderationem. Hoc autem fieri potest per ea quæ in principio libri decimi Elementorum Euclidis dicta fuerunt, & in tertio Sphæricorum Theodosij.

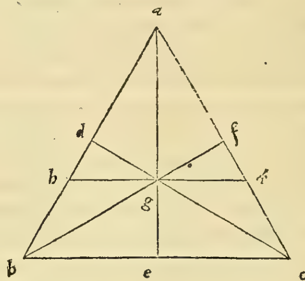
IN VNDECIMVM.

ET iungantur hæ, e f, g k, l m. cadent iam ipsæ iuxta ipsam b c. Quoniã enim ipsa b o est æqualis ipsi z c, & ipsa d b ipsi d c, erit sicut d b ad o b, ita d c ad z c. & diuidenti, sicut d o ad o b, ita d z ad z c. Verum sicut d o ad o b, ita a e ad e b. nã e o est iuxta ipsam a d. Sicut autem d z ad z c, ita a f ad f c. Igitur sicut a e ad e b, ita a f ad f c. Igitur e f est æquedistans ipsi b c. Similiter autem ostendẽtur & reliquæ.

Ipse a d c ad omnis triangulos ab ipsis a m, m k, k f, f c descriptos, similes ipsi a d c eam habent proportionem, quam habet c a ad a m. eoq; rectæ sunt æquales. Quoniam enim trianguli a d c, a f m sunt similes, habebunt inuicem proportionem a c ad a m duplicatam. Quoniam uero nunc supponitur, ipsam a c ipsius a m quadruplam esse, triangulus a d c habebit ad triangulum a f m, sicut sexdecim ad unum, & ad triangulos omnis ab a m, m k, k f, f c descriptos, proportionẽ habet, quam sexdecim ad quatuor. Igitur proportionaliter est, sicut triangulus a b c, ad triangulos ab a m, m k, k f, f c, similes ipsi a d c, ita ipsi trianguli ad ipsum a f m. Hoc est c a ad a m. Sunt enim similes, & in basibus æqualibus, & propterea inuicem æquales, quia habent ad inuicem sicut eorum bases. Verum c a ad a m ma-

iorem proportionẽ habet, quàm u r ad r h. Proportio enim a c ad a m eadem est proportioni u r ad r p. Si enim intelligantur u r, c d eductæ & concurrentes in parallelas, erit sicut u r ad r p, sic c d ad d ω. Verum sicut c d ad d ω, ita c a ad a m. sicut ergo c a ad a m, ita u r ad r p. Habet autem u r ad r p maiorem proportionẽ, quàm u r ad r h. Igitur c a ad a m habet maiorem proportionem, quàm u r ad r h. Quod sanè esse non potest. nam lineæ rectæ ductæ per q iuxta ipsam d a, in eadem erunt centra hęc scilicet in alterã partẽ, & tendẽt uidelicet in illud omnis magnitudines, & non æqueponderabunt: quod est commune positum. nam centrum parallelogrammorum positum est r, & triangulorum q.

Si enim educas istas c d g, f e g, b a g, constat quod in idem punctũ ueniunt. eductis enim b a g, f e g, & concurrentibus inuicem in puncto g, & ipsa c d concurret in idem. Est autem sicut b g ad g a, ita f g ad g e, & b f ad a e, & f c ad e d, & c g ad d g. Erit iam trianguli b d c centrum grauitatis in ipsa h m. quoniam ipsa a b est tertia pars b h. Esto triangulus a b c, & iũgantur ab angulis ad bipartitiones laterũ rectæ a e, b f, c d. Igitur centrum grauitatis trianguli a b c est g. Et manifestũ, quod omnes trianguli sunt inuicem æquales. quoniam omnes rectæ ab angulis ad bipartitiones laterum iunctæ per g transeunt, ne eiusdẽ plura centra existant. Quoniam autem a d, d b, b e, e c, c f, f a ęquales sunt, trianguli erunt æquales, qui habent uerticem punctum g, bases uero dictas rectas. Quare a g b triãgulus, duplus est triangulo g b e. quare & a g ipsius g e. Si igitur per g iuxta ipsam b c duxerimus ipsam h k, erit a h dupla ipsius h b. Quare uniuersaliter, si unũ latus trianguli secetur, ita ut portio ad uerticem sit dupla portioni ad basim, & per sumptum punctum ducatur æquedistans ipsi basi: in ipsa ducta erit centrum grauitatis trianguli illius.



FINIS PRIMI EVTOCII.

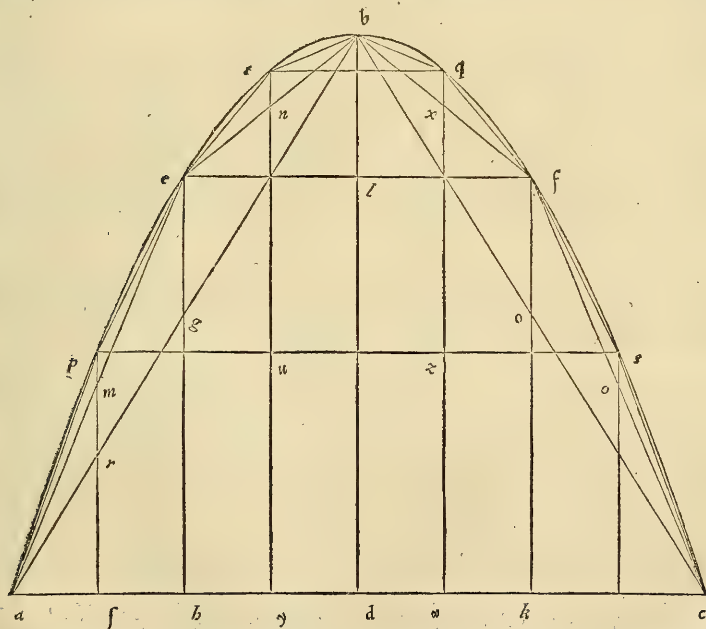
EVTOCII IN SECVNDVM AEQVEPONDERANTIVM *Archimedis*.



CVM diligenter ea quæ in primo libro habentur percurrimus, & inspectu difficilia satis declarauerimus: necessariũ duximus, & quæ in libro secũdo obscurè dicta sunt, pro modo explicare. Dicit itaq; in propositione primi theorematis: Supponãtur spacia a b, c d contenta à recta & sectione rectanguli coni, quæ possimus iuxta rectam datam applicare. hoc aũt non licet inde per ea quæ istic demonstrata sunt inuenire. Quoniã aũt ostensum est sibi, ueluti in libro de Sphera & cylindro dixit, quod figura huiusmodi est sesquitertia triãgulo habẽti basem, & altitudinem cum portione eandem: plano uero existẽte rectilineo sesquitertio, trianguli æquale possumus iuxta rectã datam applicare, constat quod & figuris huiusmodi. Quæ uero in apparatu dicta sunt, omnia clara per quartum theorema primi istorum libri.

IN SECVNDVM.

IN ſecundo theorematе prædicit quædam declarantia, quo pacto in ſectione rectanguli coni figura cognitæ poſſit inſcribi. Et dicit, hæc oſtendenda ſunt in ordinibus. Quoniam igitur dictum obſcurũ eſt, neceſſe eſt pauca quædam de eo dicere ex Conicis Apollonij inuēta. Eſto figura cōtenta ſub parabola a b c, & recta a c, cuius ſit diameter b d. Conſtat quod uertex portionis eſt punctum b. Vertices uero appellat Apollonius, terminos, qui ſunt ad rectas diametrorum. Si iam iunxerimus has a b, b c, erit triãgulus a b c, qui baſem habeat cũ portione eandẽ, & altitudinem æqualem: ductã à puncto b ad ipſam a c perpendicularẽ. Sic enim omnino b d eſt axis, ſi ſumentes uertices portionũ a b, b c, ipſos e, f, & per ipſos duxerimus parallelas ipſi b d, puta e g, f o, erũt ipſę diametri portionũ a b, b c. Oſtẽſum eſt enim in parabola, quod omnes ductæ æquediſtãtes iuxta diametrũ ſunt diametri ſectionis. erũt iam e, f uertices portionũ: & quæ per e, f applicatę æquediſtãtes ipſis a b, b c: erit & e l f iuxta ipſam a c. Quoniam itaq; e h, f k ſunt inuicẽ æquediſtãtes, & exiſtentes diametri æquales æqualiũ portionũ, & coaptatæ inuicẽ uti in ſexto Conicorũ oſtẽſum eſt: & quoniã e g h eſt æquediſtãs ipſi b d, erit ſicut b g ad g a, ita d h ad h a. Eſt aũt b g ęqualis ipſi g a. nã e g ſecat eã in duo æqua æquediſtãtem applicatę cõtingenti. igitur d h eſt ęqualis ipſi h a. Et eadem ratione d k ipſi k c eſt æqualis. Tota uero a d eſt æqualis toti d c. igitur d h eſt ęqualis ipſi d k: et ex hoc e l ipſi l f. Quare uerißimè dictũ eſt, quod recta iũgẽs uertices portionũ, æquediſtãs erit baſi portionis, & in duo æqua diuidetũ à diametro portionis. Iunganẽ



quoq; a e, e b, b f, f c. & diuidãtur in duo æqua pũctis m, n, x, o, & ducanẽ per pũcta m, n, x, o iuxta ipſam b d iſtæ p m r ſ, t n , q x z ω s o iungãtur a p, p e, e t, t b, b q, q f, f s, s c: & h ę t a q, p b c d z s. Cõſtat iã ex iſtis ante demõſtratis, quod t q, et e f, & p s ſunt æquediſtantes ipſi a c: & quod t a eſt qualis a q & p d ipſi d s. Dico quod hæ ſecãt ipſam b d in numeros conſequenter impares: hoc eſt, cuius b a ſit

unum,

unum, eius erit a l tria, & l d quinque, & d d septem: quoniam a g est æqualis ipsi g b, & e h est æquedistans ipsi b d, erit a h æqualis h d. igitur d a dupla est ipsius d h: quare & ipsius e l. Igitur quadratũ a d quadruplum erit quadrato e l. Sicut autem quadratum a d ad quadratum e l, ita ostensum est esse b d ad b l. quare b d quadrupla est ipsius b l. igitur d l tripla est ipsius b l. Cuius igitur b l est unum, eius erit d l tria: & eadem ratione cuius b l fuerit quatuor, eius erit ipsa d l duodecim. & quoniam e n est æqualis ipsi n b, & e f ipsi f l, & h u ipsi u d, igitur e l dupla est ipsius l f, hoc est ipsius t a. igitur quadratum e l quadruplum est quadrato t a. igitur b l quadrupla est ipsius b a. quare l a tripla est ipsius a b. quorum igitur ipsa l b est quatuor, erit ipsa b a unum: et quorum ipsa l a tria, erit ipsa l d duodecim. Rursus quoniam a m est æqualis ipsi m e, & a k ipsi k g, & a s ipsi s h: erũt igitur a s, s h, h u, u d inuicem æquales: quorum igitur a d est quatuor. eorum s d est tria, hoc est ipsa p d. quorum igitur quadratum a d est sexdecim, horum quadratum p d est nouem: quorum igitur b d est sedecim, eorum est nouem b d, & residua d d septem. Quoniã igitur ostensum est, quorum b d est sedecim, eorũ b a esse unum; & a l tria, & d d septem: erit igitur residua l d quinque. Diuiditur ergo ipsa b d ab æquedistantibus in numeros consequenter impares, ea quæ ad uerticem portionis est parte ab unitate denominata. Cõstat igitur ex descriptione, quod ductæ à diametris in numeros ab unitate cõsequenter dispositos excrescunt. Cuius enim est t a unum, eius est e l duo, & p d tria, & a d quatuor. Cum enim sint omnes æquedistantes, secãtur in æqualia. Appellatur autem ab Archimede figura a p e t b q f s c, cognitæ inscripta.

IN TERTIVM.

SImiles portionum sectiones coni Apollonius diffiniuit in sexto libro Conicorum illas, in quibus si ducantur in unaquaque æquedistantes basi æquales numero æquedistantes, & bases ad abscisas ab ęquedistantibus uersus uerticem partes diametrorum in eadem proportione erũt, & abscisæ ad abscisas, & quod parabolæ omnes sunt similes inuicem. Figura uero cognitæ inscripta, quid sit, dictũ est in præsumpto limmate. Hoc autem similiter diuidere diametros est, ut portiones earum eandem habeant proportionem. Residuum uero theorematis est clarum ex prædicta figura.

IN QVARTVM.

INscribatur rectilinea figura cognitæ in portione, ita ut circumcisæ partes sint minores ipso k. hoc autem manifestum est ex prædictis, in secundo Stichiosis ordinationis, & in primo de Sphæra & cylindro.

IN QVINTVM.

ET quoniam h f g i est parallelogrammum, &c. quoniam enim hæ k f, l g sunt æquales. Sunt enim portionũ æqualium diametri, & æqualiter ab axe distãtes a b d, & similiter diuiduntur à centris h i, erit sicut k h ad h f, ita l i ad i g, & permutatim. & idcirco h f est æqualis ipsi g i. est autem & æquedistans ei. nã omnes diametri parabolæ sunt æquedistantes: igitur ipsum h f g i est parallelogrammũ.

IN SECVNDAM PARTEM QVINTI.

ERit itaque magnitudinis compositæ ex utrisque a k b, b l c portionibus centrum grauitatis q. & compositæ ex utrisque a k b, b l c triangulis, est centrum c, &c. Ostensum est enim in præsumpto, quoniam h m iungens centra portionum, bipartitur ab ipsa b d puncto q, cum sit ipsi f g æquedistans: & g h bipartitur puncto t. quare t est centrum grauitatis magnitudinis, compositæ ex triangulis a k b, b l c. Quoniam igitur triangulus b a c maiorem proportionem habet ad triangulos a k b, b l c, quàm ad portiones, & reliqua. Quoniam enim ostensum est, trianguli a b c centrum grauitatis esse e: & triangulorum a b k, b l c centrum t, manifestũ est quod rectilinei a k b l c centrum grauitatis est in t e, diuisa puncto R secundũ

mu-

mutuam proportionē, quam habet triangulus a b c, ad triangulos a k b, b l c. quoniam aūt triangulus a b c maiorem proportionē habet ad triangulos a k b, b l c, ꝙ ad portiones: nam portiones ſunt triangulis maiores: cōſtat quod ſi ſecuerimus ipſam et i n proportionē quam habet triangulus ad portiones, punctū ſectionis cadet ſuperius ꝙ ſit R: quod erit centrū totius portiōis, propter mutuā affectionē.

IN SEXTVM.

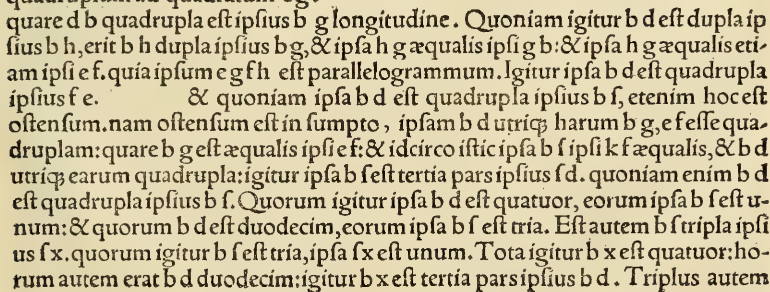
Centrum portionis eſt omnino unum, & propinquius uertici portionis, ꝙ centra inſcriptarum rectilinearum. Nam trianguli a b c centrum grauitatis eſt, ſi contingat e, ipſa b d, ita diuiſa ut e b ſit dupla ipſius e d. Cōſtat quod omnia centra inſcriptarum rectilinearum cadent inter puncta h e. & quanto plurium laterum fuerit inſcriptum cognitæ, tanto magis ipſi h appropinquat. Conſtat itaq; quod eſſe non poteſt, ut linea inter centrum inſcripti cognitæ rectilinei, & centrū portionis intercepta ſit maior e h. poteſt autem minor eſſe non ſolum ipſa h e, uerum omni alia data.

IN SEPTIMVM.

Inſcribatur itaq; in portione a b c rectilineū, ſimile ei quod eſt in portione d e f, hoc eſt ſimiliter cognitæ. Similiter enim cognitæ inſcribitur, quando ſectiones parabolæ a b c æquales fiant ipſi e f g, ita ut latera cognitæ inſcripti ipſi portioni a b c, ſint numero æquales rectilinei laterib. inſcripti ipſi e f g. quoniam enim puncta b & f, ſunt uertices ſimilium portionum, erunt ita cognitæ inſcripta ſimilia.

IN OCTAVVM.

Et quoniam eſt ſicut b h ad h d, ita k m ad m f. nam portiones cum ſint ſimiles, habebunt centra diuidentia diametros in eaſdem portiones. & componēti, ſicut b d ad d h, ita k f ad f m: & permutatim, ſicut b d ad k f, ita d h ad m f. Eſt autem b d quadrupla ipſius k f. hoc enim in fine oſtenditur, ubi eſt ſignum hoc ✎. Cōſequenter autē illud nos oſtendemus. Eſto parabola a b c, cuius diametros b d, & ducatur ordinate a d, & iungatur a b: & diuidatur a b in duo æqua puncto f, & ducatur per f æquediſtans ipſi b d ipſa e f. igitur ipſa e f eſt diametros portionis a b: & à punctis e f ducantur ordinate hæ e g f h. Quoniam itaque a f eſt æqualis f b, erit a b dupla ipſius f b, & a d ipſius f h: hoc eſt ipſius e g. Quare quadratum a d eſt quadruplum ad quadratum e g: quare d b quadrupla eſt ipſius b g longitudine. Quoniam igitur b d eſt dupla ipſius b h, erit b h dupla ipſius b g, & ipſa h g æqualis ipſi g b: & ipſa h g æqualis etiam ipſi e f. quia ipſum e g f h eſt parallelogrammum. Igitur ipſa b d eſt quadrupla ipſius f e. & quoniam ipſa b d eſt quadrupla ipſius b f, etenim hoc eſt oſtenſum. nam oſtenſum eſt in ſumpto, ipſam b d utriq; harum b g, e f eſſe quadruplam: quare b g eſt æqualis ipſi e f: & idcirco iſtic ipſa b f ipſi k f æqualis, & b d utriq; earum quadrupla: igitur ipſa b f eſt tertia pars ipſius f d. quoniam enim b d eſt quadrupla ipſius b f. Quorum igitur ipſa b d eſt quatuor, eorum ipſa b f eſt unum: & quorum b d eſt duodecim, eorum ipſa b f eſt tria. Eſt autem b f tripla ipſius f x. quorum igitur b f eſt tria, ipſa f x eſt unum. Tota igitur b x eſt quatuor: horum autem erat b d duodecim: igitur b x eſt tertia pars ipſius b d. Triplus autem



tri-

triangulus a b c portionum. Ostensum enim est ab eo, in eo quod scripsit de Coni rectanguli sectione, quod omnis figura cõtenta à recta, & sectione rectanguli coni, est sesquitertia trianguli basem eandem habentis, & altitudinẽ æqualem. quare portio a b c, est sesquitertia triãguli a b c: & diuidenti, triangulus a b c est triplus portionũ a k b, b l c. & est d b tripla ipsius e d. igitur ipsa b h est sesquitertia ipsius h d, quod erat demostrandum. quoniam enim b d est tripla ipsius d e. Quorum igitur b d est quindecim, eorum e d est quinq;: quorum uero d e est quinq;, eorum h e est unum: & tota h d sex, scilicet sexcupla ipsius h e. Quorũ igitur b d quindecim, eorum d h est sex: & reliqua h b, nouem. quare b h est sesquialtera ipsius h d.

IN NONVM THEOREMA.

NOnum theorema ualde obscurũ, exponemus iuxta loquentes quàm clarè poterimus. Quoniam enim istæ a b, b c, b d, b e sunt proportionales, & diuidenti, & permutatim, erũt a c, c d, d e in eadem proportione. Quoniam igitur a b, b c, b d, b e in eadem sunt proportione, & istæ a c, c d, d e. est sicut in primis magnitudinibus antecedens, & medium ad sequens: ita in secundis magnitudinib. antecedens, & medium ad sequens. Sicut ergo utreq; simul a c, c d: hoc est, d a ad d e: ita utraq; simul a b, b c ad d b. Sicut aũt utraq; simul a b, b c ad d b: ita dupla utriusque simul a b, b c ad duplam ipsius b d: quia partes eandem suis multiplicibus habent proportionem. Sicut ergo a d ad d e, ita duplum utriusq; simul a b, b c ad duplum d b. Rursus quoniam istæ c b, b d, b e in eadem sunt proportione, & istę a c, c d, d e. est autem per prædictá sicut a d ad d e, ita utraq; simul e b, b d ad b e. Erat autẽ sicut a d ad d e, ita duplum utriusq; simul a b, b c ad duplum ipsius b d. Sicut ergo unum ad unũ, ita omnia ad omnia. Sicut ergo a d ad d e, ita antecedẽtia ad sequentia. Sunt autem antecedentia duplũ utriusq; a b, b c: et utraq; c b, b d, hoc est duæ a b, tres c b, & una b d: sequẽtia uero duplum, b d, & sola b e. Est igitur sicut a d ad d e, ita recta composita ex dupla ipsius a b, & tripla c b, & sola d b ad compositam ex dupla b d & sola b e. Et quoniam composita ex duplo a b, & quadruplo c d, & quadruplo d b, et duplo b e, maior est composita ex duplo a b, & triplo c b, & sola d b: maius autem habet ad idem maiorem proportionem, quàm minus: maiorem ergo proportionem habet composita ex duplo utriusque simul a b, b e, & quadruplo utriusque simul c b, b d, ad compositam ex duplo d b, & sola e b, q̃ composita ex duplo a b, & ex triplo c b, & sola d b, ad compositam ex duplo b d, et sola e b. Verum sicut cõposita ex duplo a b, & tripla c b, & sola b d, ad compositã ex duplo b d, & sola e b: ita ostẽsum est esse a d ad d e. Igitur cõposita ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d, ad compositam ex dupla b d, & sola e b, maiorẽ proportionem habet, q̃ ad ad d e. Si igit̃ uoluerimus facere eãdem proportionẽ ipsius a d ad quandã aliam, erit illa minor q̃ d e. sit aũt d o. Est igit̃ sicut a d ad d o, ita composita ex dupla a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d, ad compositam ex dupla b d, & sola e b. Et ecõuerso, igitur est sicut o d ad d a, ita composita ex dupla b d, & sola e b, ad compositam ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d: & componẽti, sicut o a ad d a, ita composita ex dupla a b, & quadrupla c b, & sexcupla ipsius b d, & tripla ipsius b e, ad cõpositã ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d. Ipsa enim b d sexies sumpta est, quater in primis, bis in secundis, & ipsa b e ter sumpta: bis inter primas, semel inter secundas. Supponitur autem & a d habere ad g h, eam proportionem, quam habet composita ex quincupla utriusque simul b e, & decupla utriusque simul c b, b d, ad compositam ex dupla a b, & quadrupla c b, sexcupla b d, & tripla b e, & est proportionalitas indirecta. Per æquam igitur, sicut o a ad g h, ita cõposita ex quincupla utriusq; simul a b, b e, & decupla c b, b d, ad compositam ex dupla utriusque simul a b, b e, & quadrupla c b, b d. Huius autem descriptæ proportionalitatis conditio sic fiet manifesta. Quoniam enim in primis

ma-

magnitudinibus ſicut antecedẽs o a, ad conſequens a d, ita in ſecundis magnitudinibus antecedẽs compoſita ex dupla a b, & quadrupla b c, & ſexcupla b d, & tripla b e, ad conſequentem compoſitam ex dupla utriuſq; a b, b e, & quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d. Sicut autem in primis magnitudinibus conſequens ipſa a d, habet ad quoddam aliud, ad ipſam g h: ita in ſecundis magnitudinibus aliud quid compoſita ex quincupla utriuſq; a b, b e, & decupla utriuſq; ſimul c b, b d ad cõpoſitam ex dupla a b, & quadrupla c b, et ſexcupla b d, & tripla b e. Quoniam autem quincupla utriuſq; ſimul a b, b e ad duplam eiuſdem, eam habet proportionem quam quinq; ad duo: habet autem et decupla utriuſque ſimul c b, b d ad quadruplam eiuſdem proportionem, quam quinq; ad duo: quandoquidẽ decem ad quatuor habeãt eam proportionem quam quinq; ad duo. Cõpoſita igit ex quincupla utriuſq; ſimul a b, b e, & decupla utriuſq; ſimul c b, b d, ad compoſitam ex dupla utriuſq; ſimul a b, b e, & quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d, proportionem habet quam quinq; ad duo. Quare a o ad g h proportionẽ habet, quam quinq; ad duo. Rurſus quoniã oſtenſum eſt ſuperius, quod o d ad d a proportionem habet, quam e b cum dupla d b ad æqualẽ compoſitæ ex dupla utriuſq; a b, b e, cum quadrupla utriuſq; c b, b d. Eſt autem ſicut cõſequens in primis magnitudinibus d a, ad aliud quid d e: ita in ſecundis magnitudinibus aliud quiddã cõpoſita ex dupla a b, tripla c b, & ſola d b, ad antecedẽs, cõpoſitam ſcilicet ex e b, & dupla b d. diſſimiliter indirecte proportio, hoc eſt proportionalitate indirecta. Igitur ſicut o d ad d e, ita compoſita ex dupla a b, tripla c b, & ſola b d, ad compoſitam ex dupla utriuſq; ſimul a b, b e, & quadrupla c b, b d. Quare & è conuerſo ſicut e d ad d o, ita compoſita ex dupla utriuſq; ſimul a b, b e, & quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d, ad compoſitã ex dupla a b, & tripla c b, et ſola b d. & euertenti, ſicut d e ad e o, dico antecedens ad exceſſum, ita cõpoſita ex dupla utriuſq; ſimul a b, b e, cum quadrupla b c, b d, ad compoſitã ex c b ſola, & tripla b d, & dupla e b. In antecedẽte enim eſt dupla ipſius a b, & ipſius e b: in cõſequẽte uero dupla ipſius a b ſola. quare ſuperfluit in exceſſibus dupla ipſius e b. Rurſus in antecedẽte quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d: in conſequente uero tripla ipſius c b, & ſola b d: quare ſuperrelicta fuit in exceſsibus ſola c b, & tripla ipſius b d. Bene igitur dictũ eſt quod eſt euertẽti ſicut d e ad e o, ita compoſita ex dupla utriuſq; ſimul a b, b e, & quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d, ad cõpoſitã ex c b, & tripla ipſius b d, & dupla ipſius e b. Quare è cõuerſo ſicut o e ad e d, ita cõpoſita ex c b & tripla d b, et dupla e b, ad compoſitã ex dupla utriuſq; ſimul a b, b e, & quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d. Eſt aũt ſicut d b ad aliud quiddã ad ipſum e b ita a b, ad b c, et diuidẽti ſicut d e ad e b, ita a c ad c b. Eadẽ aũt ratione ſicut c d ad e b, ita d e ad e b. Sicut ergo tripla ipſius c d, ad triplã ipſius d b, ita dupla ipſius d e, ad duplã ipſius b e. Partes enĩ eã inuicẽ habent proportionẽ, quam earũ æquemultiplicia. Igitur ſicut unũ ad unũ, ita omnia antecedentia ad omnia ſequentia. Eſt igitur ſicut d e ad e b, ita compoſita ex a c, & tripla c d & dupla d e, ad cõpoſitam ex c b, & tripla ipſius b d, & dupla ipſius b e. Quoniam enim oſtenſum eſt, ſicut in primis magnitudinibus antecedens o e ad ſequens d e, ita in ſecũdis magnitudinibus compoſita ex c b, & tripla ipſius b d, & dupla ipſius b e, ad ſequens cõpoſitam ex dupla utriuſq; ſimul a b, b e, & quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d. Sicut autem in primis magnitudinib. ſequẽs d e ad aliud quiddam ad ipſam e b: ita in ſecundis magnitudinibus aliud quiddam compoſita ſcilicet ex a c, & tripla c d, & dupla d e, ad antecedens compoſitam ex c b, & tripla d b, & dupla e b. Per æquam igitur in proportionalitate indirecta, ſicut o e ad e b, ita compoſita ex a c, tripla c d, & dupla d e, ad cõpoſitam ex dupla utriuſq; ſimul a b, b e, & quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d. & componenti ſicut o b ad b e, ita compoſita ex a c, & tripla c d, & dupla d e, & dupla utriuſq; ſimul a b, b e, & quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d, ad compoſitam ex dupla

utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d. Verum composita ex a c & tripla c d & dupla d e, & dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d, æqualis est cōpositæ ex tripla a b, & sextupla c b, & tripla d b. Ipsa enim a b bis assumpta est, inde & assumens ipsam a c, & ex quadrupla ipsius c b, unam facit tertio ipsam a b. Rursus ablata à quadrupla ipsius c b, una manet tripla ipsius c b. Assumens autem triplam ipsius c d, & triplam d b, facit sextupla ipsius c b. Rursus ea ablata à quadrupla ipsius d b, remanet sola d b: quę assumens duplā ipsius d e, & duplā ipsius e b, facit triplā ipsius b d. Bene igitur dicit quod o b ad e b eam habet proportionē, quam composita ex tripla a b & sextupla c b, & tripla d b, ad compositā ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d. Rursus quoniam hæ e d, d c, c a sunt in eadem proportione, & per conuersum suppositionis utraq; simul, unaquęq; harum e b, b d, b c, b a erit sicut e d ad mediam, & sequentē ipsas d c, c a, hoc est ad ipsam d a, sic utraq; simul e b, b d ad utranq; d b, b c, cum utraq; simul c b, b a. & componenti sicut e a ad d a, ita utraq; simul e b, b d, cum utraq; simul d b, b c, & cū utraq; simul c b, b a, ad utrāq; d b, b c, cum utraque simul e b, b a. Verum utraq; simul c b, b d, cum utraq; simul c b, b a, æqualis est utriq; simul e b, b a, & bis utriq; simul d b, b c. Semel enim extremæ sumūtur, & mediæ bis. At uero utraq; simul d b, b c, cum c b, b a, æqualis est utriq; simul b d, b a, & bis c b, eadem causa. Quare est sicut e a ad d a ita composita ex e b, b a & dupla utriusq; simul d b, b c, ad compositam ex utraq; simul d b, b a, & dupla ipsius c b: quare & dupla ad duplam habet eandem proportionem. Sicut ergo e a ad d a, ita cōposita ex dupla utriusq; simul, e b, b a cum quadrupla utriusque simul c b, b d, ad compositam ex dupla utriusque simul a b, b d, & quadrupla ipsius c b. quare sicut e a ad tres quintas ipsius d a, ita composita ex dupla utriusque simul e b, b a, & quadrupla utriusque simul c b, b d, ad tres quintas cōpositæ ex dupla utriusq; simul a b, b d, & quadrupla ipsius c b. Verū sicut a e ad tres quintas ipsius d a, ita sumpta est b e ad f g. Sicut ergo e b ad f g, ita composita ex dupla utriusq; simul e b, b a, et quadrupla utriusq; simul c b, b d, ad tres quintas cōpositæ ex dupla utriusque a b, b e, & quadrupla ipsius c b. quoniā igitur ostensum est, sicut antecedens o b ad consequens b e, ita antecedens tripla utriusq; simul a b, b d, cum sextupla ipsius b c ad duplam utriusq; simul a b, b e, et quadruplam utriusq; c b, b d. sicut autem consequens ipsa e b ad aliud quiddam, id est ad f g, ita consequens dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul d b, b c, ad tres quintas sequentis, hoc est ad tres quintas compositæ ex dupla utriusq; simul a b, b d, & quadrupla ipsius c b. In directa igitur proportionalitate per æquam, sicut o b ad f g, ita composita ex tripla utriusque simul a b, b d, & sextupla c b ad tres quintas compositæ ex dupla utriusq; simul a b, b d, & quadrupla ipsius c b. Composita uero ex tripla utriusque simul a b, b d, & sextupla c b, ad tres quintas compositæ ex dupla utriusq; simul a b, b d, & quadrupla ipsius c b, proportionē habet quam quinq; ad duo. Nam tripla utriusque simul a b, b d, ad duplam utriusq; simul a b, b d, proportionem habet sesquialterā: sed & sextupla c b ad quadruplam c b, eandem habet proportionem sesquialteram. Quoniā uero antecedentia ad consequentia sesquialtera sunt, & proportionē habent eā quam tria ad duo, igitur habebunt sicut quadragintaquinq; ad triginta. utrunq; enim utriusque est quindecuplum. Sunt autem decem octo tres quintæ de triginta. igitur quadraginta quinq; ad decem octo habent proportionem, quam composita ex tripla utriusq; simul a b, b d, cum sextupla c b ad tres quintas compositæ ex dupla utriusque simul a b, b d cum quadrupla c b, qualis est etiam proportio o b ad f g. sed quadraginta quinq; ad decem octo eam habent proportionē, quam quinque ad duo: nam quinque & duo sunt utriusque nonæ, quare & o b ad f g eā habet proportionem, quam quinque ad duo. Quoniam igitur ostensum est, quod

o a ad

o a ad g h proportionem habet eam quam quinq; ad duo, & o b ad f g eandẽ pro portionem, erit ipsa f h duæ quintæ ipsius totius a b.

IN DECIMVM THEOREMA.

COnstat iam quod frusti a d e c diametros est ipsa f g,,. quoniã enim supponitur ipsa f b diametros ipsius portionis, & istæ a c, d e bipartitæ ab ea punctis f g sunt æquedistantes ei quæ in b contingit sectionem, constat quod omnes similiter ab illis ductæ æquedistantes siue inter illas, siue inter ipsam d e, & uerticem b bipertientur ab ipsa g f. & ideo dixit ipsam f g esse diametrum frusti.

Verũ sicut cubus a f ad cubũ ipsius d g, ita portio a b c ad portionẽ d e b,,. Quoniã enim ostẽsum est, ab eo quod portio a b c est sesquitertia triãgulo a b c. et portio d e b est trinagulo d e b. itẽ sesquitertia erit sicut portio a b c ad triangulũ a b c, ita portio d e b ad triangulũ d e b. & permutatim sicut portio ad portionem, ita triangulus ad triangulũ, & ita quoq; dimidia eorũ: sicut portio a b c ad portionẽ d e b, ita triãgulus a f b ad triãgulũ d g b. quare si describamus parallelogrãma, erũt dupla triangulorũ æquiangula, propterea quod d g & a f sunt ęquedistantes. quare & proportionem habebunt compositam ex proportione laterũ a f d g, & f b ad b g. eadem aũt proportio triangulorum & portionũ. Portio igitur habet ad portionem proportionem compositã, ex proportione a f ad d g, & ex f b ad b g. Proportio autem f b ad b g est eadem ei quæ est quadrati ex a f ad quadratum ex d g. Proportio igitur portionis ad portionem, componitur ex proportione quadrati ex a f ad quadratum ex d g, et ex a f ad d g. proportio quoq; cubi ex a f, ad cubum ex d g, componitur ex eisdẽ, uti ostensum est in expositionibus de Sphæra & cylindro. Est ergo sicut portio ad portionem, ita cubus ex a f ad cubũ ex d g. Et quoniam solidum quod basim habet quadratum ex a f, altitudinem uero lineam cõpositam ex dupla ipsius d g, & ipsa a f habet eam proportionem ad cubum ex a f quam dupla ipsius d g cum ipsa a f habet ad f a,,. Nam in eisdem basibus existentia habent inuicem ueluti altitudines. Est autem sicut d g ad a f, ita x n ad m n. & sicut dupla ipsius b g ad a f, ita dupla ipsius n x ad n m: & cõponenti, sicut dupla n x cum n m, ita dupla d g cum a f ad a f. Ostẽsum est autem, sicut cubus ex a f ad cubum ex d g, ita cubus ex m n ad cubum ex n x. & m n ad n t, sunt quatuor proportionales. & sicut prima ad quartam, ita solidum ex prima ad solidũ sibi simile ex secunda & similiter figuratum. Sicut autem cubus ex d g ad solidũ quod basim habeat quadratum ex d g, altitudinẽ uero rectam, compositam ex dupla a f, & ipsa d g, ita d g ad compositam ex dupla ipsius a f & ipsa d g. Rursus enim habentur inuicem sicut eorum altitudines. Sicut autem d g ad duplam ipsius a f, cũ ipsa d g: ita t n, ad compositam ex dupla ipsius o n cũ ipsa t n. est enim sicut a f ad d g, ita m n ad n x, & o n ad n t. & è conuerso sicut d g ad a f, ita t n ad n o. Factę igitur sunt quatuor magnitudines continenter inuicem positæ: prima quidem solidum quod habet basim, quadratum ex a f, altitudinem uero rectam compositã ex dupla d g & ipsa a f, & secunda cubus ex a f, tertia cubus ex d g: quarta solidũ quod habet basim quadratum d g, altitudinem uero rectam compositam ex dupla a f & ex ipsa d g. & aliæ quædam rectæ in eadem proportione binæ & binæ sumptæ, ipsa composita ex dupla n x, & simpla m n, & secunda m n: & tertia n t, & quarta composita ex dupla o n & ex n t. igitur per æquam fiet sicut solidum basim habens quadratum ex a f, & altitudinem rectam compositam ex dupla d g & ipsa a f, ad solidum basim habens quadratum ex d g, & altitudinem compositam rectam ex dupla a f & simpla d g: ita ipsa composita ex dupla n x, cum m n, ad cõpositam ex dupla n o cum simpla n t. Verum sicut solida prædicta inuicem, ita ostensum est esse h i ad i k. Sicut ergo h i ad i k, ita composita ex dupla x n, & simpla m n, ad duplam n o, & simplum n t. & componenti, sicut h k ad k i, ita composita ex utraq; simul m n, n t, & dupla utriusq; simul x n, n o, ad compositam ex

dupla ipsius n o, & simpla n t. Sicut autem f g, ad f k, scilicet duas eius quintas: utraque enim harum g h, f k, est duæ quintæ ipsius g f, quoniam media quinta ponitur ipsa h k: ita composita ex quincupla utriusq; simul m n, n t, & decupla utriusque simul x n, n o, ad duplam utriusq; simul m n, n t, et quadruplam utriusq; simul x n, n o. duo enim ex quinq; & quatuor, ex decem duæ quintæ existunt. Quoniã igitur ostensum est, sicut f g ad i k, ita quincuplã ipsius m n, n t, & decupla ipsius x n, n o, ad duplam ipsius n o & simplam n t. Rursus ostensum est, quod sicut f g ad f k, ita quincupla utriusq; m n, n t, & decupla x n, n o ad duplã ipsius m n, n t, & quadruplam ipsius x n, n o: erit sicut antecedẽs ad duo sequentia, ita antecedens ad duo sequentia: sicut f g ad f i, ita composita ex dupla ipsius o n, & simpla n t, et dupla utriusq; simul m n, n t, & quadrupla ipsius x n, n o: quæ est ęqualis compositę ex dupla m n, et quadrupla x n, et sexcupla ipsius n o, & tripla ipsius n t. sic enim sumptum est superius. Quoniam igitur quatuor rectę sunt cõtinuę proportionales hę m n, n x, o n, n t: & est sicut n t ad t m, ita quædam sumpta, hoc est r i ad f h, hoc est ad tres quintas ipsius g f, hoc est ipsius m o, & ostensæ sunt in rationali proportionalitate proportionales, erit per prædictũ r f duæ quintæ ipsius m n, hoc est ipsius f b. igitur b r est tres quintæ ipsius b f. igitur b f ad r f proportionem habet, quam quinq; ad duo. quare punctum r est centrum grauitatis portionis a b c. Si iam sumpserimus centrũ grauitatis portionis b d e in puncto q, erit b q tres quintæ ipsius q g. Factum est itaq; sicut tota f b ad totam b r, ita ablata b g ad ablatam b q. utraque enim earum ad utramque proportionem habet, quam quinq; ad tria. Igitur residua f g ad residuam q r proportionem habebit, quam quinq; ad tria. Quoniã igitur supponitur, sicut frustũ a d, e c ad portionẽ d e b, ita m t ad t n: & sicut m t, ad t n, ita tres quintę ipsius f g, hoc est ipsa f h uel q r ad r i. erit ergo sicut frustum ad portionem, ita q r ad r i. & mutuo afficiuntur, & r est centrum totius portionis, igitur ipsum id est centrum frusti.

EVTOCII ASCALONITAE COMMENTARII in secundum æquelibrantium Archimedis Finis.

V. C^ta a D-d^s